

### 06.1 Εισαγωγή

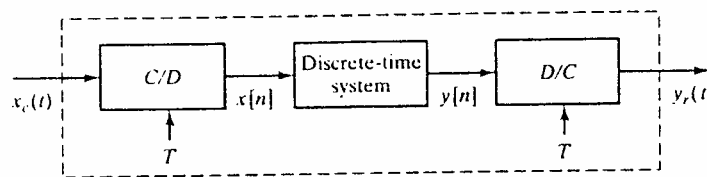
Τα φίλτρα είναι μια ειδική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων τα οποία τροποποιούν συγκεκριμένες συχνότητες του σήματος εισόδου σε σχέση με κάποιες άλλες.

Η σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων περιλαμβάνει τρία στάδια: (α) Τον καθορισμό των ιδιοτήτων του φίλτρου (καθορισμός προδιαγραφών), (β) την προσέγγιση των προδιαγραφών μέσω ενός αιτιατού διακριτού συστήματος και (γ) την πραγματοποίηση του συστήματος.

Στην περίπτωση που ένα ψηφιακό (διακριτού χρόνου) φίλτρο χρησιμοποιείται για την επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου εφαρμόζεται η διάταξη του επόμενου σχήματος. Το διακριτό σύστημα σε αυτή την περίπτωση είναι ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  και το συνολικό σύστημα είναι ένα σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη σχέση

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases} \quad (06.1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι: (α) το σήμα εισόδου  $x_c(t)$  έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης, και (β) η περίοδος δειγματοληψίας ικανοποιεί την συνθήκη του Nyquist. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις οι προδιαγραφές του συνολικού συστήματος μεταφέρονται στο φίλτρο διακριτού χρόνου μέσω της σχέσης  $\omega = \Omega T$  (μετασχηματισμός συχνότητας).



Σχήμα 1: Χρήση ψηφιακών φίλτρων για επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου

#### Παράδειγμα:

Δίνεται η διάταξη του Σχήματος 1 για την οποία θεωρούμε ότι οι μετατροπές συνεχούς σε διακριτό (C/D) και διακριτού σε συνεχές (D/C) είναι ιδεατοί. Το σήμα εισόδου έχει πεπερασμένο εύρος ζώνης, δηλαδή  $X(j\Omega) = 0$ , για  $\Omega_m > 2\pi 2000$  (rad/sec).

- (a) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας στον C/D converter.
- (b) Να υπολογιστούν οι προδιαγραφές του ψηφιακού φίλτρου έτσι ώστε το συνολικό σύστημα να συμπεριφέρεται ως βαθυπερατό φίλτρο με τις εξής ιδιότητες (θεωρήστε τη μέγιστη τιμή του  $T$  που προκύπτει από το (a)):
  - (1). Το κέρδος στην ζώνη διέλευσης  $[0 \ 2\pi 2000$  (rad/sec)] να διακυμαίνεται το πολύ  $\pm 0.01$  από την μονάδα.
  - (2). Το κέρδος στη ζώνη αποκοπής  $[2\pi 3000$  (rad/sec)  $\infty]$  είναι μικρότερο από 0.001

## 06.2 Σχεδίαση IIR φίλτρων διακριτού χρόνου από αντίστοιχα συνεχούς χρόνου

Η κλασική μεθοδολογία σχεδίασης IIR (Infinite Impulse Response) φίλτρων διακριτού χρόνου βασίζεται στη σχεδίαση φίλτρων συνεχούς χρόνου και την χρήση κάποιων μετασχηματισμών για την μετατροπή των προδιαγραφών στις αντίστοιχες φίλτρων διακριτού χρόνου. Υπάρχουν δύο βασικές μεθοδολογίες: (α) Η δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης (ή της απόκρισης συχνότητας ιδεατών φίλτρων) -Impulse Invariance Method, η οποία έχει προβλήματα με φαινόμενα αναδίπλωσης, και μπορεί να εφαρμοστεί για την σχεδίαση βαθυπερατών φίλτρων μόνο, και (β) η χρήση διγραμμικού μετασχηματισμού ο οποίος αντιστοιχεί το χώρο των φυσικών συχνοτήτων ( $\Omega$ ), ο οποίος έχει μη πεπερασμένη έκταση, στο χώρο των συχνοτήτων των σημάτων διακριτού χρόνου ( $\omega$ ) που περιορίζεται στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

### 06.2.1 Η μέθοδος δειγματοληψίας της κρουστικής απόκρισης

Έστω ότι  $h_c(t)$  είναι η κρουστική απόκριση ενός αναλογικού φίλτρου, με αντίστοιχη απόκριση συχνότητας  $H_c(j\Omega)$ , αν  $h_c(t)$  αντιστοιχεί σε βαθυπερατό φίλτρο, δηλ.  $H_c(j\Omega)=0$ , για  $\Omega > \Omega_s$ , τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα αντίστοιχο φίλτρο διακριτού χρόνου δειγματοληψιώντας την  $h_c(t)$  με κατάλληλη περίοδο δειγματοληψίας:

$$h\{n\}=T_d h_c(nT_d) \quad (06.2)$$

το οποίο αντιστοιχεί σε απόκριση συχνότητας του διακριτού φίλτρου που δίνεται από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T_d}), \text{ για } |\omega| \leq \pi, \text{ και εφόσον ισχύει } H_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \frac{\pi}{T_d} \quad (06.3)$$

Επομένως η διαδικασία σχεδίασης συνοψίζεται σε τρία βήματα:

(α) Αν οι προδιαγραφές δίνονται για το φίλτρο διακριτού χρόνου, τότε αυτές μετασχηματίζονται στις αντίστοιχες για το φίλτρο συνεχούς χρόνου μέσω της σχέσης  $\Omega = \frac{\omega}{T_d}$  (στην πράξη η τιμή της περιόδου δειγματοληψίας  $T_d$  δεν επηρεάζει τη σχεδίαση, δεδομένου ότι τηρείται το θεώρημα Nyquist, άρα μπορεί να θεωρηθεί για διευκόλυνση των υπολογισμών ότι  $T_d=1\text{sec}$ ).

