

## ΜΑΘΗΜΑ 08: Ο ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

### 08.1 Εισαγωγή

Έχουμε ήδη γνωρίσει τον Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου (ΜΦΔΧ) ο οποίος μετασχηματίζει μια ακολουθία  $x\{n\}$  σε μια συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής  $\omega$  που αντιπροσωπεύει την διακριτή συχνότητα σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\{n\}e^{-j\omega n} \quad (\text{ευθύς μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας } x\{n\}) \quad (08.01)$$

$$x\{n\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (\text{αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier}) \quad (08.02)$$

Ο χειρισμός συνεχών συναρτήσεων με υπολογιστές δεν είναι αποδοτικός. Για τον λόγο αυτό αναπτύχθηκε μια εναλλακτική μορφή του μετασχηματισμού Fourier με την οποία ακολουθίες πεπερασμένων μήκους μετασχηματίζονται σε άλλες ακολουθίες οι οποίες αντιπροσωπεύουν δείγματα (στο χώρο της συχνότητας) του ΜΦΔΧ. Το ζεύγος του μετασχηματισμού αυτού ονομάζεται Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ) και ορίζεται από τις σχέσεις:

$$X\{k\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x\{n\}e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x\{n\}W_N^{kn} \quad (08.03)$$

$$x\{n\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\{k\}e^{j2\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\{k\}W_N^{-kn} \quad (08.04)$$

όπου  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Ο ΔΜΦ εκτός από τη σημασία του για την αναπαράσταση ακολουθιών διακριτού χρόνου στο χώρο της συχνότητας αποτελεί τη βάση πολλών εφαρμογών για την επεξεργασία σήματος όπως η ανάλυση φάσματος και η κωδικοποίηση δεδομένων (εικόνες JPEG, MP3, video MPEG).

### 08.2 Αναπαράσταση περιοδικών ακολουθιών με Διακριτές Σειρές Fourier

Η ανάλυση του ΔΜΦ είναι ευκολότερη αν ξεκινήσουμε από τις Διακριτές Σειρές Fourier (ΔΣΦ).

Έστω η ακολουθία η περιοδική  $\tilde{x}\{n\}$  με περίοδο  $N$ . Προφανώς ισχύει  $\tilde{x}\{n\} = \tilde{x}\{n + rN\}$  (όπου  $n, r$ ) ακέραιοι. Όπως και στην περίπτωση των σημάτων συνεχούς χρόνου μια περιοδική ακολουθία μπορεί να αναπαρασταθεί από μια σειρά Fourier, δηλαδή από ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών όρων η συχνότητα των οποίων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της βασικής συχνότητας  $2\pi/N$  όπως φαίνεται από την κατωτέρω σχέση:

$$\tilde{x}\{n\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}\{k\}e^{j2\pi\frac{k}{N}n} \quad (08.05)$$

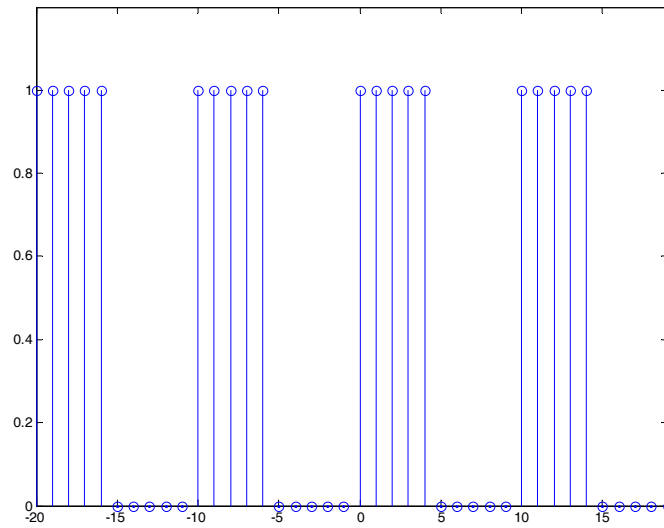
Σε αντίθεση με την περίπτωση των σημάτων συνεχούς χρόνου η αναπαράσταση με σειρές Fourier δεν απαιτεί άπειρες αρμονικές (πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας) αλλά μόνο  $N$  μιγαδικούς εκθετικούς όρους. Η αιτία είναι ότι οι μιγαδικοί εκθετικοί όροι είναι περιοδικοί ως προς  $N$ :

$$e_{k+lN}\{n\} = e^{j2\pi\frac{k+lN}{N}n} = e^{j2\pi\frac{k}{N}n} e^{j2\pi\frac{lN}{N}n} = e^{j2\pi\frac{k}{N}n} e^{j2\pi ln} = e^{j2\pi\frac{k}{N}n} = e_k\{n\} \quad (08.06)$$

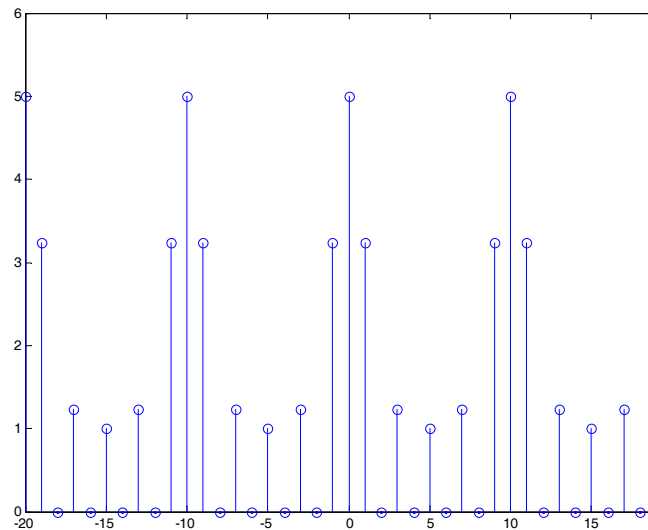
όπου  $l$  ακέραιος.

Οι συντελεστές της ΔΣΦ δίνονται από τη σχέση:

$$\tilde{X}\{k\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}\{n\} e^{j2\pi \frac{k}{N}n} \quad (08.07)$$



(α)



(β)

Σχήμα 1: (α) Ακολουθία Ορθογωνικών Παλμών, (β) Το πλάτος των συντελεστών της σειράς Fourier.

### 08.3. Περιοδική Συνέλιξη

Έστω οι περιοδικές ακολουθίες  $\tilde{x}_1\{n\}$  και  $\tilde{x}_2\{n\}$  με περίοδο  $N$ , και με συντελεστές  $\Delta\Sigma\Phi$   $\tilde{X}_1\{k\}$  και  $\tilde{X}_2\{k\}$  αντιστοιχα. Η ακολουθία

$$\tilde{x}_3\{n\} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1\{m\}\tilde{x}_2\{n-m\} \quad (08.08)$$

