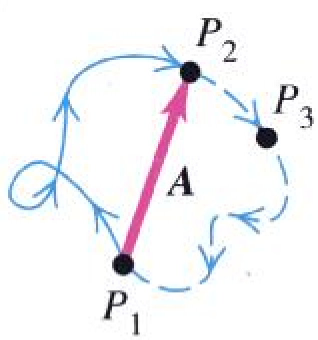
Διανύσματα

1. Διανύσματα – Πρόσθεση Διανυσμάτων

• Φυσική ποσότητα που περιγράφεται μόνο από ένα αριθμό ονομάζεται **βαθμωτή**.

(a)



(b)

•Η **διανυσματική** ποσότητα έχει διεύθυνση, φορά και μέτρο. Δύο διανυσματικές ποσότητες είναι ίσες αν όλα τα στοιχεία τους ταυτίζονται και αντίθετες αν έχουν ίδιο μέτρο και διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά.

• Η απλούστερη διανυσματική ποσότητα είναι η **μετατόπιση**. Μετατόπιση είναι η αλλαγή θέσης ενός σωματίου δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα που κατευθύνεται από το αρχικό προς το τελικό του σημείο.

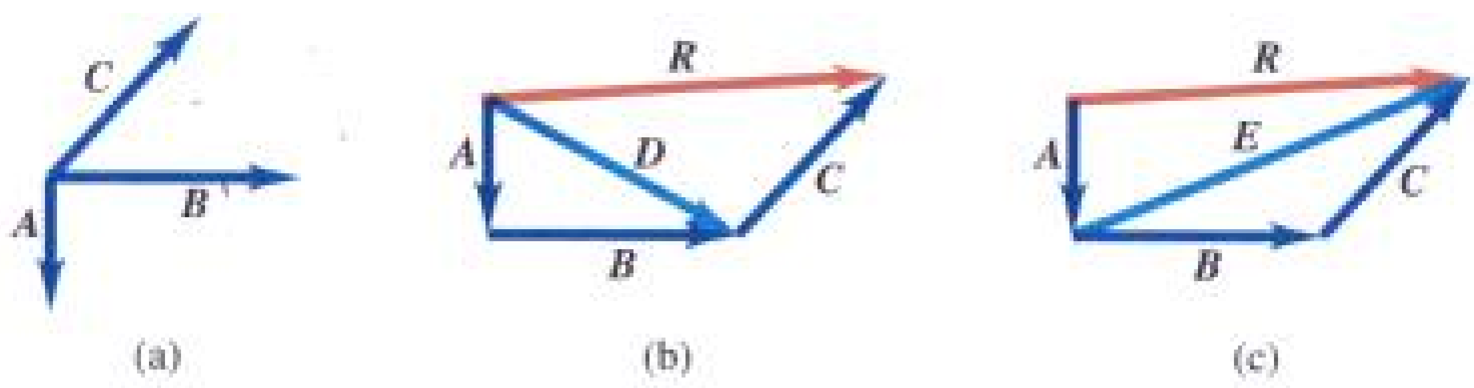
PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

• Το **άθροισμα** διανυσμάτων είναι ένα άνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του δευτέρου (τα προστιθέμενα διανύσματα τοποθετούνται διαδοχικά).

• Στην πρόσθεση διανυσμάτων ισχύει η **μεταθετική** και η **προσετεριστική** ιδιότητα.