(β) Σχεδιάζεται το αντίστοιχο φίλτρο συνεχούς χρόνου με κάποια από τις κλασικές προσεγγίσεις (Butterworth, Chebyshev, Elliptic). Η σχεδίαση αναφέρεται στην εξαγωγή της απόκρισης συχνότητας  $H_c(j\Omega)$  ή στην εξαγωγή του μετασχηματισμού Laplace  $H_c(s)$  της κρουστικής απόκρισης με βάση τις προδιαγραφές που έχουν τεθεί στο (α).

(γ) Υπολογίζεται η απόκριση συχνότητας του φίλτρου διακριτού χρόνου χρησιμοποιώντας τη σχέση  $H(e^{j\omega}) = H_c(j\frac{\omega}{T_d})$ , για  $|\omega| \leq \pi$ , ή ο μετασχηματισμός  $Z$  της κρουστικής απόκρισης του διακριτού φίλτρου ο οποίος προκύπτει από τον μετασχηματισμό Laplace με αντικατάσταση κάθε πόλου  $s_k$  με τον πόλο  $z_k = e^{s_k T_d}$  στο επίπεδο του μετασχηματισμού  $Z$ :

$$\text{Αν } H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}, \text{ τότε } H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}} \quad (06.4)$$

Από τη σχέση (06.4) προκύπτει ότι φίλτρα συνεχούς χρόνου που είναι ευσταθή και αιτιατά οδηγούν σε φίλτρα διακριτού χρόνου που είναι επίσης ευσταθή και αιτιατά.

### 06.2.2 Διγραμμικός Μετασχηματισμός

Ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι ένας αλγεβρικός μετασχηματισμός ανάμεσα στις μεταβλητές  $s$  και  $z$  μέσω του οποίου ο άξονας  $j\Omega$  του επιπέδου  $s$  αντιστοιχείται στον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου  $Z$ .

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right), \quad (06.5(\alpha))$$

$$z = \frac{1 + \frac{T_d}{2}s}{1 - \frac{T_d}{2}s}, \quad (06.5(\beta))$$

Η χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού για την σχεδίαση φίλτρων διακριτού χρόνου από αντίστοιχα συνεχούς είναι περισσότερο διαδεδομένη γιατί δεν περιορίζεται σε βαθυπερατά φίλτρα (δεν πάσχει από φαινόμενα αναδιπλώσης) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε μέθοδο σχεδίασης και για κάθε είδους φίλτρο. Στον αντίποδα, δεδομένου ότι ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι μη γραμμικός η μεταφορά των προδιαγραφών από φίλτρα συνεχούς σε φίλτρα διακριτού και το αντίστροφο εισάγει κάποια παραμόρφωση στο χώρο της συχνότητας.

Η διαδικασία σχεδίασης διακριτών φίλτρων από αντίστοιχα συνεχή με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού συνοψίζεται σε τρία βήματα:

(α) Αν οι προδιαγραφές δίνονται για το φίλτρο διακριτού χρόνου, τότε αυτές μετασχηματίζονται στις αντίστοιχες για το φίλτρο συνεχούς χρόνου μέσω της σχέσης  $\Omega = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$  (στην πράξη η

τιμή της περιόδου δειγματοληψίας  $T_d$  δεν επηρεάζει τη σχεδίαση άρα μπορεί να θεωρηθεί για διευκόλυνση των υπολογισμών ότι  $T_d=1\text{sec}$ ).

(β) Σχεδιάζεται το αντίστοιχο φίλτρο συνεχούς χρόνου με κάποια από τις κλασσικές προσεγγίσεις (Butterworth, Chebyshev, Elliptic). Η σχεδίαση αναφέρεται στην εξαγωγή της απόκρισης συχνότητας  $H_c(j\Omega)$  ή στην εξαγωγή του μετασχηματισμού Laplace  $H_c(s)$  της κρουστικής απόκρισης με βάση τις προδιαγραφές που έχουν τεθεί στο (α).

(γ) Υπολογίζεται η απόκριση συχνότητας του φίλτρου διακριτού χρόνου χρησιμοποιώντας τη

σχέση 
$$e^{j\omega} = \left( \frac{1 + j \frac{\Omega T_d}{2}}{1 - j \frac{\Omega T_d}{2}} \right),$$
 ή ο μετασχηματισμός  $Z$  της κρουστικής απόκρισης του διακριτού

φίλτρου ο οποίος προκύπτει από τον μετασχηματισμό Laplace σύμφωνα με τη σχέση:

$$H(z) = H_c \left[ \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right] \quad (06.6)$$

Θεωρώντας τη σχέση  $s = \sigma + j\Omega$ , και αντικαθιστώντας στην (06.05(β)) προκύπτει η σχέση (06.7) από την οποία συνάγεται ότι φίλτρα συνεχούς χρόνου που είναι ευσταθή και αιτιατά οδηγούν σε φίλτρα διακριτού χρόνου που είναι επίσης ευσταθή και αιτιατά.

$$z = \frac{1 + \sigma \frac{T_d}{2} + j \frac{\Omega T_d}{2}}{1 - \sigma \frac{T_d}{2} - j \frac{\Omega T_d}{2}}, \quad (06.7)$$

### 07.1 Εισαγωγή

Τα FIR φίλτρα έχουν κρουστική απόκριση με πεπερασμένη διάρκεια. Σε αντίθεση με τα IIR φίλτρα η σχεδίαση πραγματοποιείται απευθείας στο διακριτό χρόνο με στόχο την προσέγγιση μιας ιδεατής απόκρισης συχνότητας. Επιπλέον περιορισμοί όσον αφορά τη φάση της απόκρισης συχνότητας είναι συνήθεις στα FIR φίλτρα (σε πολλές περιπτώσεις ζητείται απόκριση συχνότητας με γραμμική φάση).