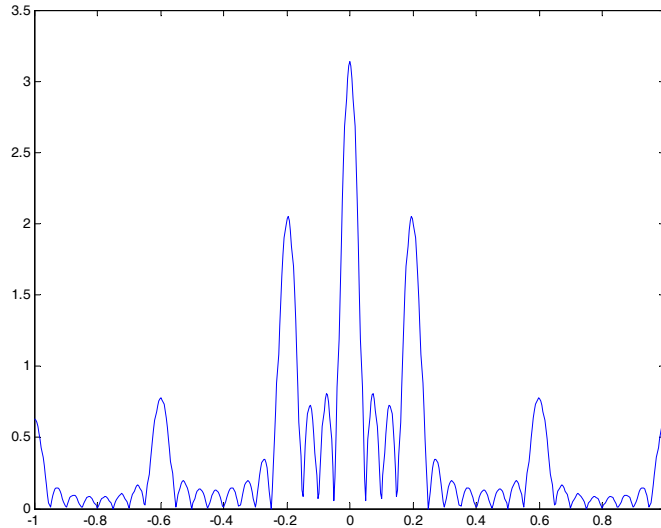
αποτελεί την περιοδική συνέλιξη των  $\tilde{x}_1\{n\}$  και  $\tilde{x}_2\{n\}$  και οι συντελεστές της  $\Delta\Sigma\Phi$  της, δίνονται από τη σχέση:

$$\tilde{X}_3\{k\} = \tilde{X}_1\{k\}\tilde{X}_2\{k\} \quad (08.09)$$

### 08.4 Ο ΜΦΔΧ περιοδικών ακολουθιών

Έστω η περιοδική ακολουθία  $\tilde{x}\{n\}$  με συντελεστές ΔΣΦ  $\tilde{X}\{k\}$  ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (ΜΦΔΧ) της ακολουθίας  $\tilde{x}\{n\}$  δίνεται από τη σχέση:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}\{k\} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \quad (08.10)$$

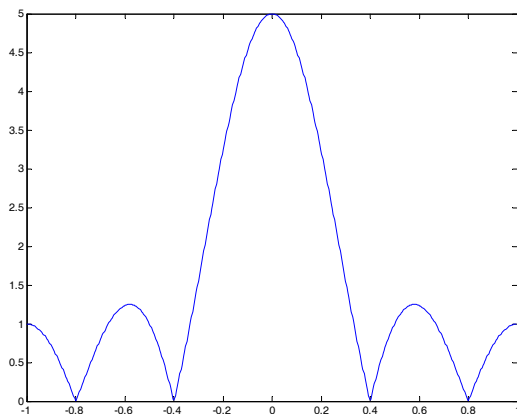


Σχήμα 2: Ο ΜΦΔΧ της ακολουθίας ορθογωνικών παλμών (ο οριζόντιος άξονας είναι σε ακτίνια  $-\pi$ )

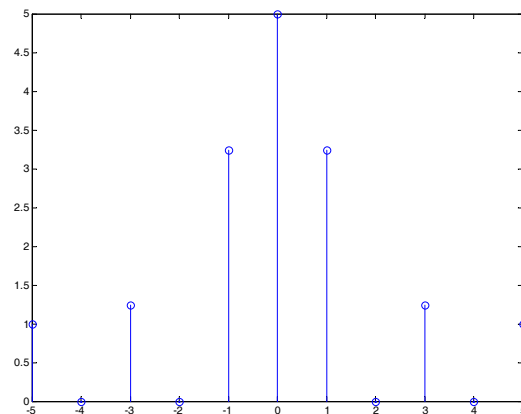
### 08.5 Η σχέση των συντελεστών ΔΣΦ και του ΜΦΔΧ μιας περιόδου

Έστω η περιοδική ακολουθία  $\tilde{x}\{n\}$  με συντελεστές ΔΣΦ  $\tilde{X}\{k\}$  και  $X(e^{j\omega})$  ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (ΜΦΔΧ) μιας περιόδου της ακολουθίας  $\tilde{x}\{n\}$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση:

$$\tilde{X}\{k\} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \quad (08.11)$$

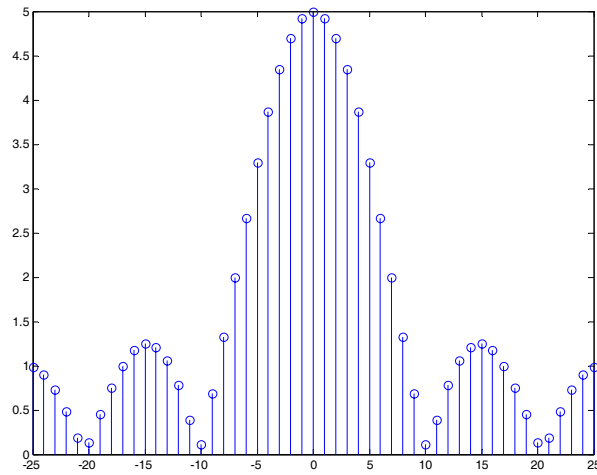


(α)



(β)

Σχήμα 3: (α) Ο ΜΦΔΧ μιας περιόδου της ακολουθίας ορθογωνικών παλμών, (β) οι συντελεστές ΔΣΦ της ακολουθίας  $\tilde{x}\{n\}$



Σχήμα 4: Ο ΔΜΦ μήκους 51, μιας περιόδου της ακολουθίας ορθογωνικών παλμών

### 08.3 Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Ακολουθία	Μετασχηματισμός Fourier
$\delta\{n\}$	1
$\delta\{n-n_0\}$	$e^{-j\omega_0 n}$
1 ( $-\infty < n < \infty$ )	$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi\kappa)$
$a^n u\{n\}$ ( $ a  < 1$ )	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u\{n\}$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi\kappa)$
$(n+1)a^n u\{n\}$ ( $ a  < 1$ )	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$\frac{r^n \sin\{\omega_p(n+1)\}}{\sin\{\omega_p\}} u\{n\}$ ( $ r  < 1$ )	$\frac{1}{1 - 2r \cos\{\omega_p\} e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin\{\omega_c n\}}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, &  \omega  \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c <  \omega  \leq \pi \end{cases}$
$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin\{\omega \frac{M+1}{2}\}}{\sin\{\frac{\omega}{2}\}} e^{-j\omega \frac{M}{2}}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi\kappa)$
$\cos(\omega_0 n + \varphi)$	$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left\{ \pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi\kappa) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi\kappa) \right\}$

## ΜΑΘΗΜΑ 09: ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

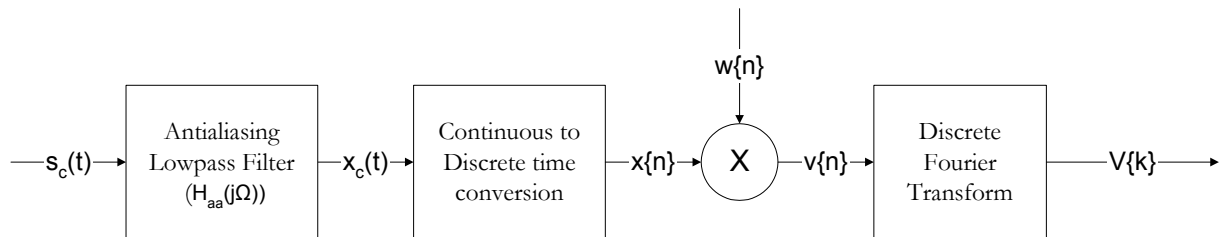
### 09.1 Εισαγωγή

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ) χρησιμοποιείται για την συχνοτική αναπαράσταση σημάτων πεπερασμένου χρόνου. Στην πραγματικότητα αυτό που επιδιώκεται είναι ο υπολογισμός του Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου (ΜΦΔΧ) αλλά αυτό που μπορεί στην πράξη να υπολογιστεί είναι ο ΔΜΦ (δεδομένου ότι ΜΦΔΧ είναι μιας συνεχής συνάρτηση της διακριτής συχνότητας  $\omega$ ). Δεδομένου ότι (για σήματα πεπερασμένου μήκους) ο ΔΜΦ προέρχεται από δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας του ΜΦΔΧ οι συνέπειες της δειγματοληψίας πρέπει να γίνουν πλήρως σαφείς.