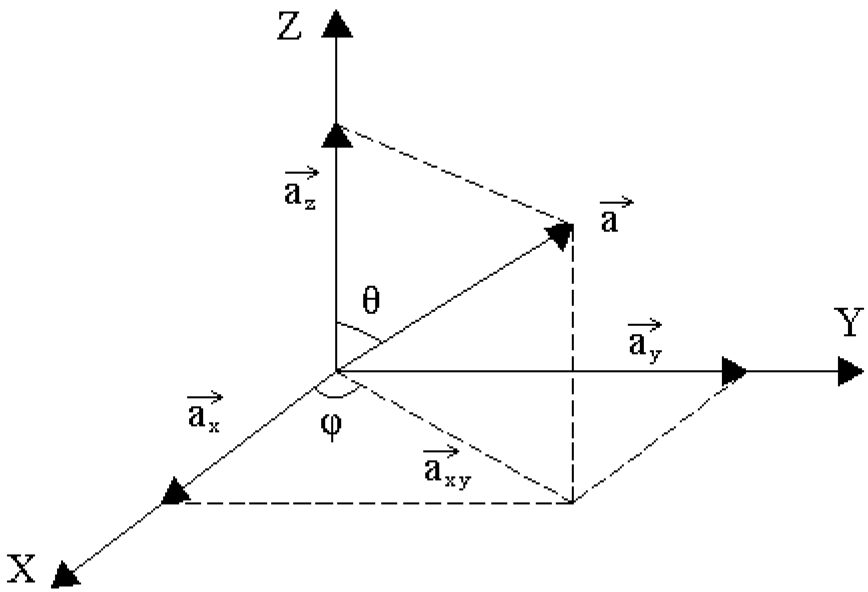
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$$



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

2. Ανάλυση, σύνθεση και πρόσθεση διανυσμάτων στον χώρο.



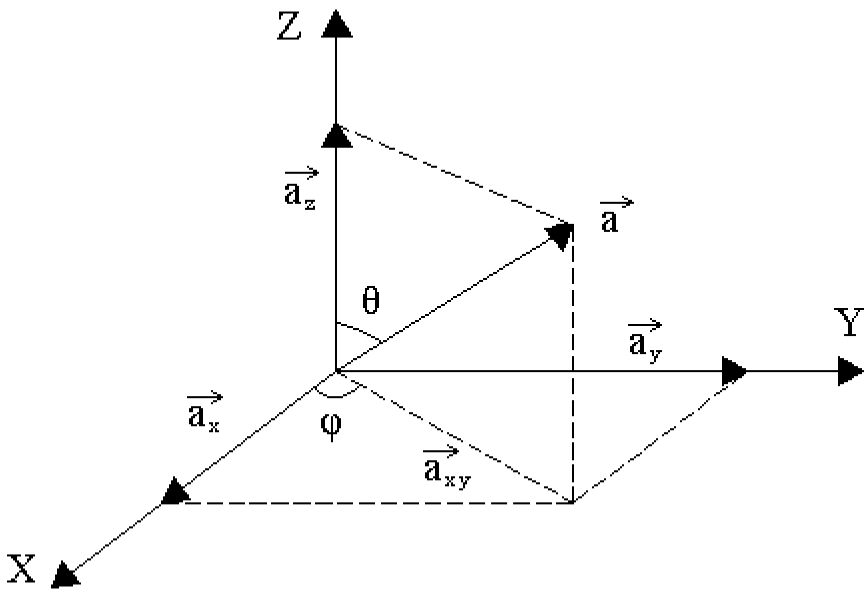
$$a_z = a \cdot \cos q$$

$$a_{xy} = a \cdot \sin q$$

$$\cos f = \frac{a_x}{a_{xy}} \Rightarrow a_x = a \cdot \sin q \cdot \cos f$$

$$\sin f = \frac{a_y}{a_{xy}} \Rightarrow a_y = a \cdot \sin q \cdot \sin f$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com



$$a_{xy} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\cos q = \frac{a_z}{a}$$

$$a = \sqrt{a_{xy}^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\tan f = \frac{a_y}{a_x}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

• Αφού αναλυθούν στους τρεις άξονες όλα τα προστιθέμενα διανύσματα ισχύει:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} a_x^i$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} a_y^i$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} a_z^i$$

Το ολικό άθροισμα R προκύπτει από την σύνθεση των συνιστωσών του.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

3. Μοναδιαία Διανύσματα

Έχουν σκοπό την περιγραφή μιας κατεύθυνσης στον χώρο.