### 07.2 Σχεδίαση FIR φίλτρων με την μέθοδο του παραθύρου (window method).

Έστω  $H_d(e^{j\omega})$  η ιδεατή απόκριση συχνότητας την οποία επιθυμούμε να προσεγγίσουμε με ένα FIR φίλτρο. Η κρουστική απόκριση του ανωτέρω ιδεατού συστήματος δίνεται από την επόμενη σχέση (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier):

$$h_d\{n\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (07.1)$$

Στα περισσότερα ιδεατά συστήματα η απόκριση συχνότητας είναι τμηματικά σταθερή, και επομένως παρουσιάζει ασυνέχειες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κρουστική απόκριση να είναι μη αιτιατό σήμα με άπειρη διάρκεια. Η προφανής μέθοδος για την υλοποίηση αιτιατών FIR φίλτρων είναι η αποκοπή της ιδεατής απόκρισης με την εφαρμογή κάποιου παραθύρου.

Το Σχήμα 1(α) δείχνει την κρουστική απόκριση του ιδεατού βαθυπερατού φίλτρου με γραμμική φάση το οποίο περιγράφεται από τη σχέση (07.2) ( $M$  σταθερά, στο συγκεκριμένο παράδειγμα  $M=24$ ):

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega \frac{M}{2}}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (07.2)$$

Είναι φανερό ότι το ιδεατό σύστημα είναι μη αιτιατό και IIR. Για να προσεγγίσουμε το ιδεατό αυτό σύστημα με ένα FIR φίλτρο πολλαπλασιάζουμε την ιδεατή κρουστική απόκριση με ένα ορθογωνικό παράθυρο πεπερασμένης χρονικής διάρκειας:

Η κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου που προκύπτει περιγράφεται από τη σχέση (07.3), και εμφανίζεται στο Σχήμα 1(γ).

$$h(n) = h_d\{n\} \cdot w\{n\} = \begin{cases} h_d\{n\}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (07.3)$$

όπου

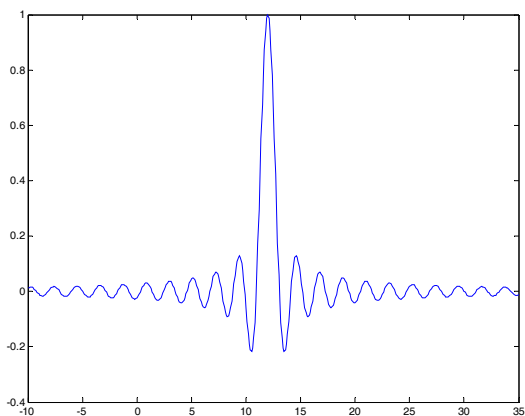
$$w\{n\} = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (07.4)$$

Είναι φανερό ότι το νέο σύστημα είναι και αιτιατό και FIR. Το ερώτημα είναι κατά πόσο το FIR φίλτρο προσεγγίζει την ζητούμενη ιδεατή απόκριση συχνότητας.

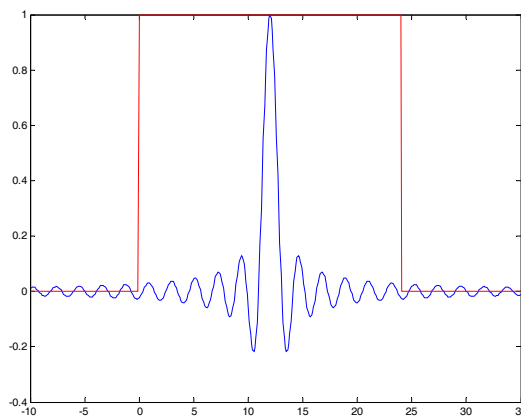
Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει ότι η απόκριση του FIR δίνεται από την περιοδική συνέλιξη της ιδεατής απόκρισης συχνότητας με τον μετασχηματισμό Fourier  $W(e^{j\omega})$  του παραθύρου:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (07.5)$$

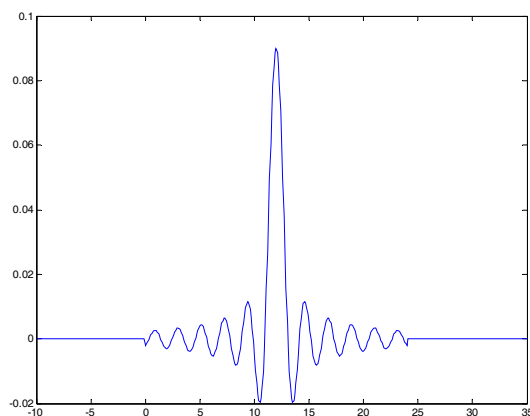
Με δεδομένο ότι η κρουστική συνάρτηση  $\delta(\omega)$  είναι το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης προκύπτει ότι όσο ο μετασχηματισμός Fourier  $W(e^{j\omega})$  του παραθύρου προσεγγίζει την κρουστική συνάρτηση (δηλαδή έχει περιορισμένο αριθμό μη μηδενικών συχνοτήτων οι οποίες είναι συγκεντρωμένες περί την συχνότητα  $\omega=0$ ) τόσο καλύτερα θα προσεγγίζεται η απόκριση συχνότητας του ιδεατού συστήματος από το FIR φίλτρο. Για το σκοπό αυτό έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορα είδη παραθύρων πέραν του ορθογωνικού.



