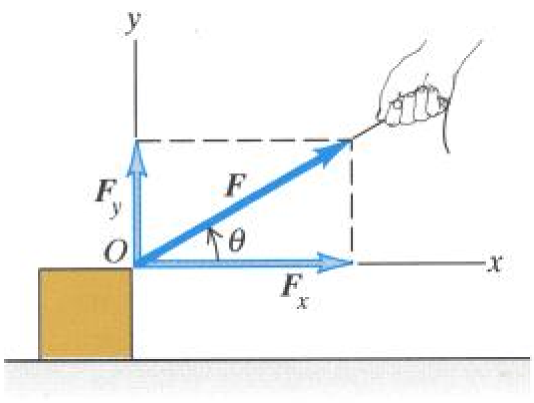
1. Δύναμη

- Η ιδέα της **Δύναμης** δίνει μία ποσοτική περιγραφή της αλληλεπίδρασης
α) μεταξύ δύο σωμάτων
β) μεταξύ ενός σώματος και του περιβάλλοντος του.

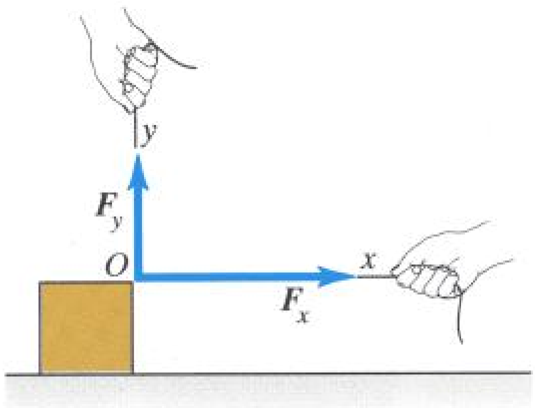
- Υπάρχουν δυνάμεις οι οποίες ασκούνται ακόμη και όταν τα σώματα **διαχωρίζονται** από κενό χώρο
α) βαρύτητα
β) ηλεκτρικές δυνάμεις.

Οι δυνάμεις **επαφής** είναι οι ηλεκτρικές έλξεις και απώσεις των ηλεκτρονίων και των πυρήνων των ατόμων της ύλης.

Ø Επαλληλία Δυνάμεων



(a)



(b)

Αριθμός δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα έχουν το ίδιο αποτέλεσμα με το διανυσματικό τους άθροισμα.

Άρα οποιαδήποτε δύναμη μπορεί να αντικατασταθεί από τις συνιστώσες της.

Ø Στις 2 διαστάσεις

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

Ø Στις 3 διαστάσεις

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}$$

2. Πρώτος Νόμος Νεύτωνα

Ø Ένα σώμα πάνω στο οποίο η συνολική δύναμη είναι **μηδενική** κινείται με **σταθερή διανυσματική ταχύτητα** (μπορεί και μηδενική) και με μηδενική επιτάχυνση.

Ø Η τάση σώματος να διατηρεί την κινητική του κατάσταση οφείλεται στην ιδιότητα της αδράνειας.

Ø Αν ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία αν πάνω του δεν ασκούνται δυνάμεις ή ασκούνται δυνάμεις μηδενικής συνισταμένης.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0$$

Υποθέτω ότι το σώμα περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα σημείο. Αν έχει πεπερασμένο μέγεθος πρέπει να εξετάσουμε σε ποια σημεία ασκούνται οι δυνάμεις (πχ. ζεύγος δυνάμεων).

Ø Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς

α) Στην απογείωση του αεροσκάφους αισθανόμαστε δύναμη στην πλάτη χωρίς να επιταχυνόμαστε ως προς το αεροπλάνο.
β) Στην απογείωση του αεροσκάφους, αν είμαστε στον διάδρομο, επιταχυνόμαστε χωρίς ύπαρξη δυνάμεως.

Άρα ως προς το αεροπλάνο υπάρχει
α) δύναμη χωρίς επιτάχυνση
β) επιτάχυνση χωρίς δύναμη.