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a}$$

Για κάθε άνυσμα έχουμε:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε άξονα ορίζεται σαν:

$$\vec{i} = \frac{\vec{a}_x}{a_x},\ \vec{j} = \frac{\vec{a}_y}{a_y},\ \vec{k} = \frac{\vec{a}_z}{a_z}$$ και επομένως:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

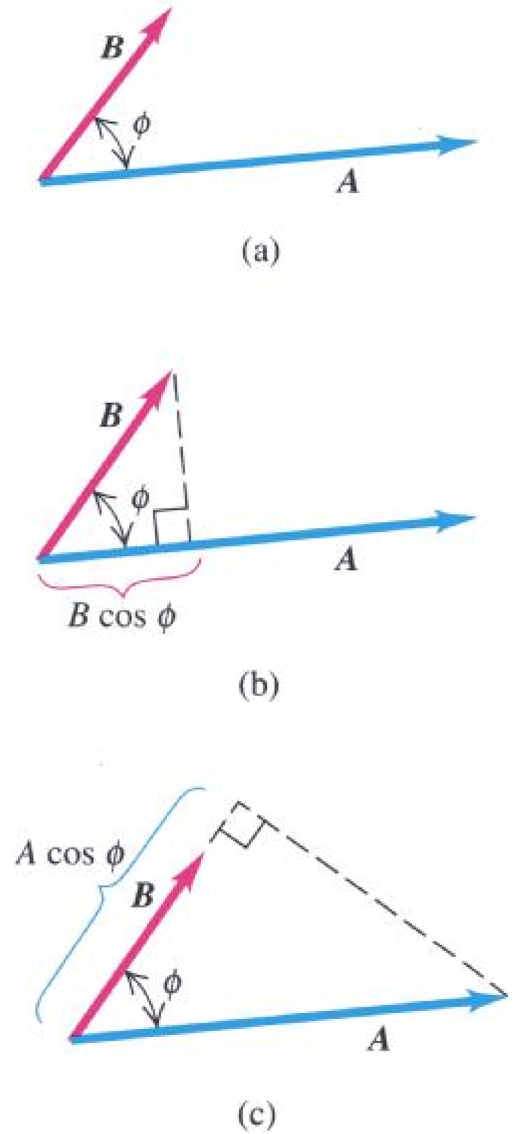
4. Βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cos f$$

Ισούται με το μέτρο του ενός διανύσματος επί το μέτρο της προβολής του άλλου πάνω στο πρώτο.

- Στο βαθμωτό γινόμενο ισχύει η **μεταθετική** ιδιότητα.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

- Από τον ορισμό του βαθμωτού γινομένου ισχύει:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1\cdot 1\cos 0^{0}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=1\cdot 1\cos 90^{0}=0$$

Άρα το βαθμωτό γινόμενο είναι:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})\Rightarrow$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x\cdot B_x+A_y\cdot B_y+A_z\cdot B_z$$

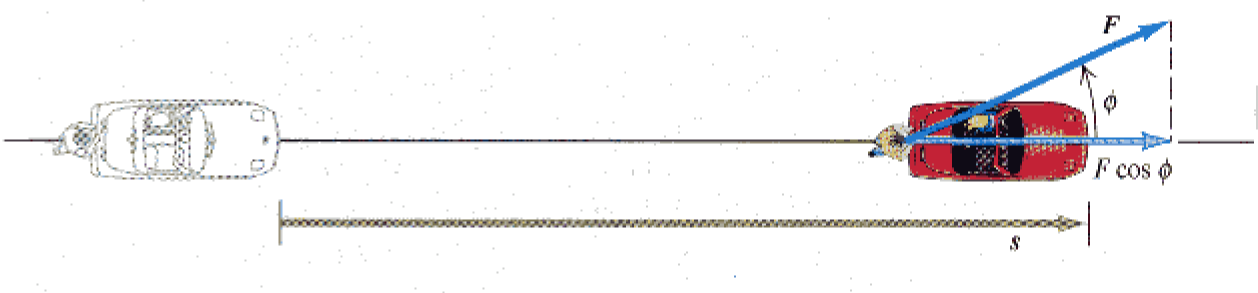
PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