Επιπλέον σε πολλές περιπτώσεις (όπως σε εφαρμογές ανάλυσης φάσματος αλλά και φιλτραρίσματος), τα σήματα δεν είναι πεπερασμένου μήκους και η εφαρμογή του ΔΜΦ απαιτεί την χρήση κάποιου *χρονικού παραθύρου, την επεξεργασία ανά τμήματα, ή την χρήση μιας εναλλακτικής μορφής του ΔΜΦ*, κατάλληλης για χρονικά μεταβαλλόμενα σήματα, η οποία καλείται *Χρονικά Εξαρτημένος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΧΕΔΜΦ)*.

### 09.2 Ανάλυση Συχνοτικού Περιεχομένου Σημάτων με χρήση του ΔΜΦ

Μια από τις βασικές εφαρμογές του ΔΜΦ είναι στην ανάλυση του συχνοτικού περιεχομένου σημάτων συνεχούς χρόνου όπως τα σήματα ομιλίας. Η βασική διάταξη που χρησιμοποιείται φαίνεται στο Σχήμα 1.



**Σχήμα 5: Η εφαρμογή του ΔΜΦ για την συχνοτική ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου**

Το αντιαντιπλωτικό φίλτρο εφαρμόζεται για να αποκόψει τις υψηλές συχνότητες από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Nyquist στον δειγματολήπτη που ακολουθεί. Στην έξοδο του δειγματολήπτη έχουμε ένα σήμα διακριτού χρόνου ( $x\{n\}$ ) το οποίο πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα παραθύρου ( $w\{n\}$ ) για να προκύψει ένα σήμα πεπερασμένου μήκους ( $v\{n\}$ ) στο οποίο και εφαρμόζεται ο ΔΜΦ.

Ο ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$  προκύπτει από την περιοδική συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier του σήματος  $x\{n\}$  και του παραθύρου  $w\{n\}$ :

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (09.1)$$

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 2, η εφαρμογή παραθύρου στο σήμα  $x\{n\}$  οδηγεί σε εξομάλυνση (π.χ. διαπλάτυνση παλμών) του αντίστοιχου ΜΦΔΧ.

Ο αντίστοιχος ΔΜΦ δίνεται από τη σχέση

$$V\{k\} = \sum_{n=0}^{N-1} v\{n\}e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}, k = 0,1,\dots,N-1 \quad (09.2)$$

ή ισοδύναμα από τη σχέση

$$V\{k\} = V(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}} \quad (09.3)$$

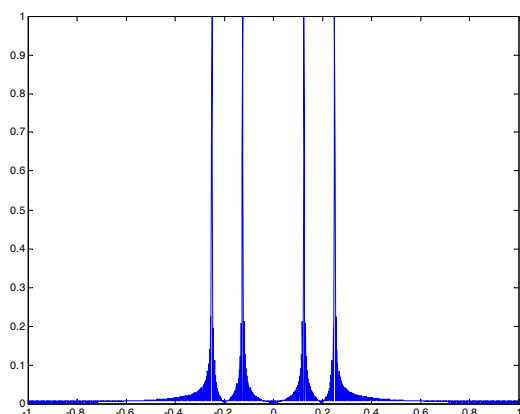
Στη σχέση (09.2) έχουμε υποθέσει ότι το μήκος  $L$  του παραθύρου είναι μικρότερο από το μήκος  $N$  του ΔΜΦ.

Δεδομένου ότι η διακριτή συχνότητα  $\omega$  σχετίζεται με τη φυσική συχνότητα  $\Omega$  με τη σχέση  $\omega = \Omega T$  όπου  $T$  η περίοδος δειγματοληψίας και ότι η απόσταση ανάμεσα στις συχνότητες του ΔΜΦ είναι  $2\pi/N$ , οι συντελεστές του ΔΜΦ αντιστοιχούν στις φυσικές συχνότητες σύμφωνα με τις σχέσεις:

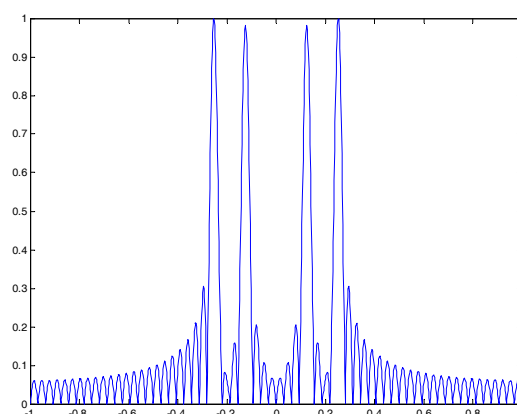
$$\Omega_k = 2\pi \frac{k}{NT}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (09.4)$$

και

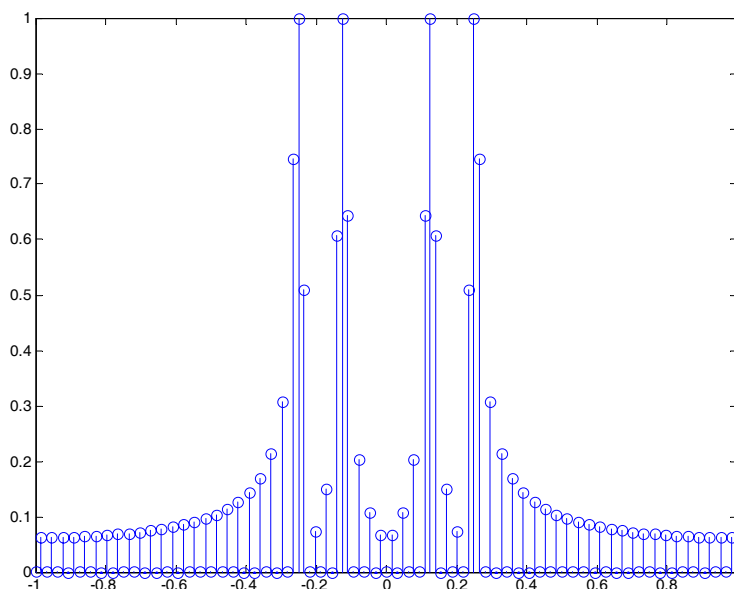
$$\Omega_k = -2\pi \frac{(N-k)}{NT}, \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \quad (09.5)$$



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 6: Η επίδραση της εφαρμογής παραθύρου (α) το πλάτος του ΜΦΔΧ για το αρχικό σήμα, (β) το πλάτος του ΜΦΔΧ μετά την εφαρμογή παραθύρου, (γ) ο ΔΜΦ του σήματος μετά την εφαρμογή παραθύρου

### 09.3 Η επίδραση της εφαρμογής παραθύρου στην ανάλυση συχνοτικού περιεχομένου σημάτων με χρήση του ΔΜΦ

Η εφαρμογή παραθύρου για τον υπολογισμό του ΔΜΦ έχει δύο βασικές επιπτώσεις στην ανάλυση του συχνοτικού περιεχομένου σημάτων: (α) την διάχυση, και (β) την μειωμένη διακριτική ικανότητα.