(α)

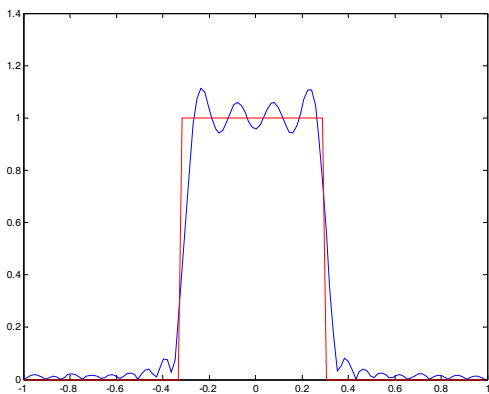


(β)

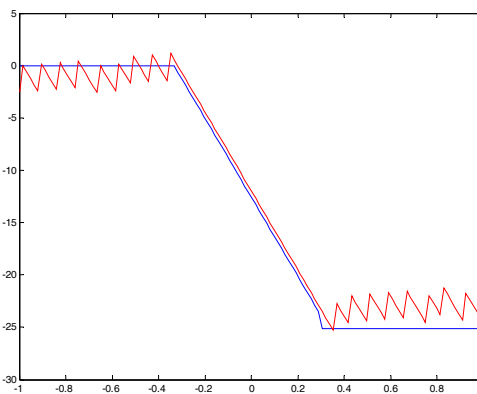


(γ)

Σχήμα 2: Κρουστική απόκριση ενός ιδεατού βαθυπερατού φίλτρου



(α)



(β)

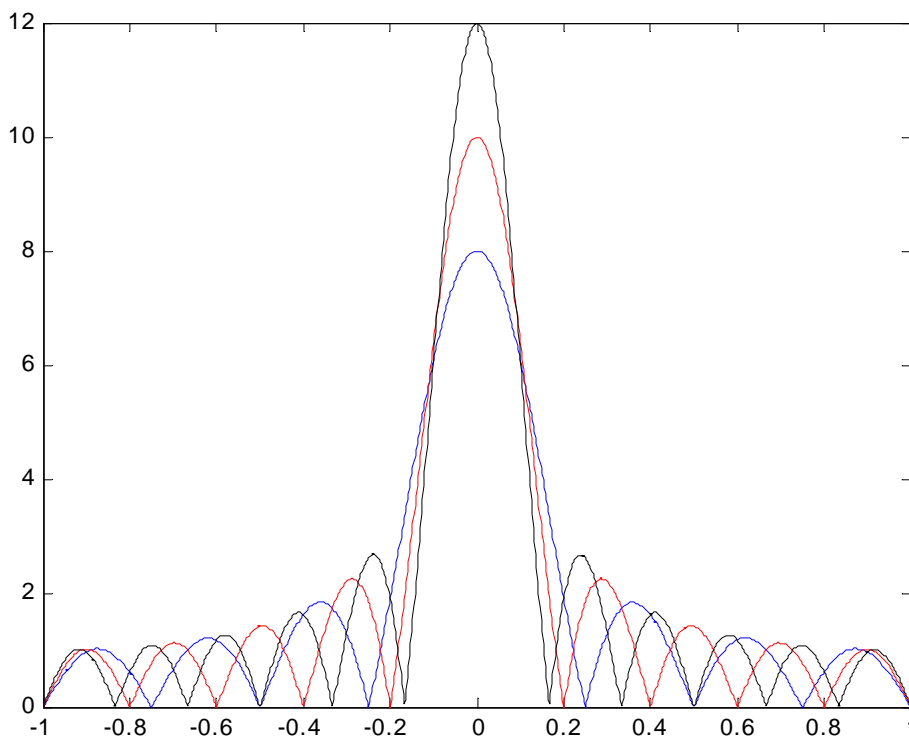
Σχήμα 3: Προσέγγιση του ιδεατής απόκρισης συχνότητας του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση (07.2) από ένα FIR φίλτρο ( $M=24$ ,  $\omega_c=0.3\pi$ ). (α) Διάγραμμα πλάτους, (β) διάγραμμα φάσης.

### 07.3 Είδη Παραθύρων

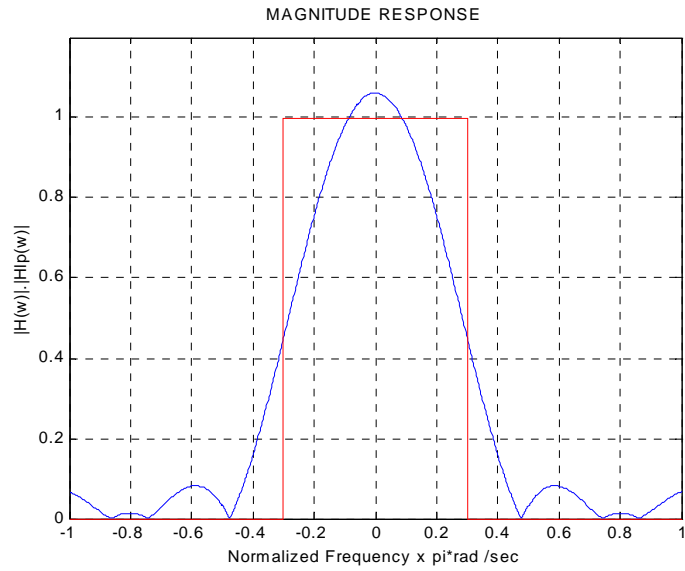
Ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογωνικού παραθύρου δίνεται από τη σχέση:

$$W_{rec}(e^{j\omega}) = \frac{\sin\{\omega \frac{M+1}{2}\}}{\sin\{\frac{\omega}{2}\}} e^{-j\omega \frac{M}{2}} \quad (07.6)$$