- **Παράδειγμα εσωτερικού γινομένου**:

Για μετατόπιση s σε ευθεία γραμμή με επίδραση σταθερής δυνάμεως F με κατεύθυνση την ίδια γραμμή το έργο που παράγεται επί σώματος είναι:

$$W = Fs$$

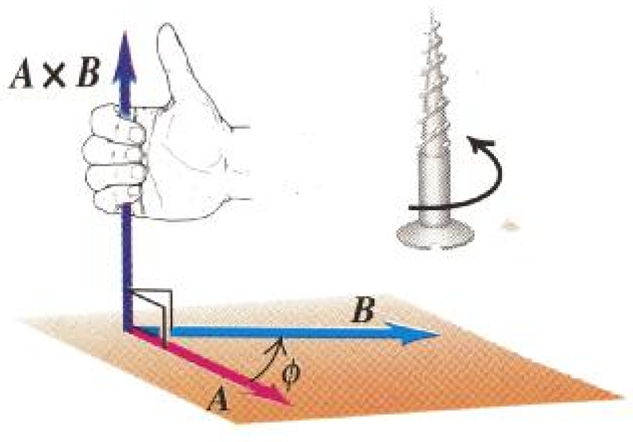
Όταν δύναμη και μετατόπιση έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις, παίρνουμε την συνιστώσα της F στην s:



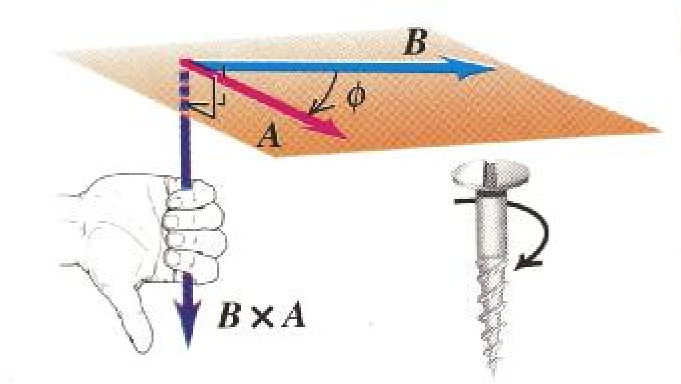
$$W = \left(F\cos f\right)s = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

5. Διανυσματικό γινόμενο διανυσμάτων.



(a)



(b)

- Είναι ένα διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των A, B με μέτρο:

$$C = AB\sin f$$

Η φορά του είναι αυτή του δεξιόστροφου κοχλία ($0^0 \leq φ \leq 180^0$).

- Το διανυσματικό γινόμενο δεν είναι μεταθετικό (b):

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

- Από τον ορισμό του διανυσματικού γινομένου ισχύει:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$$

Άρα το διανυσματικό γινόμενο είναι:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})\Rightarrow$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

$$\vec{A}\times\vec{B}=A_x B_x \vec{i}\times\vec{i}+A_x B_y \vec{i}\times\vec{j}+A_x B_z \vec{i}\times\vec{k}+$$

$$A_y B_x \vec{j}\times\vec{i}+A_y B_y \vec{j}\times\vec{j}+A_y B_z \vec{j}\times\vec{k}+$$

$$A_z B_x \vec{k}\times\vec{i}+A_z B_y \vec{k}\times\vec{j}+A_z B_z \vec{k}\times\vec{k}\Rightarrow$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=A_x B_y \vec{k}-A_x B_z \vec{j}-A_y B_x \vec{k}+$$

$$A_y B_z \vec{i}+A_z B_x \vec{j}-A_z B_y \vec{i}\Rightarrow$$

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=C_x \vec{i}+C_y \vec{j}+C_z \vec{k}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$