Εστω το σήμα συνεχούς χρόνου  $s_c(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1)$ . Θεωρώντας ιδεώδη δειγματοληψία και μηδενικό σφάλμα κβαντισμού προκύπτει το σήμα διακριτού χρόνου

$$x\{n\} = A_0 \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1), \text{ όπου } \omega_0 = \Omega_0 T \text{ και } \omega_1 = \Omega_1 T.$$

Μετά την εφαρμογή παραθύρου  $w\{n\}$  λαμβάνουμε το σήμα

$$v\{n\} = A_0 w\{n\} \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 w\{n\} \cos(\omega_1 n + \theta_1).$$

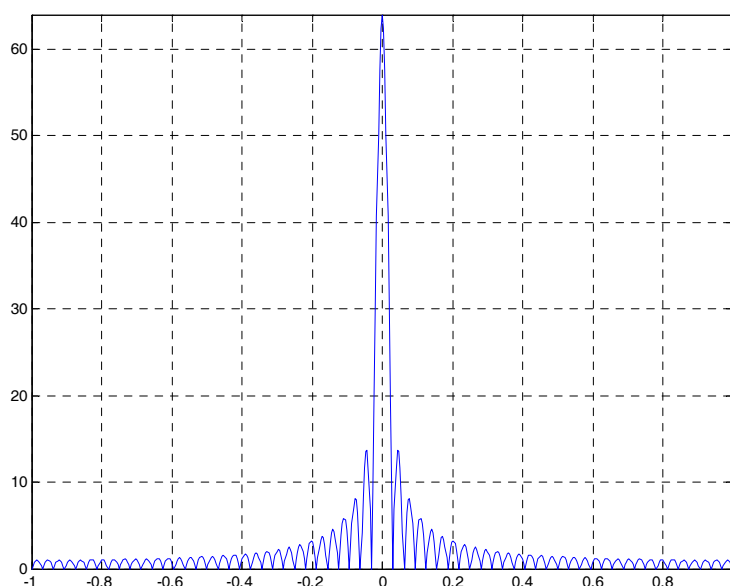
Στα επόμενα σχήματα φαίνεται η επίδραση του παραθύρου στην συχνοτική ανάλυση του σήματος  $s_c(t)$ .

Στο Σχήμα 3 εικονίζεται το πλάτος του ΜΦΔΧ για το ορθογωνικό παράθυρο μήκους 64. Στο Σχήμα 4 παρατηρούμε το πλάτος του ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0 = \theta_1 = 0$ ,  $\omega_0 = 2\pi/10$ ,  $\omega_1 = 2\pi/5$ ). Από το Σχήμα 4 παρατηρούμε ότι το προκύπτον φάσμα συχνοτήτων αποτελείται από αντίτυπα του φάσματος συχνοτήτων του παραθύρου κεντραρισμένα στις συχνότητες  $\omega_0$  και  $\omega_1$ .

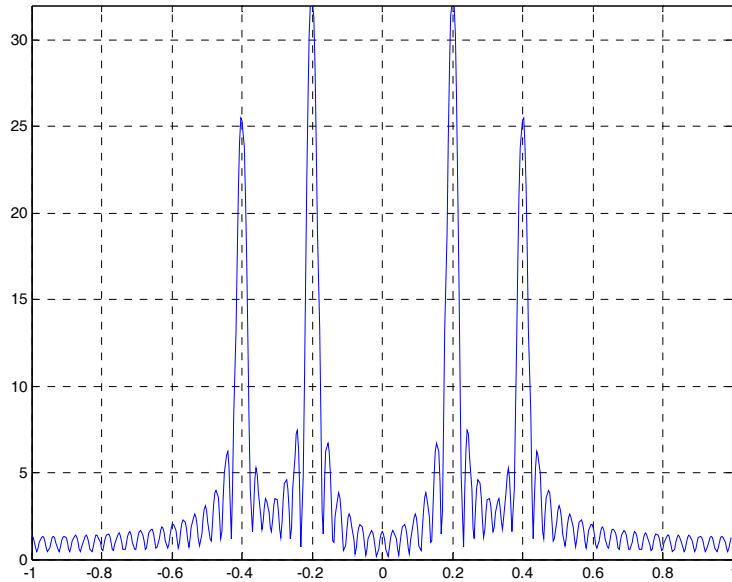
*Διάχυση* συμβαίνει όταν κάποιος από τους πλευρικούς λοβούς του αντίτυπου που είναι κεντραρισμένο στη συχνότητα  $\omega_0$  υπεισέρχεται στον κεντρικό λοβό που βρίσκεται στη συχνότητα  $\omega_1$  και το ανάποδο. Στην πράξη αυτό συμβαίνει πάντοτε αλλά είναι αντιληπτό μόνο όταν ο πλευρικός λοβός είναι αρκετά ισχυρός.

Η *μειωμένη διακριτική ικανότητα* οφείλεται στο πλάτος του κεντρικού λοβού του φάσματος του παραθύρου το οποίο οδηγεί σε επικάλυψη των κεντρικών λοβών. Για να αποφευχθεί η επικάλυψη των κεντρικών λοβών πρέπει οι συχνότητες  $\omega_0$  και  $\omega_1$  να απέχουν περισσότερο από το πλάτος  $\Delta_{ml}$  του κεντρικού λοβού του παραθύρου:

$$|\omega_0 - \omega_1| \geq \Delta_{ml} \tag{09.6}$$

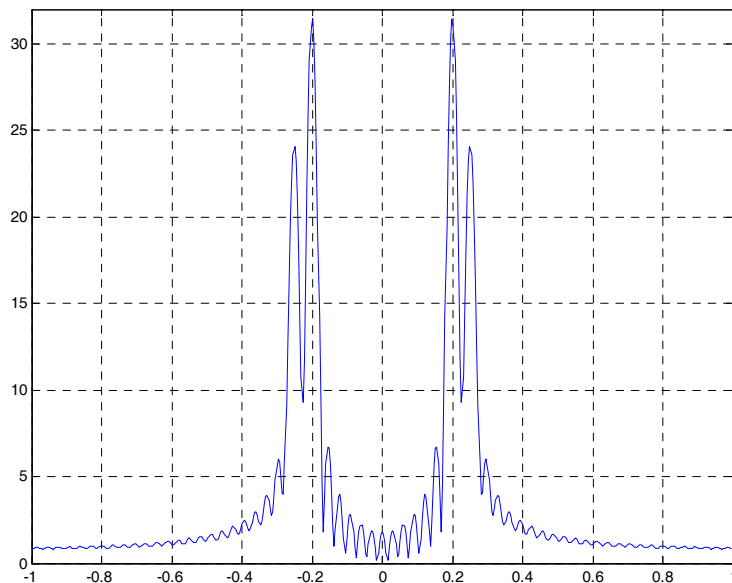


Σχήμα 7: Το πλάτος του ΜΦΔΧ για το ορθογωνικό παράθυρο μήκους 64. Σημειώνεται ότι το πλάτος του κεντρικού λοβού δίνεται από τη σχέση  $4\pi/64$ .



**Σχήμα 8: Το πλάτος του ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/5$ )**

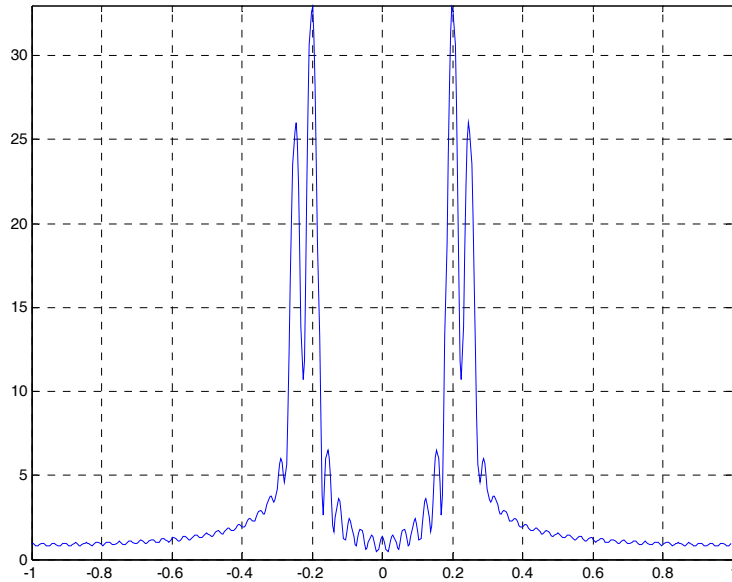
Στο Σχήμα 5 παρατηρούμε ότι υπάρχει μερική επικάλυψη των κεντρικών λοβών στις συχνότητες  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/8$ . Είναι φανερό ότι  $|\omega_0 - \omega_1| = \frac{4\pi}{80} < \Delta_{ml} = \frac{4\pi}{64}$ , παρόλα αυτά από το Σχήμα 5 είναι ευδιάκριτες οι δύο συχνότητες.