Ένα σύστημα αναφοράς για το οποίο ισχύει ο Α νόμος του Νεύτωνα λέγεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς**.
(Η γη κατά προσέγγιση είναι αλλά όχι το αεροσκάφος).

Αν έχουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Α, τότε είναι αδρανειακό και ένα σύστημα Β που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το Α.

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{P/A}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{P/B}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{B/A}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{P/A}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{P/B}}{dt}$$

Άρα αν το P έχει σταθερή ταχύτητα (μηδέν επιτάχυνση) ως προς το σύστημα αναφοράς Α, τότε ισχύει το αυτό ως προς το σύστημα Β.
Άρα αν ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα για το σύστημα αναφοράς Α ισχύει και για το Β.

3. Δεύτερος Νόμος Νεύτωνα

Αν η συνισταμένη δύναμη δεν είναι μηδέν το σώμα επιταχύνεται:
α) αν αρχικά ηρεμούσε αρχίζει να κινείται
β) αν αρχικά κινείται

- το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται
- το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται
- η κατεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλεται

Σε κάθε περίπτωση το σώμα επιταχύνεται.

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι **ανάλογο** με το μέτρο της συνισταμένης δύναμης και η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι **ίδια** με την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της ταχύτητας.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = ma_x \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = ma_y \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = ma_z$$

Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα, τόσο το σώμα αντιστέκεται στο να επιταχυνθεί (ποσοτικό μέτρο της αδράνειας).

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ισχύει μόνο για αδρανειακά συστήματα αναφοράς, όπως συμβαίνει και με τον πρώτο νόμο.

$$1N = 1kg.\frac{m}{\sec^2}$$

4. Μάζα και Βάρος

Το βάρος είναι μία δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα λόγω της έλξης της γης ή άλλου μεγάλου σώματος.

$$\vec{w} = m\vec{g}$$

Η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας κυμαίνεται από 9,78-9,82 m/sec^2 λόγω του ότι:

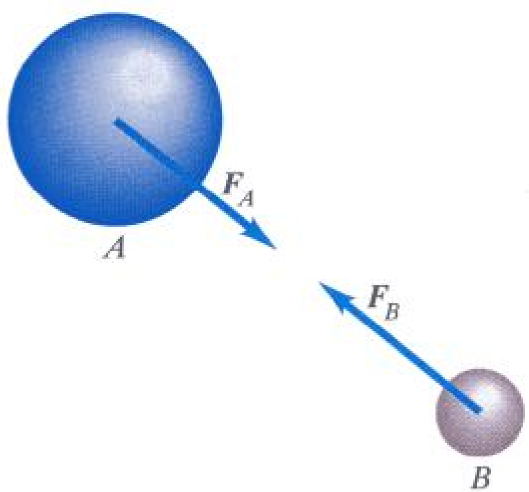
α) η γη δεν είναι τελείως σφαιρική

β) η γη περιστρέφεται

γ) η γη περιφέρεται σε τροχιά.

$$w = G\frac{mm_\Gamma}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{m_\Gamma}{r^2}, \qquad r = R_\Gamma + h$$

5. Τρίτος Νόμος Νεύτωνα



$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A$$

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι πάντα το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του με άλλο σώμα, άρα οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα ανά **ζεύγη**.

Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, οι δύο δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ τους είναι **ίσες** κατά μέτρο και **αντίθετες** σε κατεύθυνση.

Ποτέ δεν ασκούνται στο ίδιο σώμα.