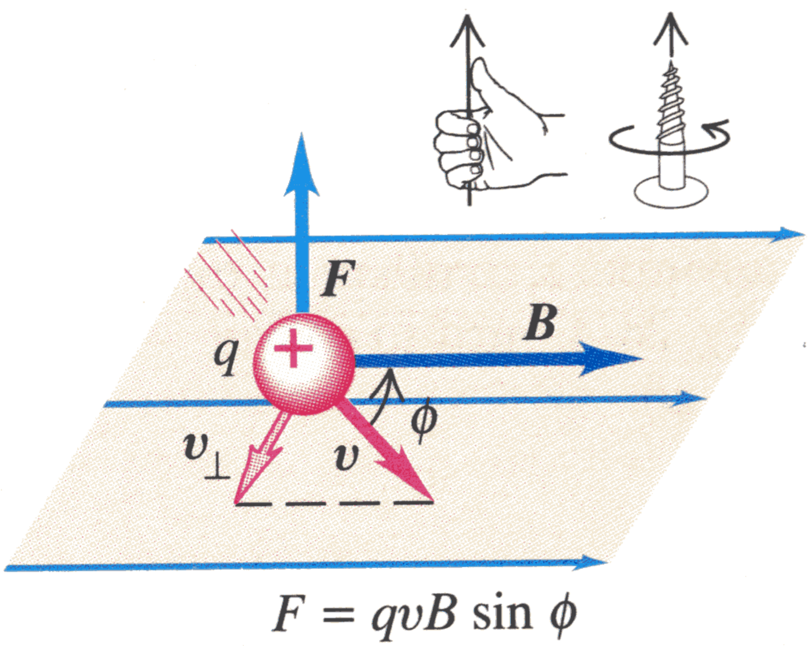
$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

• **Παράδειγμα εξωτερικού γινομένου**:

Το μαγνητικό πεδίο *B* ασκεί δύναμη πάνω σε κάθε κινούμενο φορτίο που βρίσκεται μέσα στο πεδίο. Η δύναμη που ασκείται σε κινούμενο φορτίο είναι:



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$$

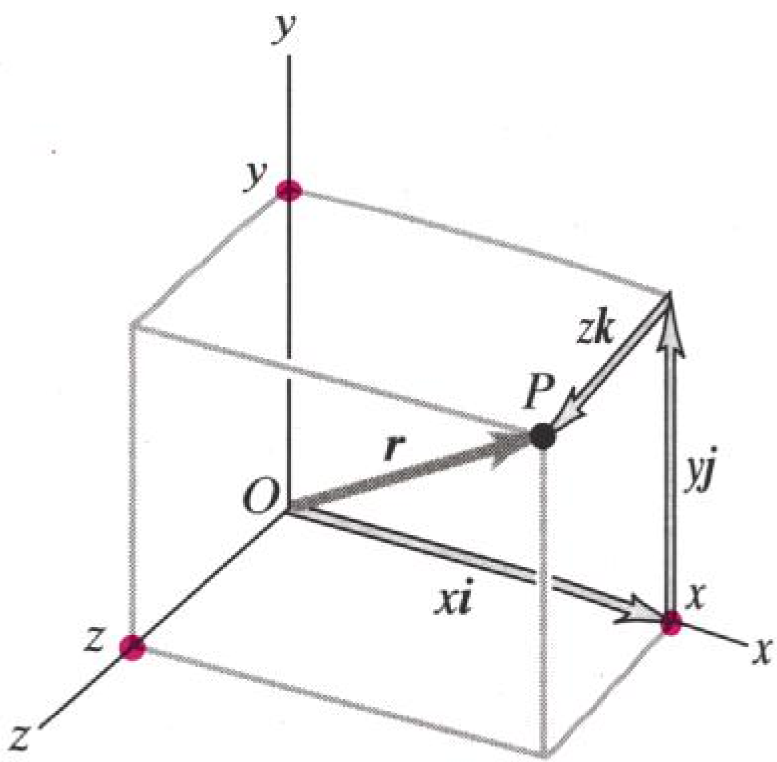
$$F = |q| v_{\perp} B$$

$$F = |q| v B_{\perp}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

6. Παράγωγος Διανυσματικής Συνάρτησης

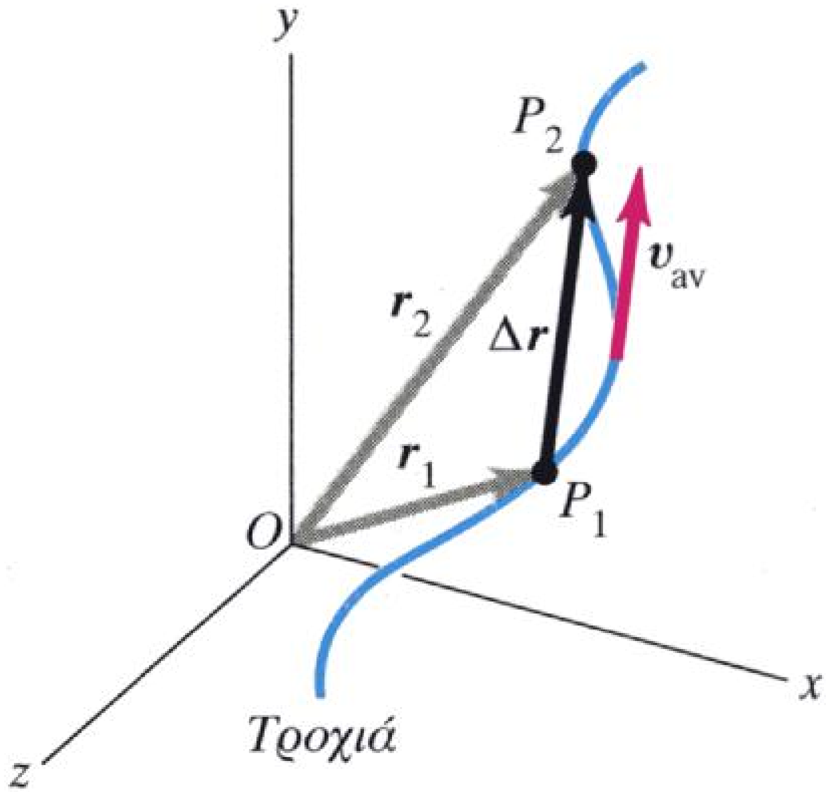
• Έστω διανυσματική συνάρτηση βαθμωτής μεταβλητής και συγκεκριμένα το **διάνυσμα θέσης**.