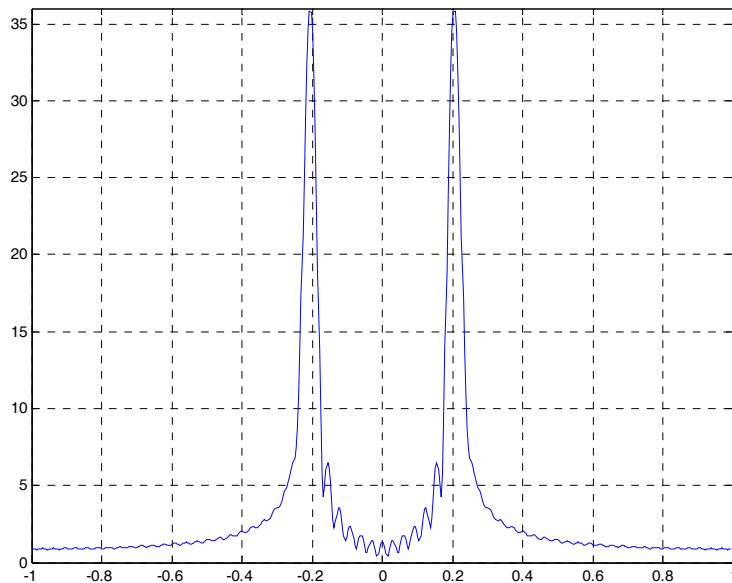
**Σχήμα 9: Το πλάτος του ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/8$ ). Έναρξη επικάλυψης κεντρικών λοβών**

Στο Σχήμα 6 παρατηρούμε την μεγιστοποίηση του φαινομένου της διάχυσης. Ο μέγιστος πλευρικός λοβός στη συχνότητα  $\omega_0=2\pi/10$  συντίθενται με τον κεντρικό λοβό στη συχνότητα  $\omega_1=2\pi/8$  με αποτέλεσμα το πλάτος του ΜΦΔΧ στη συχνότητα  $\omega_1$  να εμφανίζεται αυξημένο (26/32 αντί 24/32 που είναι η πραγματική τιμή). Σημειώνεται επίσης ότι υπάρχει και επικάλυψη κεντρικών λοβών δεδομένου ότι  $|\omega_0 - \omega_1| = \frac{3\pi}{64} < \Delta_{ml} = \frac{4\pi}{64}$ .





Σχήμα 10: Το πλάτος του ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/8.1$ ). Φαινόμενο Διάχυσης



Σχήμα 11: Το πλάτος του ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/9.25$ ). Ολική επικάλυψη κεντρικών λοβών οι συχνότητες δεν είναι πλέον διαχωρίσιμες.

#### 09.4 Χρήση παραθύρων Kaiser για ανάλυση συχνοτικού περιεχομένου

Με την χρήση παραθύρων Kaiser μπορούμε να ελέγξουμε το φαινόμενο της *διάχυσης* μέσω του πλάτους του πλευρικού λοβού (παράμετρος  $\beta$ ) και να αυξήσουμε την *διακριτική ικανότητα* αυξάνοντας το μήκος του φίλτρου (παράμετρος  $L$ ).

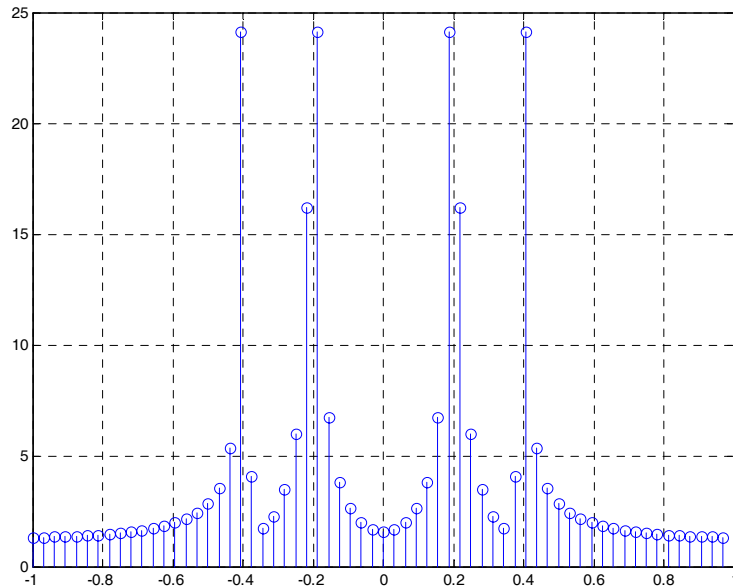
Η επιλογή του  $\beta$  και του  $L$  γίνεται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_{sl} < 13.26 \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26), & 13.26 < A_{sl} \leq 60 \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3), & 60 < A_{sl} \leq 120 \end{cases} \quad (09.7)$$

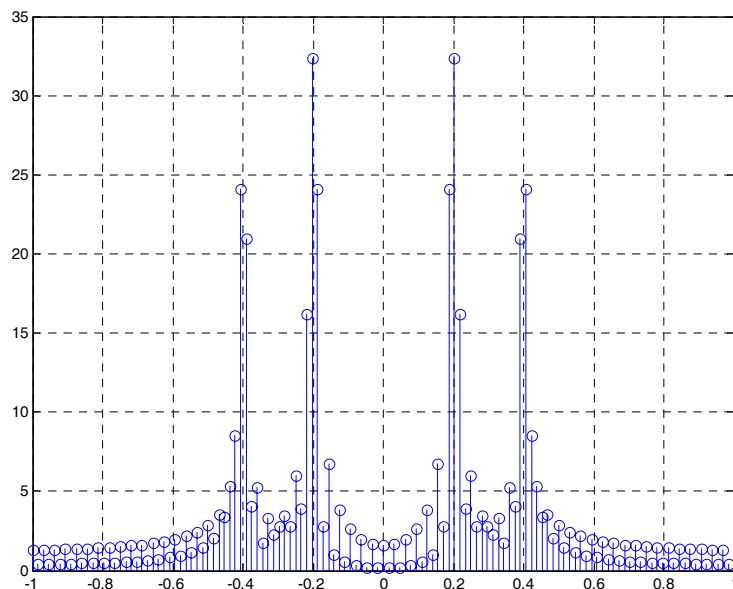
$$L \cong \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1 \quad (09.8)$$

όπου  $A_{sl}$  είναι το ύψος του μέγιστου πλευρικού λοβού (σε dB σε σχέση με τον κεντρικό λοβό), και  $\Delta_{ml}$  είναι το εύρος του κεντρικού λοβού.