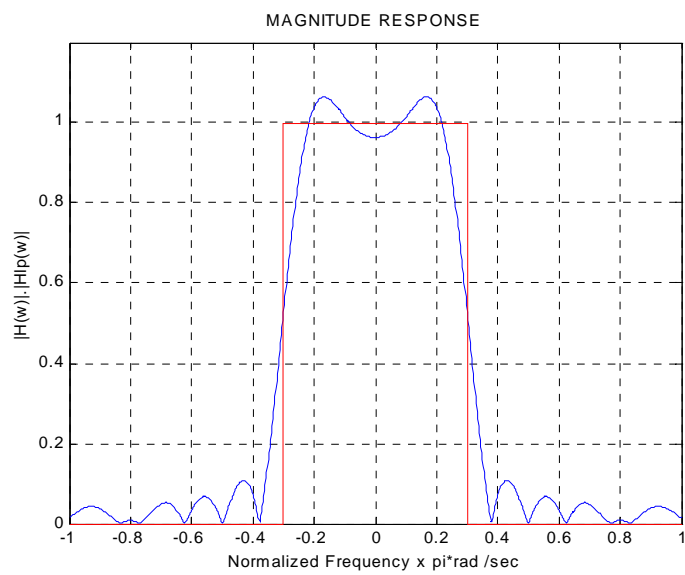
Από το Σχήμα 3 φαίνεται ότι το ύψος του κεντρικού λοβού είναι  $M+1$ , ενώ το πλάτος του δίνεται από τη σχέση  $4\pi/(M+1)$ . Είναι φανερό ότι αυξάνοντας την χρονικό εύρος ( $M$ ) του παραθύρου ο κεντρικός λοβός προσεγγίζει όλο και περισσότερο την κρουστική συνάρτηση. Δυστυχώς όμως οι πλευρικοί λοβοί παρόλο που με την αύξηση του  $M$  μειώνεται το εύρος τους αυξάνεται το ύψος τους. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4, αύξηση του  $M$  (τάξη του FIR φίλτρου), οδηγεί σε μικρότερη ζώνη διάβασης και καλύτερη προσέγγιση της ιδανικής απόκρισης αλλά δεν μειώνει την διακύμανση (ripple) περί την συχνότητα αποκοπής  $\omega_c$  η οποία οφείλεται στους πλευρικούς λοβούς του ορθογωνικού παραθύρου. Η μόνη λύση είναι να χρησιμοποιηθεί κάποιο παράθυρο μη ορθογωνικό χωρίς ασυνέχειες.



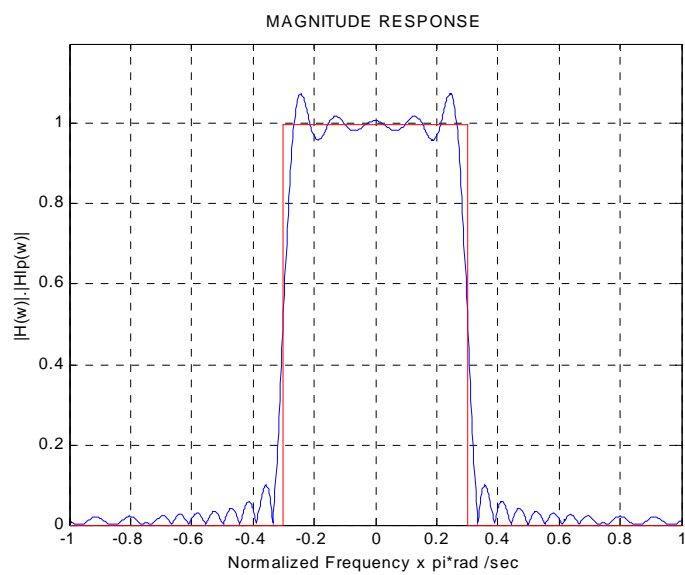
Σχήμα 4: Το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier για ορθογωνικά παράθυρα μήκους,  $M=7, 9, 11$



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5: Προσέγγιση της ιδανικής απόκρισης συχνότητας βαθυπερατού φίλτρου ( $\omega_c=0.3\pi$ ) με FIR φίλτρο τάξης: (α)  $M=7$ , (β)  $M=15$ , (γ)  $M=35$