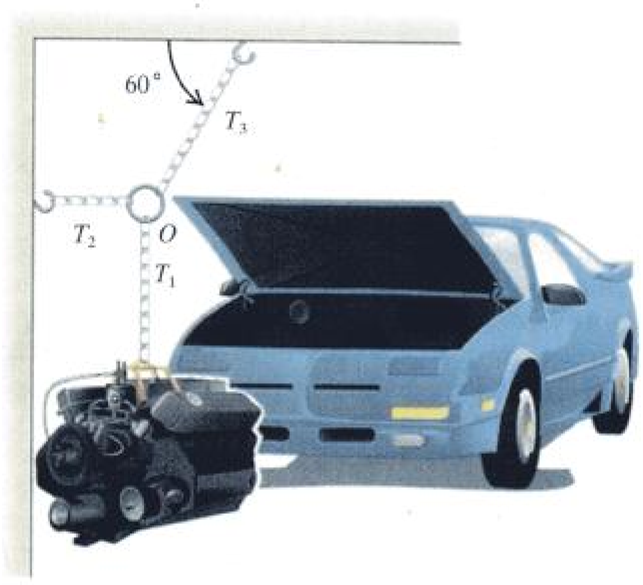
6. Ισορροπία Υλικού Σημείου

- Ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία όταν είναι ακίνητο ή όταν κινείται με σταθερή διανυσματική ταχύτητα ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

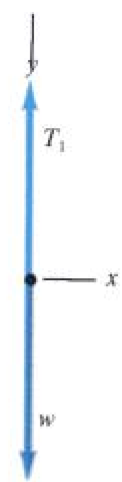
- Εξετάζουμε την ισορροπία στην περίπτωση που το σώμα μπορεί να εξομοιωθεί με σωμάτιο εφαρμόζοντας τον **πρώτο νόμο του Νεύτωνα**.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

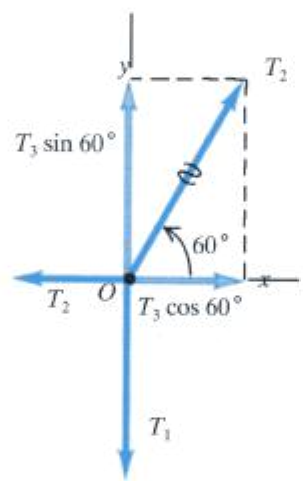
$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0$$



(a)



(b)



(c)

Ø Παράδειγμα: Κινητήρας βάρους w συγκρατείται (a) από σύστημα 3 αλυσίδων αμελητέου βάρους. Βρείτε τις τάσεις στις αλυσίδες.

Από το σχήμα (b) για τον κινητήρα:

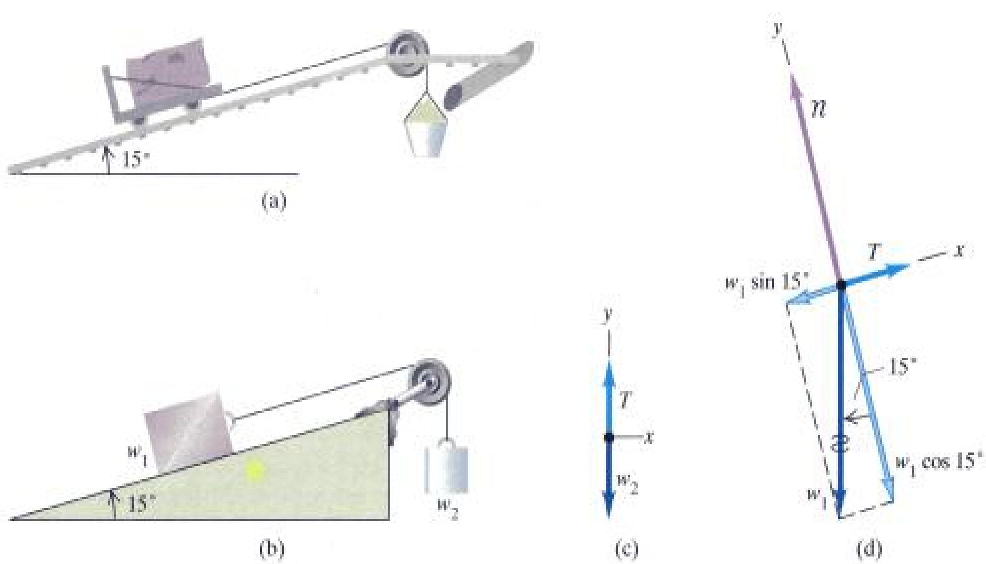
$$T_1 = w$$

Από το σχήμα (c) για τον δακτύλιο:

$$T_1 = T_3 \sin 60^0$$

$$T_2 = T_3 \cos 60^0$$

Ø Παράδειγμα: Κυβόλιθοι ρυμουλκούνται χωρίς τριβές στο σχήμα που ακολουθεί. Προσδιορίστε την σχέση w_1 και w_2 ώστε το σύστημα να κινείται με σταθερή ταχύτητα.