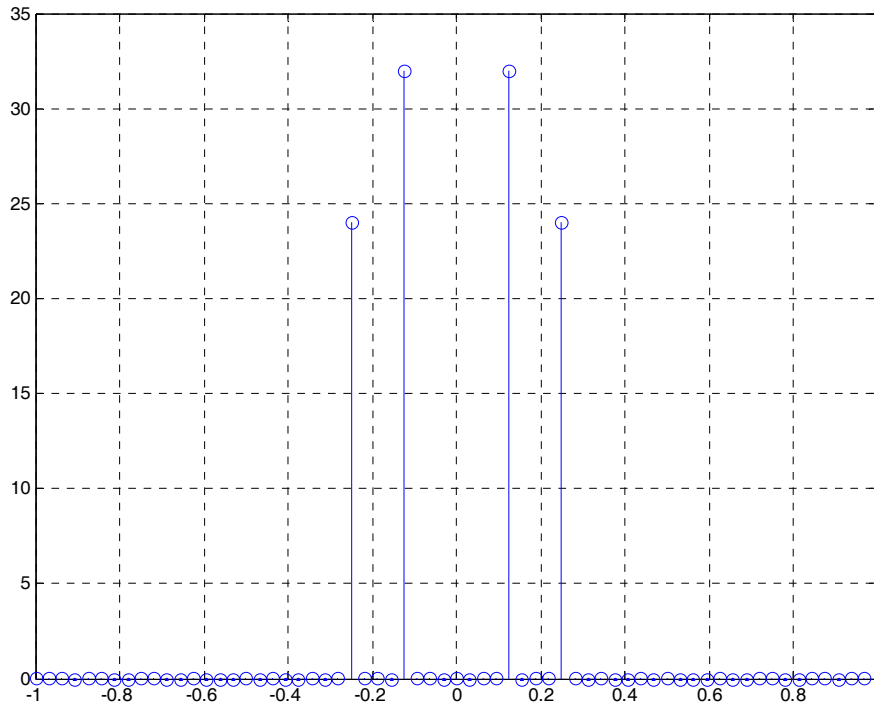
### 09.5 Δειγματοληψία Φάσματος (προσέγγιση του ΜΦΔΧ από τον ΔΜΦ)



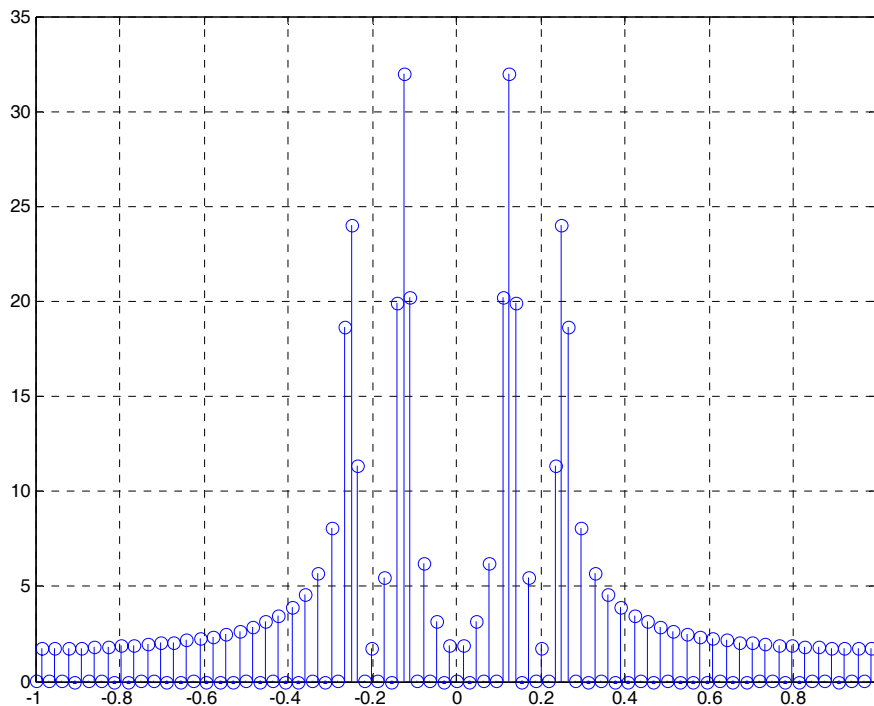
Σχήμα 12: Ο ΔΜΦ 64 σημείων του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/5$ ). Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες με το μέγιστο πλάτος δεν αντιστοιχούν στις  $\omega_0$  και  $\omega_1$  και ότι το πλάτος της  $\omega_0$  παρουσιάζεται μειωμένο.



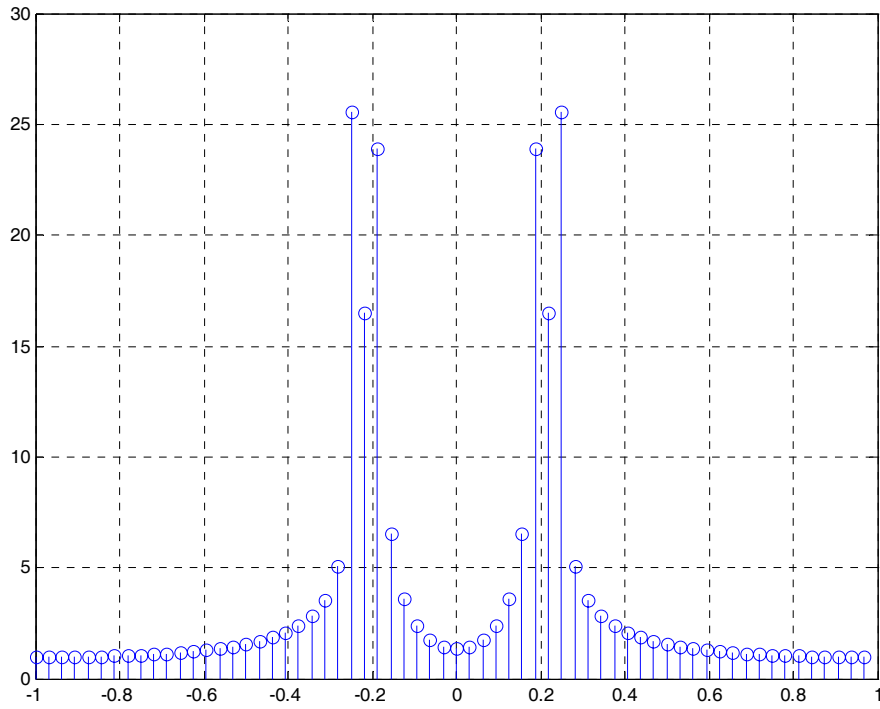
Σχήμα 13: Ο ΔΜΦ 128 σημείων του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/5$ ). Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες με το μέγιστο πλάτος είναι πολύ κοντά στις  $\omega_0$  και  $\omega_1$  και ότι το πλάτος της  $\omega_0$  παρουσιάζεται είναι σχεδόν σωστό.