### 07.3.1 Συνήθη είδη παραθύρων

(α) Ορθογωνικό:  $w_{rec}(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

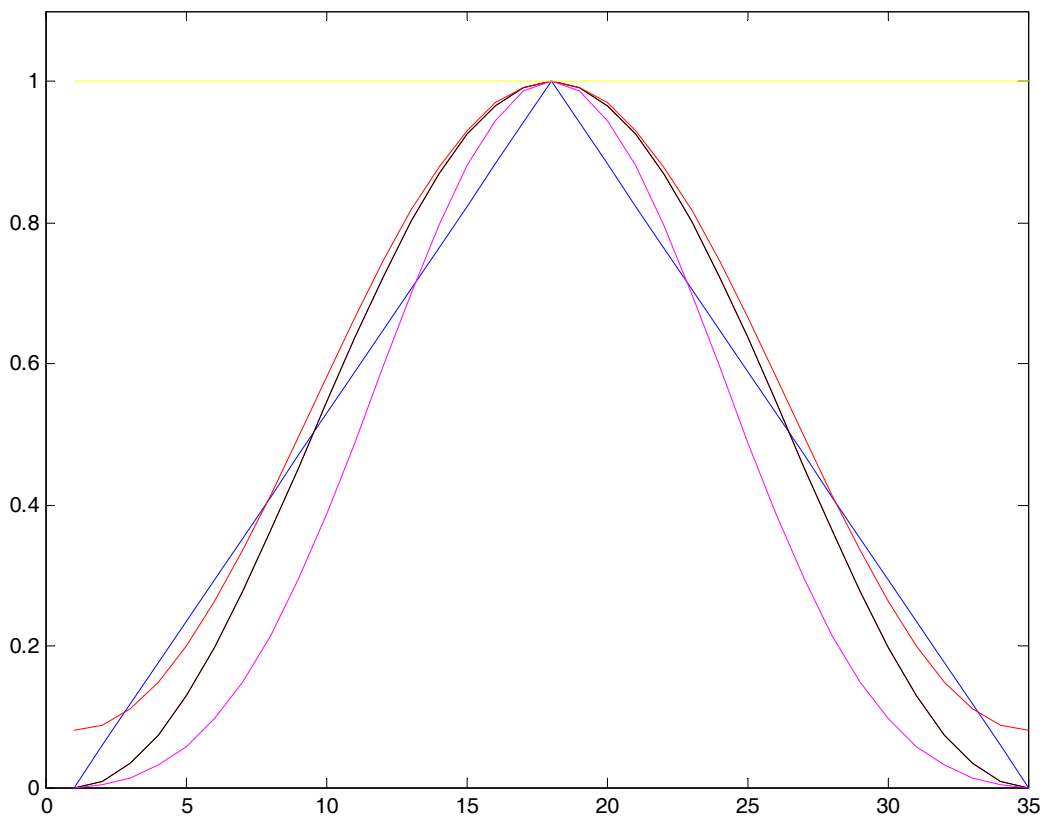
(β) Barlett (τριγωνικό)  $w_{bar}(n) = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \frac{M}{2} < n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(γ) Hanning  $w_{han}(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(δ) Hamming  $w_{ham}(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

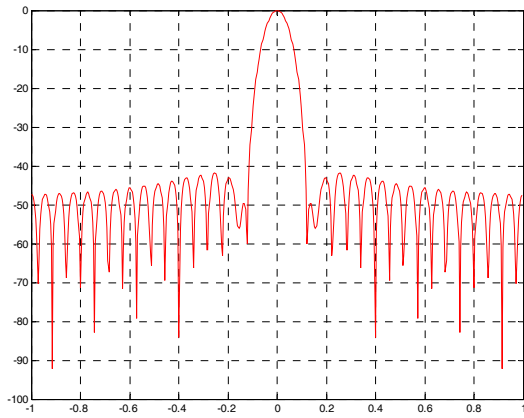
(ε) Blackman  $w_{bla}(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{M}) + 0.08 \cos(4\pi \frac{n}{M}), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

Στο Σχήμα 5 απεικονίζονται τα διάφορα είδη παραθύρων ενώ στο Σχήμα 6 επιδεικνύεται το πλάτος μετασχηματισμού Fourier τους (σε db).

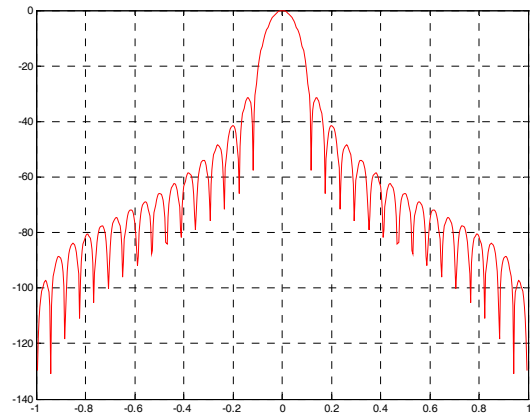


Σχήμα 6: Είδη Παραθύρων (κίτρινο => ορθογωνικό, κόκκινο => hamming, μαύρο => hanning, μπλέ => bartlett, μωβ => blackman)

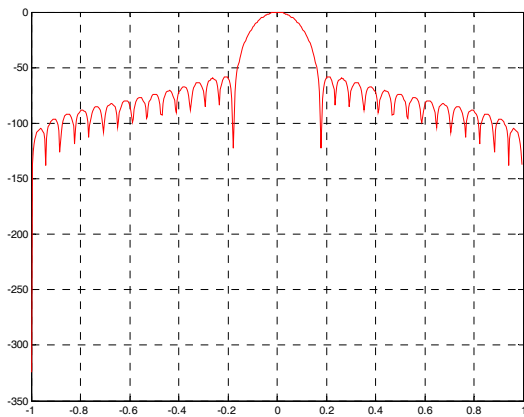




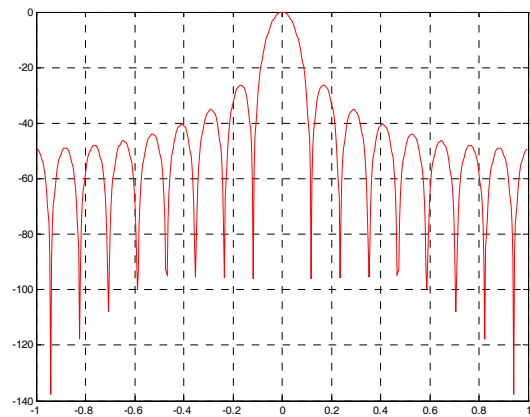
(α)