Από το σχήμα (c) για το σώμα w_2

$$T = w_2$$

Από το σχήμα (d) για το σώμα w_1

$$T = w_1 \sin 15^0$$

$$h = w_1 \cos 15^0$$

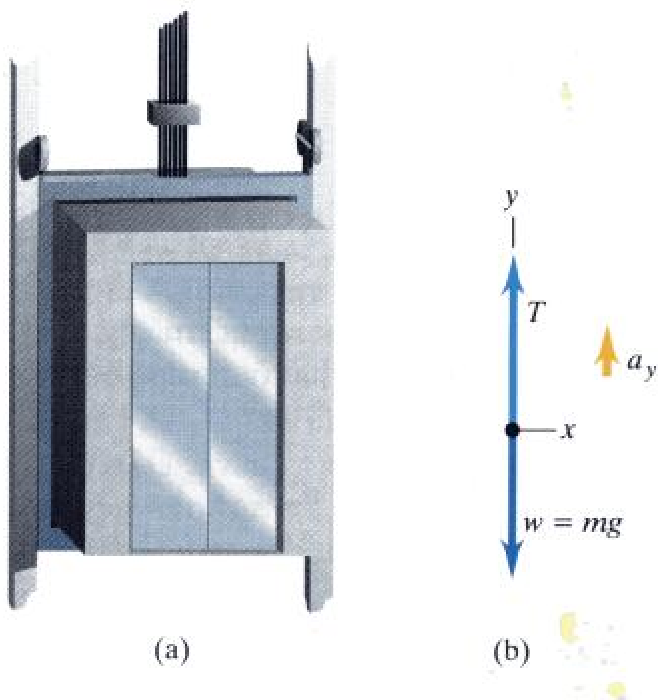
7. Εφαρμογές Δεύτερου Νόμου Νεύτωνα

Προβλήματα δυναμικής σε συστήματα που δεν βρίσκονται σε ισορροπία.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = ma_x \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = ma_y \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = ma_z$$

- Παράδειγμα: Η ολική μάζα του ανελκυστήρα είναι *m=800kg*. Ο ανελκυστήρας αρχικά κινείται προς τα κάτω με *10m/sec* και ακινητεί μετά *25m* σταθερής επιτάχυνσης. Να βρεθεί η τάση *T* του συρματόσχοινου συγκράτησης.



Για υπολογισμό δυνάμεων αρχικά υπολογίζω την σταθερή επιτάχυνση και μετά εφαρμόζω τον Β νόμο του Νεύτωνα.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \Rightarrow$$