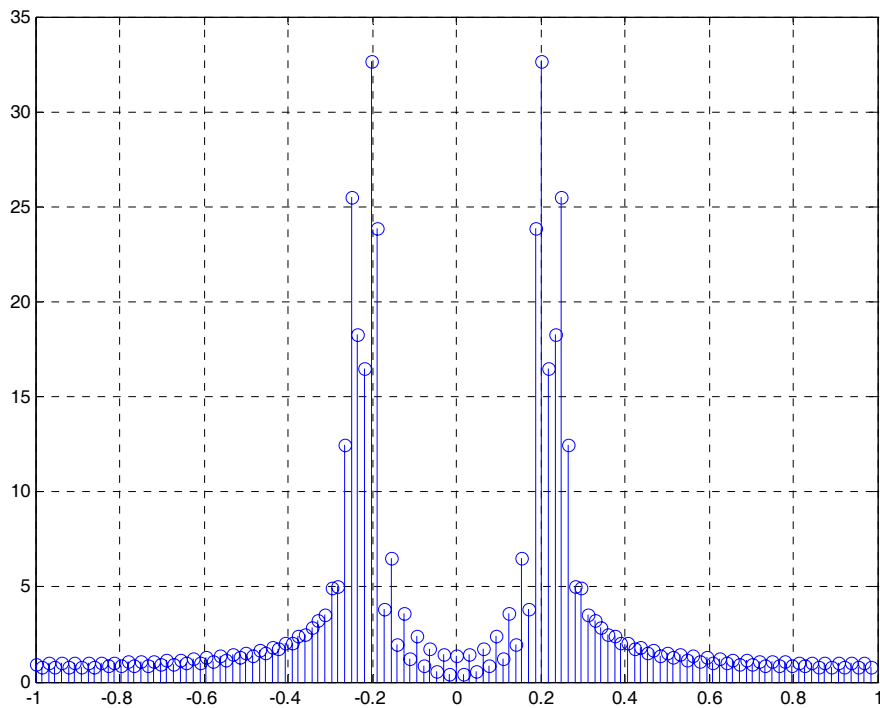
Σχήμα 14: Ο ΔΜΦ 64 σημείων του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/16$ ,  $\omega_1=2\pi/8$ ). Παρατηρούμε ότι οι μη μηδενικού πλάτους συχνότητες αντιστοιχούν επακριβώς στις  $\omega_0$  και  $\omega_1$  και ότι οι υπόλοιπες συχνότητες εμφανίζουν μηδενικό πλάτος.



Σχήμα 15: Ο ΔΜΦ 128 σημείων του σήματος  $v\{n\}$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/16$ ,  $\omega_1=2\pi/8$ ). Παρατηρούμε ότι τα μέγιστα πλάτη αντιστοιχούν επακριβώς στις  $\omega_0$  και  $\omega_1$  αλλά και ότι ενεργειακό περιεχόμενο εμφανίζουν και αρκετές από τις υπόλοιπες συχνότητες.



Σχήμα 16: Ο ΔΜΦ 64 σημείων του σήματος  $v[n]$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/9.1$ ). Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες με το μέγιστο πλάτος δεν αντιστοιχούν στις  $\omega_0$  και  $\omega_1$ , ότι το πλάτος της  $\omega_0$  παρουσιάζεται μειωμένο και ότι υπάρχει επικάλυψη των κεντρικών λοβών.



Σχήμα 17: Ο ΔΜΦ 128 σημείων του σήματος  $v[n]$  ( $\theta_0=\theta_1=0$ ,  $\omega_0=2\pi/10$ ,  $\omega_1=2\pi/9.1$ ). Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες με το μέγιστο πλάτος αντιστοιχούν χονδρικά στις  $\omega_0$  και  $\omega_1$ , ότι το πλάτος της  $\omega_0$  παρουσιάζεται σχεδόν σωστό αλλά ότι εξακολουθεί να υπάρχει επικάλυψη των κεντρικών λοβών.

### 10.1 Εισαγωγή

Για τα περισσότερα από τα σήματα που συναντώνται στην πράξη η επακριβής μαθηματική μοντελοποίηση τους είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και δύσκολη. Στις περιπτώσεις αυτές είναι περισσότερο αποτελεσματικό να μοντελοποιήσουμε τα σήματα ως *στοχαστικές ανελίξεις*. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε υπόψη και την περίπτωση τυχαίου θορύβου ο οποίος είναι δυνατό να επηρεάζει τα σήματα αυτά.

Οι *στοχαστικές ανελίξεις* αλλά και τα σήματα γενικότερα διακρίνονται σε *μεταβαλλόμενα* (non-stationary) και *μη μεταβαλλόμενα* (stationary). Στην πρώτη περίπτωση το φάσμα των σημάτων εξαρτάται από και περιγράφεται από *φασματογράμματα* (spectrograms) τα οποία υπολογίζονται με την βοήθεια του *Χρονικά Εξαρτημένου Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier* (ΧΕΔΜΦ). Η εκτίμηση του φάσματος ισχύος για *μη μεταβαλλόμενες χρονικά στοχαστικές ανελίξεις* πραγματοποιείται με την μέθοδο των *περιοδογραμμάτων* ή με την μέθοδο της αυτοσυσχέτισης. Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται ο υπολογισμός του ΔΜΦ είτε του ίδιου του σήματος είτε της αυτοσυσχέτισης του.

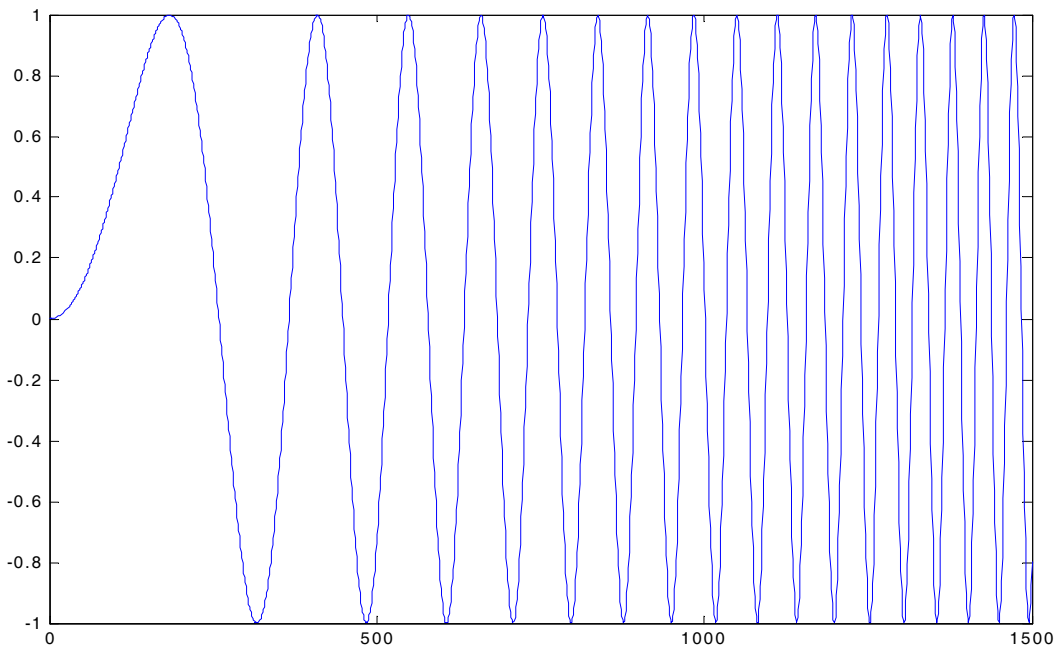
### 10.2 Ο Χρονικά Εξαρτημένος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΧΕΔΜΦ)

Ο Χρονικά Εξαρτημένος Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (ΧΕΜΦΔΧ) ορίζεται πάντοτε με την βοήθεια της εφαρμογής ενός παραθύρου  $w$  στο μη μεταβαλλόμενο σήμα και είναι μια συνάρτηση τόσο του χρόνου  $n$  όσο και της συχνότητας  $\omega$ . Ο ΧΕΜΦΔΧ ορίζεται από τη σχέση:

$$X\{n, \omega\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\{n+m\}w\{m\}e^{-j\omega m} \tag{10.1}$$