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

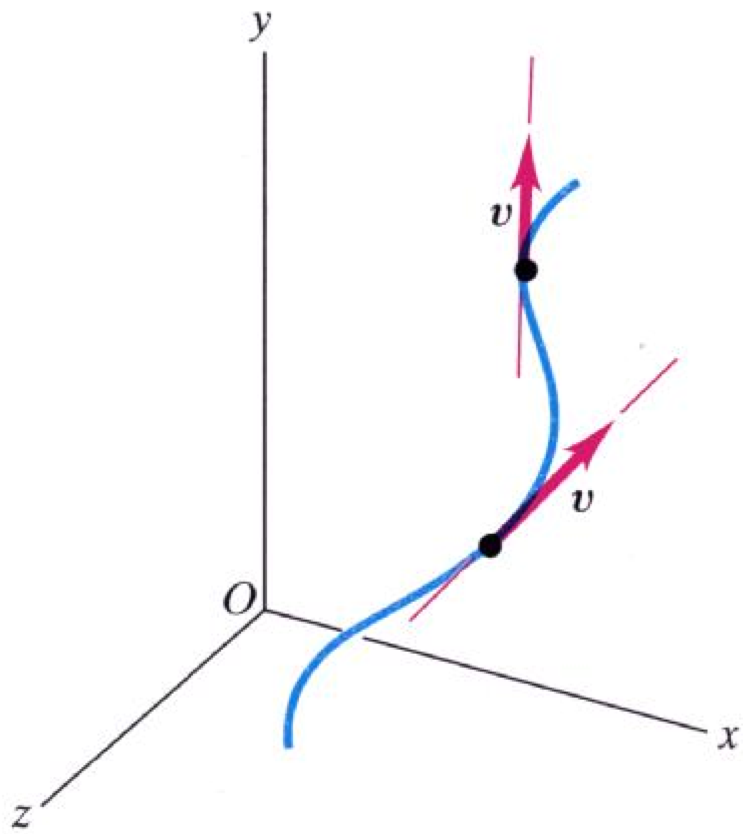
PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

Η μέση ταχύτητα ορίζεται σαν:



$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com



Η παράγωγος της συναρτήσεως *r(t)* ως προς τη μεταβλητή *t* (στιγμιαία ταχύτητα) είναι πάλι μία διανυσματική συνάρτηση του *t*.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Η γεωμετρική παράσταση της παραγώγου είναι ένα διάνυσμα που ορίζεται από την εφαπτομένη στην τροχιά της *r(t)* και περιγράφει την ταχύτητα της κινήσεως κατά μέτρο και φορά.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

• Για την παράγωγο ισχύουν οι εξής κανόνες:

$$\frac{d}{dt}\left(l\,\vec{r}\right)=l\,\frac{d\vec{r}}{dt},\ l\in R$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1+\vec{r}_2\right)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(f\vec{r}\right)=\frac{df}{dt}\vec{r}+\frac{d\vec{r}}{dt}f$$

(φ: βαθμωτή συνάρτηση του t)

$$\frac{d}{dt}\vec{r}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{d\vec{r}}{df}\frac{df}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2\right)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right)=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

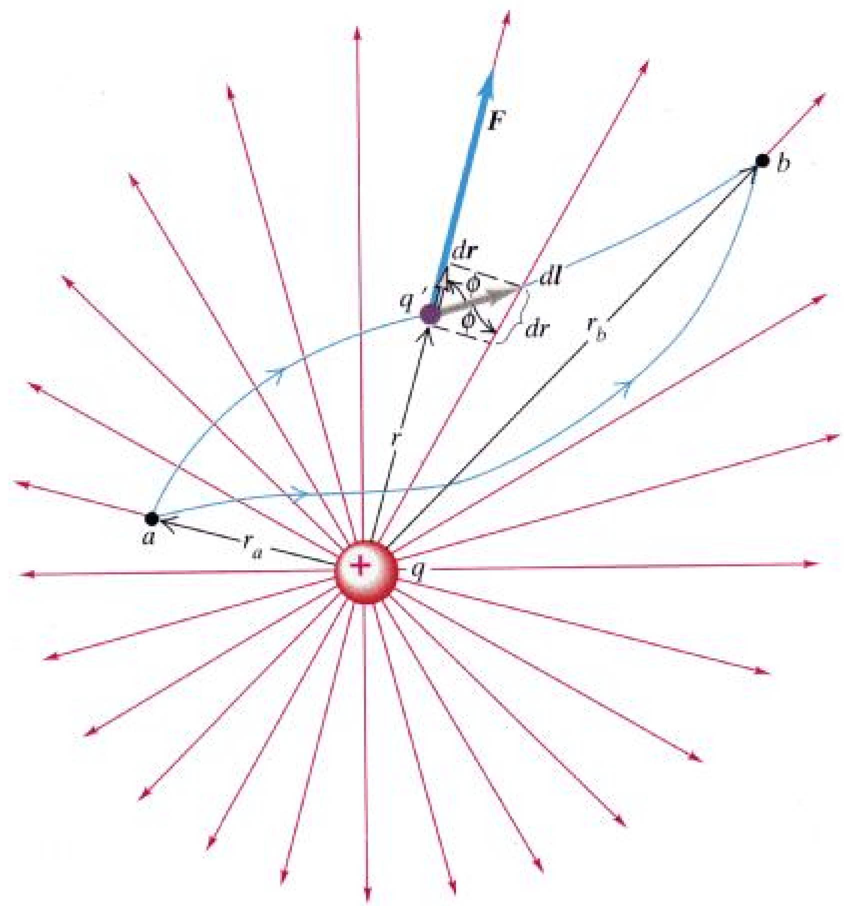
PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