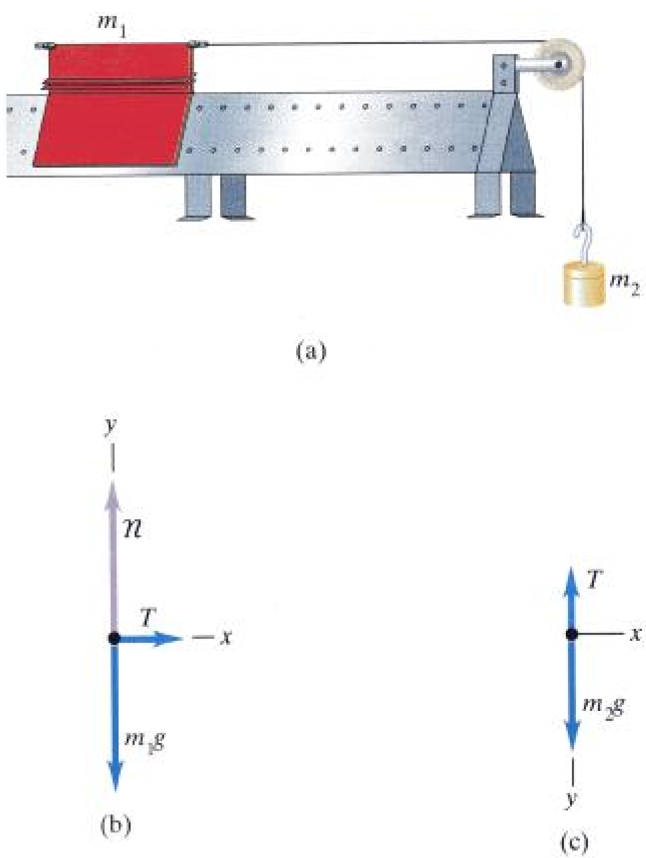
$$0^2 = (-10m/\sec)^2 + 2a_y(-25m) \Rightarrow$$

$$a_y = 2m/\sec^2$$

$$\sum F_y = T - w = ma_y \Rightarrow$$

$$T = mg + ma_y = 9440N$$

Ø Παράδειγμα: Ολισθητής μάζας m_1 κινείται σε αεροτροχιά και συνδέεται με μάζα m_2 με νήμα (δεν υπάρχουν τριβές). Βρείτε τις επιταχύνσεις των σωμάτων και την τάση του νήματος.



Αφού το νήμα δεν έχει μάζα και δεν υπάρχουν τριβές η τάση είναι σταθερή. Συνεπώς (Β νόμος Νεύτωνα):

$$\sum F_x = T = m_1 a_{1x}$$

$$\sum F_y = n - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0$$

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y}$$

$$a_{1x} = a_{2y} = a \qquad a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = m_1 a$$

$$m_2 g - T = m_2 a \qquad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Ø Παράδειγμα: Πέτρα βυθίζεται σε μικρή λίμνη με αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας. Να αναλυθεί η κίνηση.

Αγνοώντας την άνωση ισχύει:

$$W - J = ma \Rightarrow$$

$$mg - kv = ma \Rightarrow$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v - v_1} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v - v_1} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \Rightarrow$$

Για μικρές ταχύτητες J ~ v

Η σταθερά k εξαρτάται από το μέγεθος και το σχήμα της πέτρας και το ρευστό.

Η οριακή ταχύτητα είναι:

$$mg - kv_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{mg}{k}$$

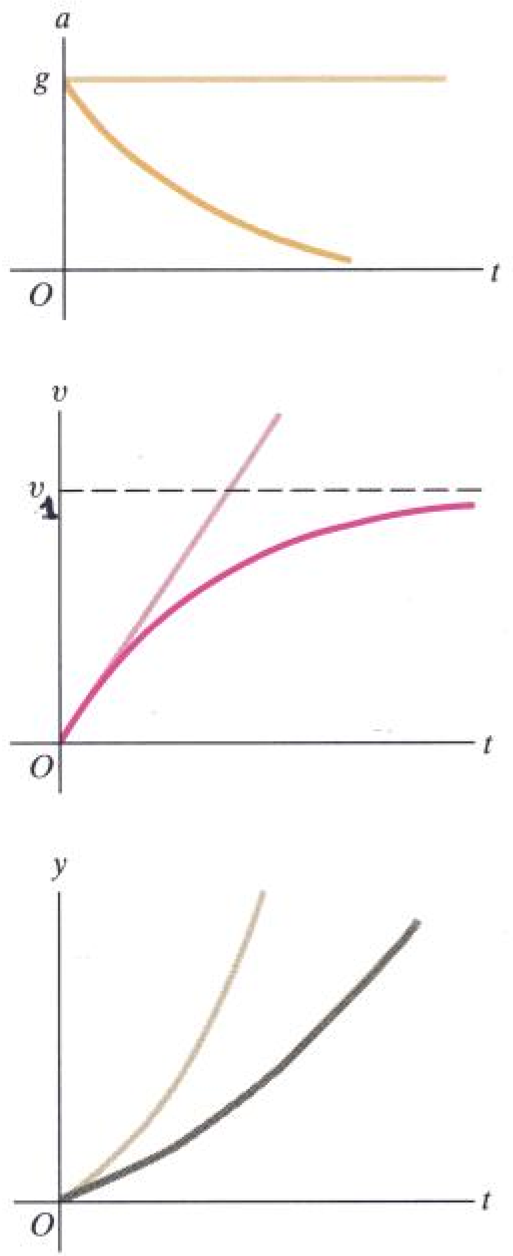
$$\int_0^v \frac{dv}{v-v_1} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{v_1 - v}{v_1} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow 1 - \frac{v}{v_1} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow$$