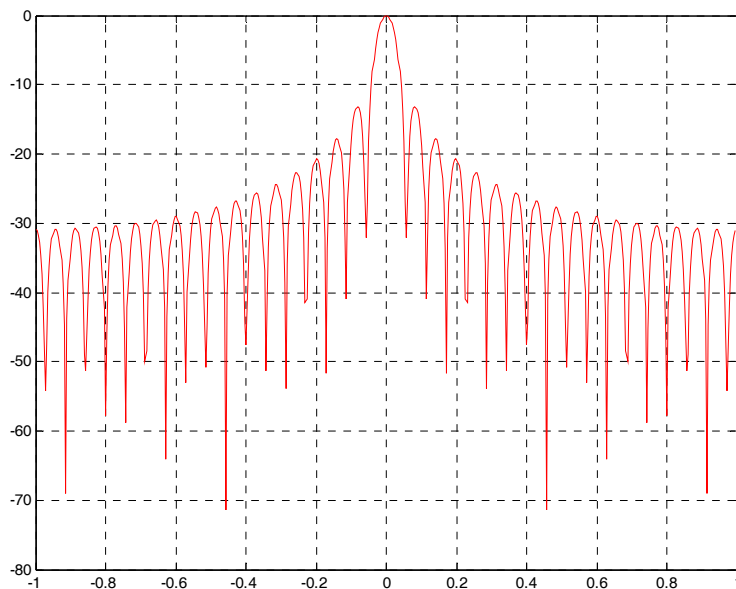
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

Σχήμα 7: Λογαριθμική αναπαράσταση του πλάτους του μετασχηματισμού Fourier για διάφορα είδη παραθύρων (ο οριζόντιος άξονας είναι  $x\pi$ ), (α) Hamming, (β) Hanning, (γ) Blackman, (δ) Bartlett, (ε) Ορθογωνικό.

## 07.4 FIR φίλτρα γραμμικής φάσης

Οποιοδήποτε FIR φίλτρο για το οποίο ισχύει  $h\{n\}=h\{M-n\}$ , δηλαδή η κρουστική του απόκριση είναι συμμετρική ως προς  $M/2$  ( $M$  η τάξη του φίλτρου) έχει (γενικευμένη) γραμμική φάση.

*Σημείωση:* Όταν το  $M$  είναι περιττό ο περιορισμός της γραμμικής φάσης εισάγει ένα μηδενικό στην συχνότητα  $\omega=\pi$ . Επομένως υπερπαρατά φίλτρα μπορούν να σχεδιαστούν μόνο με χρήση άρτιου  $M$ .

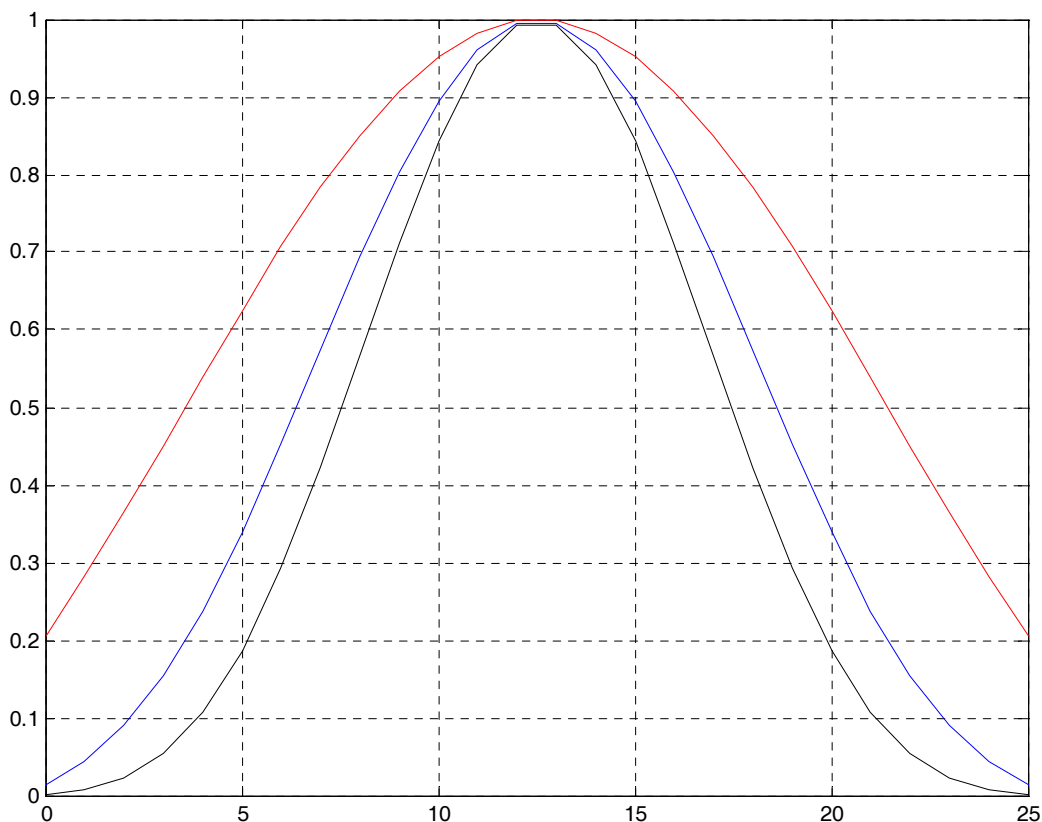
## 07.5 Παράθυρα Kaiser

Τα παράθυρα Kaiser παρέχουν μια σχεδόν βέλτιστη λύση όσον αφορά την συγκέντρωση των συχνοτήτων του μετασχηματισμού Fourier περί την συχνότητα  $\omega=0$ , και χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για την σχεδίαση FIR φίλτρων. Τα παράθυρα Kaiser περιγράφονται από τη σχέση (07.7):

$$w_{kaiser}(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1-\left(\frac{n-a}{a}\right)^2}\right\}}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (07.7)$$