7. Ολοκληρώματα

• Όταν φορτίο κινείται σε ομοιόμορφο ηλεκτροστατικό πεδίο το παραγόμενο έργο είναι:

$$W = Fl \quad h \quad W = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

Στην περίπτωση που το ηλεκτροστατικό πεδίο δεν είναι ομοιόμορφο το παραγόμενο έργο είναι:



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow W = \int_{(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

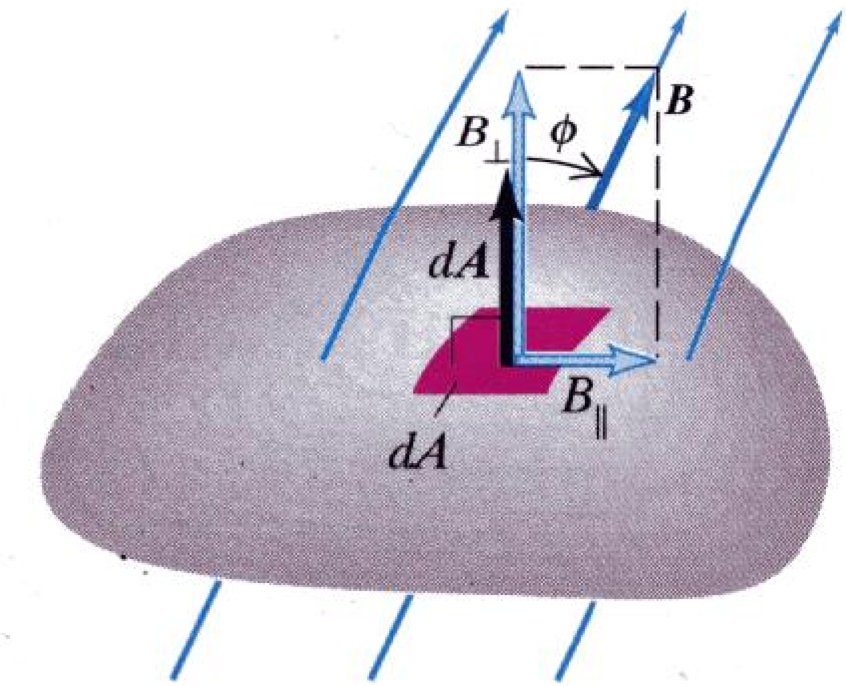
Η πρόσθεση άπειρων μικρών υποδιαιρέσεων ονομάζεται **ολοκλήρωμα** και, στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή πρόκειται για ολοκλήρωση πάνω σε μία καμπύλη, **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

• Η μαγνητική ροή ορίζεται σαν:

$$\Phi_B = B \cdot A \quad h \quad \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομοιόμορφο η μαγνητική ροή είναι:



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_B = \int_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Η πρόσθεση άπειρων μικρών υποδιαιρέσεων ονομάζεται **ολοκλήρωμα** και, στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή πρόκειται για ολοκλήρωση πάνω σε μία επιφάνεια, **επιφανειακό ολοκλήρωμα**.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com