$$v = v_1\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = ge^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v dt \Rightarrow y = v_1\left[t - \frac{e^{-\frac{k}{m}t}}{-\frac{k}{m}}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$y = v_1\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$$



Αποκλίσεις από την κίνηση χωρίς τριβή (ανοικτό χρώμα).

$$a = ge^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = v_1\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

$$y = v_1\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$$

Ø Παράδειγμα: Πέτρα βυθίζεται σε μικρή λίμνη με αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Να αναλυθεί η κίνηση. (Για μικρές ταχύτητες J ~ v ενώ για μεγάλες J ~ v^2).

Αγνοώντας την άνωση ισχύει:

$$W - J = ma \Rightarrow$$

$$mg - cv^2 = ma \Rightarrow$$

$$m\frac{dv}{dt} = -c\left(v^2 - \frac{mg}{c}\right)$$

$$m\frac{dv}{dt} = -c\left(v^2 - v_1^2\right)$$

Η σταθερά c εξαρτάται από το μέγεθος και το σχήμα της πέτρας και το ρευστό.

Η οριακή ταχύτητα είναι:

$$mg - cv_1{}^2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

$$\frac{dv}{(v-v_1)(v+v_1)}=-\frac{c}{m}dt\Rightarrow\frac{dv}{2v_1(v-v_1)}-\frac{dv}{2v_1(v+v_1)}=-\frac{c}{m}dt$$

$$\frac{1}{2v_1}\left(\ln\frac{v-v_1}{-v_1}-\ln\frac{v+v_1}{v_1}\right)=-\frac{c}{m}t\Rightarrow$$

$$\ln\frac{-v+v_1}{v+v_1}=-\frac{2v_1c}{m}t\Rightarrow\frac{-v+v_1}{v+v_1}=e^{-\frac{2v_1c}{m}t}\Rightarrow$$

$$\frac{-v+v_1}{v+v_1}=e^{-\frac{2v_1c}{m}t}\Rightarrow\frac{-v+v_1}{v+v_1}=e^{-2\sqrt{\frac{gc}{m}}t}\Rightarrow$$

$$v=\frac{v_1\left(1-e^{-2\sqrt{\frac{gc}{m}}t}\right)}{1+e^{-2\sqrt{\frac{gc}{m}}t}}$$

Μαθηματικό Παράρτημα:

$$\frac{1}{(v-v_1)(v+v_1)}=\frac{a}{v-v_1}-\frac{b}{v+v_1}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(v-v_1)(v+v_1)}=\frac{av+av_1+bv-bv_1}{(v-v_1)(v+v_1)}\Rightarrow$$

$$av+bv=0\Rightarrow a=-b$$

$$av_1-bv_1=1\Rightarrow 2av_1=1\Rightarrow a=\frac{1}{2v_1}$$

$$b=-\frac{1}{2v_1}$$

8. Δυνάμεις Επαφής - Τριβή

• Όποτε δύο σώματα αλληλεπιδρούν λόγω επαφής των επιφανειών τους, ονομάζουμε τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης τους **δυνάμεις επαφής**.