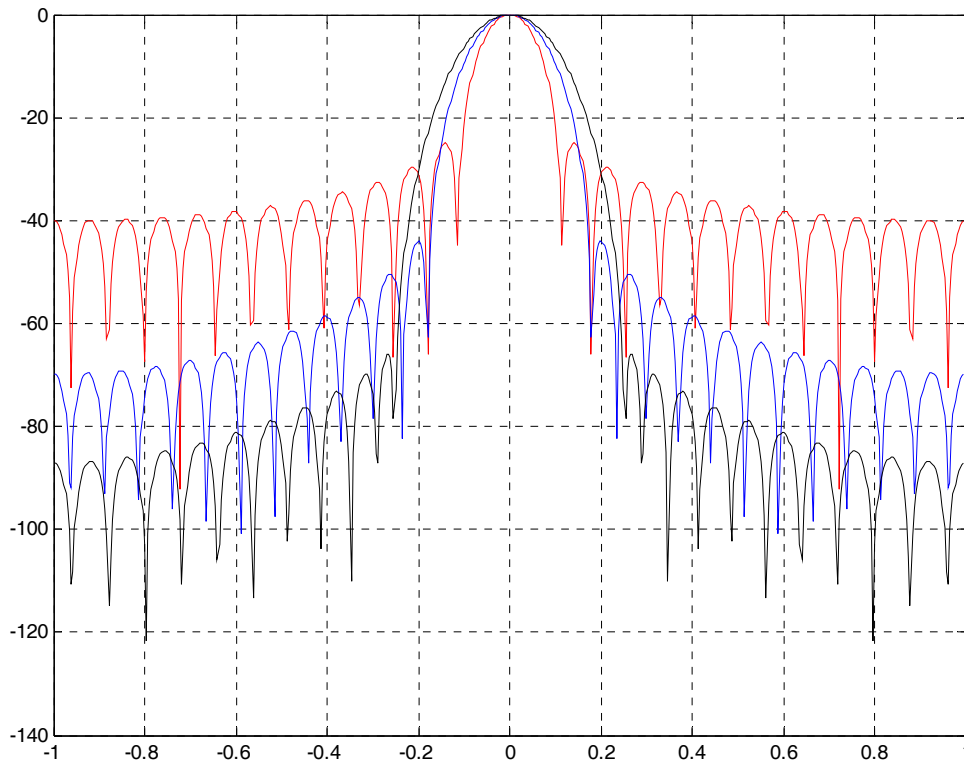
όπου  $a=M/2$ , και  $I_0(\cdot)$  είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Το παράθυρο Kaiser έχει δύο παραμέτρους ( $\beta$ ,  $M$ ). Στο Σχήμα 7 επιδεικνύονται τα παράθυρα Kaiser για  $M=25$  και  $\beta=3,6,9$ .

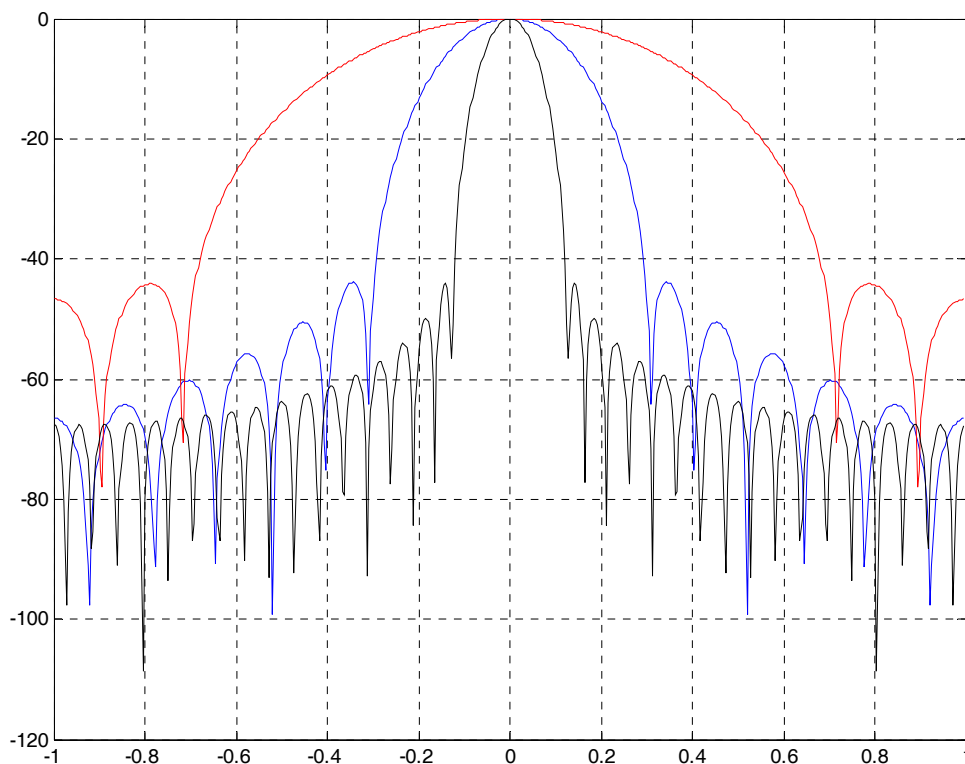


Σχήμα 8: Τα παράθυρα Kaiser για  $M=25$  και  $\beta=3,6,9$

Στο Σχήμα 8 φαίνονται τα πλάτη των μετασχηματισμών Fourier (σε db) για διάφορα παράθυρα Kaiser. Παρατηρούμε ότι με την επιλογή του  $M$  ρυθμίζεται το πλάτος του κεντρικού λοβού ενώ με την επιλογή του  $\beta$  ρυθμίζεται το ύψος των πλευρικών λοβών.



(α)



(β)

Σχήμα 9: Πλάτη των μετασχηματισμών Fourier (σε db) για διάφορα παράθυρα Kaiser, (α)  $M=25$ , κόκκινο  $\Rightarrow \beta=3$ , μπλε  $\Rightarrow \beta=6$ , μαύρο  $\Rightarrow \beta=9$ , (β)  $\beta=6$ , κόκκινο  $\Rightarrow M=7$ , μπλε  $\Rightarrow M=15$ , μαύρο  $\Rightarrow M=35$ .