

Βασικά Στοιχεία Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος (V)



Ο Μετασχηματισμός Z

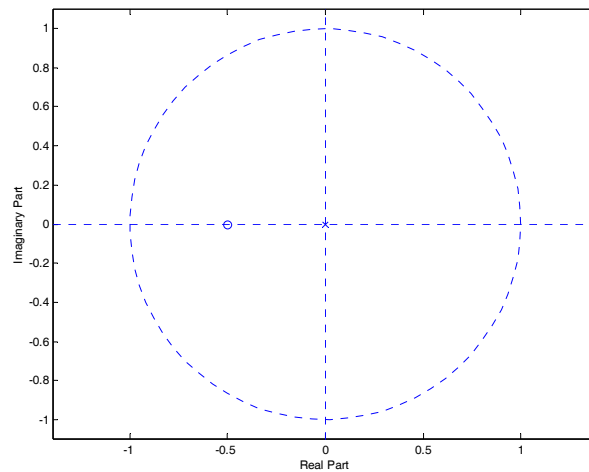
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}e^{-j\omega n} \quad \text{Μετασχηματισμός Fourier}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}z^{-n} \quad \text{Μετασχηματισμός Z}$$

z μιγαδική μεταβλητή $z=e^{j\omega}$

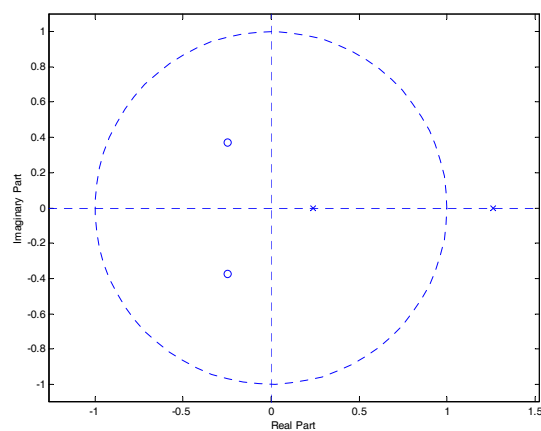
$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x\{n\}r^{-n})e^{-j\omega n}$$

Σχέση μετασχηματισμού Fourier και μετασχηματισμού Z



Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Z

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x\{n\}| |z|^{1-n}$$



Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Z

Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης οποιουδήποτε μετασχηματισμού Z είναι είτε ένας δακτύλιος είτε ένας δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο την αρχή των αξόνων

$$0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$$

Ιδιότητα 2: Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x\{n\}$ υπάρχει εφόσον η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο.

Ιδιότητα 3: Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ δεν μπορεί να περιέχει πόλους.

Ιδιότητα 4: Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X(z)$ είναι συνεχής (δεν αποτελείται από μη συνδεδεμένα τμήματα).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Z

Ιδιότητα 5: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z ενός πεπερασμένου διάρκειας σήματος είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο με εξαίρεση είτε την αρχή των αξόνων (όταν το σήμα $x\{n\}$ είναι μη μηδενικό για κάποιες τιμές του $n > 0$) είτε το άπειρο (όταν το σήμα $x\{n\}$ είναι μη μηδενικό για κάποιες τιμές του $n < 0$).

Ιδιότητα 6: Ένα διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση $h\{n\}$ είναι ευσταθές (κατά BIBO) αν η περιοχή σύγκλισης του αντίστοιχου μετασχηματισμού Z ($H(z)$) περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο.

Ιδιότητα 7: Ένα διακριτό σύστημα με κρουστική απόκριση $h\{n\}$ είναι αιτιατό ($h\{n\} = 0$ για $n < 0$) αν η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z ($H(z)$) εκτείνεται από τον κύκλο που αντιστοιχεί στο μέτρο του μεγαλύτερου πόλου (αυτού με το μεγαλύτερο μέτρο) έως το άπειρο, δηλαδή ROC:

$$|z| > r_R$$