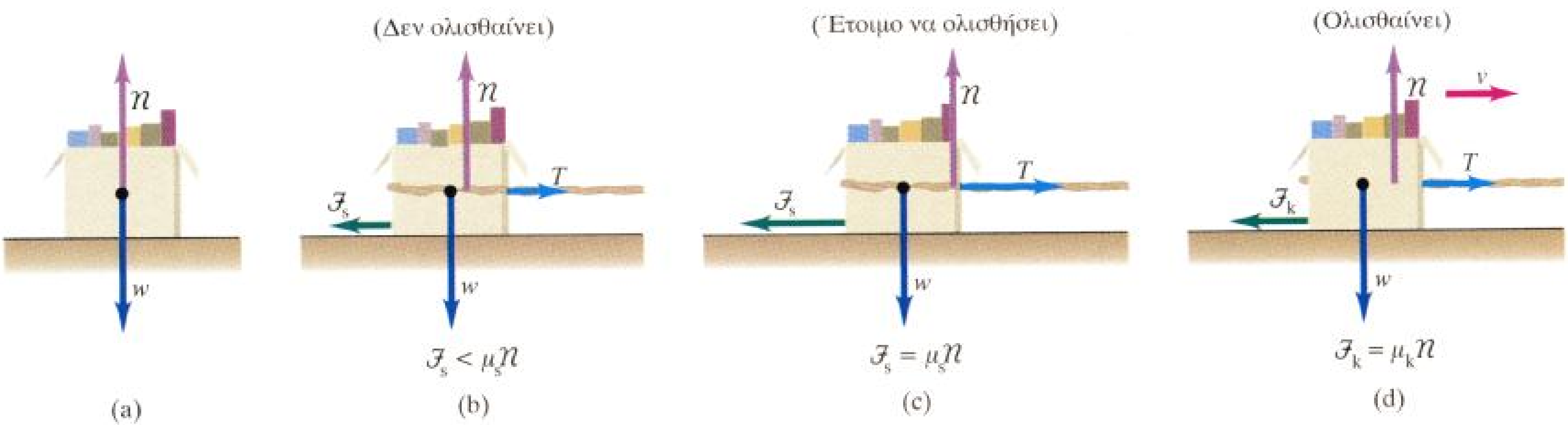
Αν ένα σώμα ακινητεί ή ολισθαίνει μπορούμε να αντικαταστήσουμε την δύναμη επαφής που ασκεί η επιφάνεια με τις συνιστώσες της. Η κάθετη ονομάζεται κάθετη δύναμη (***n***) και η παράλληλη δύναμη τριβής (***J***).

Η τριβή είναι υπεύθυνη για την φθορά των κινητών μερών των μηχανών και δυσχεραίνει την κίνηση των αυτοκινήτων (αντίσταση αέρα). Όμως επιτρέπει στα αλεξίπτωτα να λειτουργούν (αντίσταση αέρα) και επιτρέπει την αλλαγή πορείας στην οδήγηση (τριβή τροχών και οδού).

• Το μέτρο της **τριβής ολισθήσεως** (J_k) είναι περίπου ανάλογο του μέτρου της κάθετης δύναμης (***n***).

$$J_k = m_k \boldsymbol{n}$$

όπου μ_k σταθερά που ονομάζεται συντελεστής κινητικής τριβής. Η εξίσωση αυτή είναι μια προσεγγιστική σχέση σε ένα πολύπλοκο φαινόμενο. Η κάθετη δύναμη (***n***) και η τριβή (***J***) οφείλονται στις διαμοριακές δυνάμεις που είναι ηλεκτρικής φύσης.



• Η τριβή μπορεί να ασκείται και όταν δεν υπάρχει σχετική ταχύτητα. Αυτή λέγεται δύναμη **στατικής τριβής** ($\boldsymbol{J}_s$). Η μέγιστη τιμή της $\boldsymbol{J}_s$ είναι κατά προσέγγιση ανάλογη της κάθετης δύναμης ($\boldsymbol{n}$). Ο συντελεστής αναλογίας μ_s ονομάζεται συντελεστής στατικής τριβής.

$$J_s \leq m_s \boldsymbol{n}$$

Μόλις αρχίσει η ολίσθηση η τριβή ελαττώνεται διότι ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι μικρότερος από τον συντελεστή στατικής τριβής.