Το σήμα  $x\{n\}$  μπορεί να ανακατασκευαστεί από τον ΧΕΔΜΦ με βάση τη σχέση 10.2.

$$x\{n\} = \frac{1}{2\pi w\{0\}} \int_0^{2\pi} X\{n, \omega\}d\omega \tag{10.2}$$

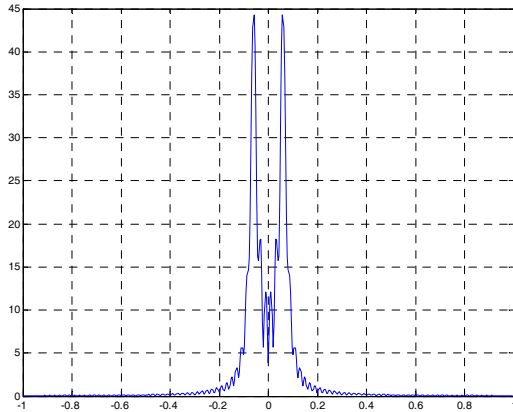


Σχήμα 18: Χρονικά μεταβαλλόμενο ημιτονοειδές σήμα

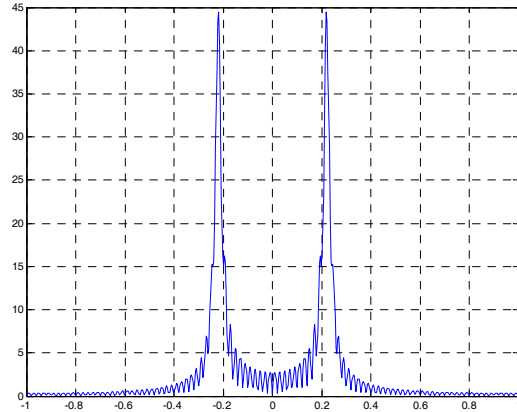
Αντίστοιχα ο Χρονικά Εξαρτημένος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΧΕΔΜΦ) ορίζεται από τη σχέση:

$$X\{n, k\} = \sum_{m=0}^{L-1} x\{n+m\}w\{m\}e^{-j2\pi\frac{k}{N}m}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

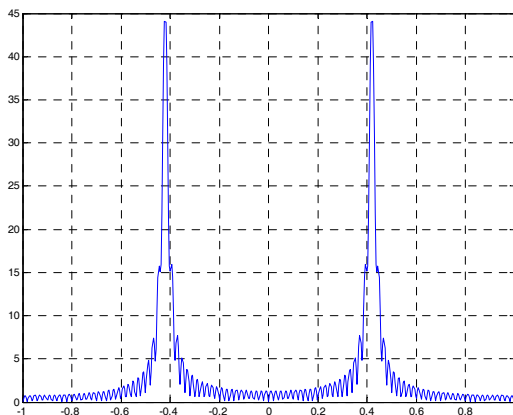
όπου L το μήκος του παραθύρου w και N ο αριθμός των συχνοτήτων στις οποίες υπολογίζεται ο ΔΜΦ (ως γνωστό πρέπει να ισχύει  $N \geq L$ ).



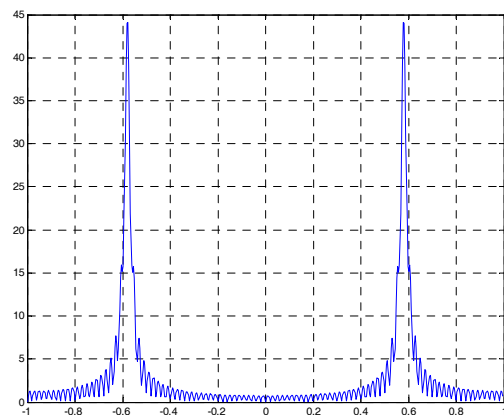
(α)



(β)



(γ)



(δ)

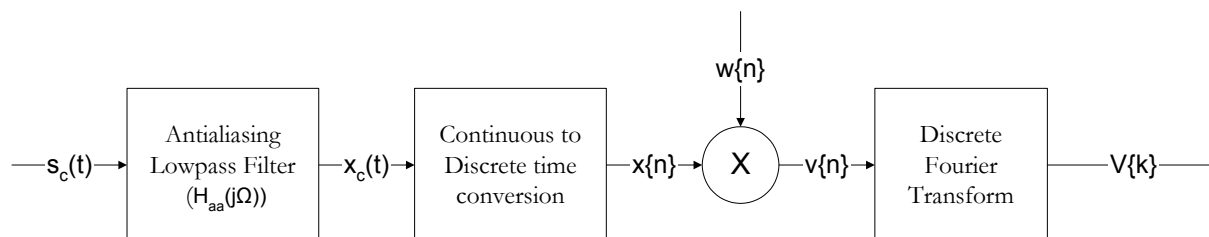
Σχήμα 19: Ο ΔΜΦ του σήματος του Σχήματος 1 για το τμήμα: (α) από τα δείγματα 101:200, (β) από τα δείγματα 501:600, (γ) από τα δείγματα 1001:1100, (δ) από τα δείγματα 1401:1500

### 10.3 Φασματογράμμα (Spectrogram)

Η απεικόνιση του ΧΕΔΜΦ γίνεται σε διαγράμματα με άξονες τον χρόνο και την συχνότητα τα οποία ονομάζονται φασματογράμματα. Η ισχύς του σήματος σε κάθε συχνότητα απεικονίζεται με αντίστοιχο γκρι επίπεδο (έντονο μαύρο υποδεικνύει μεγάλη ισχύ ενώ το λευκό δηλώνει μηδενική ισχύ)

## 10.4 Ανάλυση μη χρονικά μεταβαλλόμενων στοχαστικών σημάτων: Περιοδογράμμα

Η εκτίμηση φάσματος ισχύος ενός μη χρονικά μεταβαλλόμενου στοχαστικού σήματος συνεχούς χρόνου πραγματοποιείται με την βοήθεια της διάταξης του Σχήματος 3.



**Σχήμα 20: Διάταξη για την εκτίμηση φάσματος ισχύος μη χρονικά μεταβαλλόμενων στοχαστικών σημάτων συνεχούς χρόνου**

Το φάσμα ισχύος  $P_{ss}(\Omega)$  για το σήμα  $s_c(t)$  σχετίζεται με το φάσμα ισχύος  $P_{xx}(\omega)$  του διακριτού σήματος  $x\{n\}$  μέσω της σχέσης (υποθέτουμε ότι η περίοδος δειγματοληψίας υπακούει στο θεώρημα Nyquist):

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_{ss}\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi$$

όπου  $T$  είναι η περίοδος δειγματοληψίας.

Η ποσότητα

$$I(\omega) = \frac{1}{LU} |V(e^{j\omega})|^2 \tag{10.3}$$

ονομάζεται *περιοδογράμμα*,  $V(e^{j\omega})$  είναι ο ΜΦΔΧ του σήματος  $v\{n\}$ :

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w\{n\}x\{n\}e^{-j\omega n} \tag{10.4}$$

$L$  είναι το μήκος του παραθύρου, και

$$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (w\{n\})^2 \tag{10.5}$$

είναι μια σταθερά κανονικοποίησης.

Στην πράξη το περιοδογράμμα προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$I(\omega_k) = \frac{1}{LU} |V(k)|^2 \tag{10.6}$$

όπου  $V(k)$  είναι ο ΔΜΦ  $N$  σημείων ( $N \geq L$ ) του σήματος  $v\{n\}$  και  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ ,  $k=0,1, \dots, N-1$ .