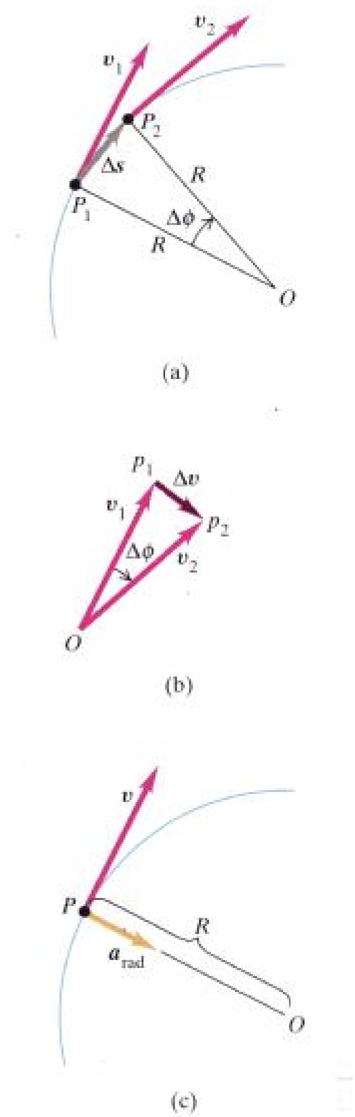
Σε μερικές περιπτώσεις οι επιφάνειες προσκολλώνται (στατική τριβή) και στην συνέχεια ολισθαίνουν (κινητική τριβή). Αυτή είναι η αιτία των ήχων που παράγει η κιμωλία, οι υαλοκαθαριστήρες, το δοξάρι του βιολιού, οι τροχοί στο φρενάρισμα κλπ.

• Για τροχοφόρο όχημα ορίζουμε τον συντελεστή **τριβής κυλίσεως** μ_r που ισούται με το πηλίκο της οριζόντιας δύναμης που απαιτείται για μετακίνηση σε επίπεδη επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα, δια της κάθετης δύναμης προς τα πάνω που ασκείται από την επιφάνεια στους τροχούς.

$$J_r = m_r n$$

Τα οχήματα υφίστανται επιπλέον την αντίσταση του αέρα, η οποία συνήθως αυξάνεται ανάλογα προς το τετράγωνο της ταχύτητας.

9. Δυναμική της Κυκλικής Κίνησης



Όταν σωμάτιο κινείται σε κυκλική τροχιά με σταθερή σε μέτρο ταχύτητα η επιτάχυνσή του κατευθύνεται προς το κέντρο του κύκλου (⊥ στην ταχύτητα). Το μέτρο της είναι:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{4p^2 R}{T^2} = 4p^2 n^2 R$$

$$\left(T = \frac{2pR}{v} \right)$$

$$F_{rad} = m a_{rad}$$

10. Δυνάμεις στη Φύση

• Οι **βαρυτικές αλληλεπιδράσεις** προσδιορίζουν σχεδόν αποκλειστικά την κίνηση των πλανητών καθώς και την εσωτερική δομή των αστέρων.

• Οι **ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις** δομούν τα άτομα και τα μόρια, είναι δε οι δυνάμεις συνοχής των στερεών, των υγρών ή των αερίων.

• Η **ισχυρή αλληλεπίδραση** είναι υπεύθυνη για την συνοχή και την σταθερότητα του πυρήνα του ατόμου.

• Η **ασθενής αλληλεπίδραση** είναι υπεύθυνη για την διάσπαση β. Πρόκειται για την εκπομπή ηλεκτρονίου (σωμάτιο β) από ραδιενεργό πυρήνα, με την μετατροπή νετρονίου σε πρωτόνιο, ηλεκτρόνιο και αντινετρίνο.