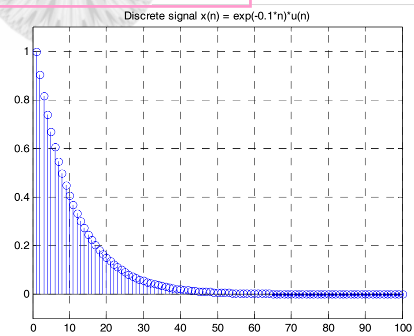
ΒΕΣ 06 – Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Θεωρία Στοχαστικών Σημάτων: Στοχαστικές διεργασίες, Περιγραφή εργοδικών στοχαστικών διεργασιών

Βιβλιογραφία Ενότητας

- *Benvenuto [2002]: Κεφάλαιο 1*
- *Widrow [1985]: Chapter 1*
- *Haykin [2001]: Chapter 2*
- *Sayed [2003]: Chapter 1*
- *Boroujeny [1999]: Chapter 1*

Εισαγωγή



Για τα περισσότερα σήματα που απαντώνται στην πράξη δεν μπορεί να υπάρξει επακριβής μαθηματική περιγραφή.

- Ένα διακριτό σήμα για το οποίο υπάρχει μαθηματική περιγραφή είναι το $x(n) = e^{-0.1n}u(n)$ (*u(n) είναι η βηματική ακολουθία*)
- Πως μπορεί όμως να περιγραφεί μαθηματικά το σήμα ενός καρδιογραφήματος ή της ομιλίας;

- Όταν ένα σήμα δεν μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά και παίρνει διάφορες μορφές (το σήμα ομιλίας διαφέρει από ομιλητή σε ομιλητή και ανάλογα με το τι λέει ο ομιλητής) το αντιμετωπίζουμε ως τυχαίο (στοχαστικό) με στατιστικές μεθόδους

Στοχαστικές διεργασίες

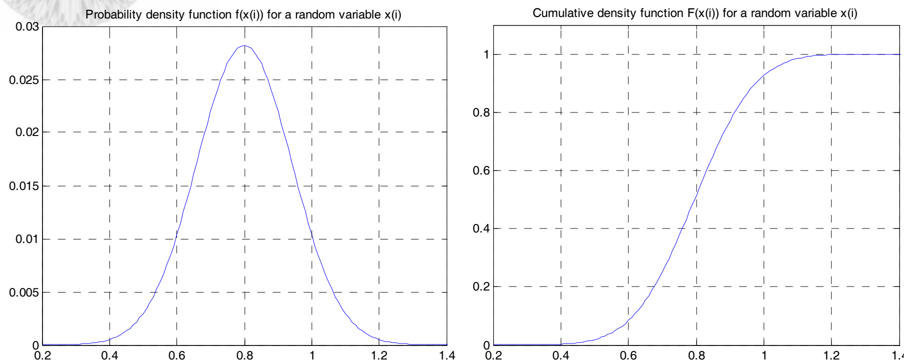
- Ένα *στοχαστικό διακριτό σήμα* X(n) = {x(0) x(1) … x(n)} (περισσότερο συχνά αποκαλούμενο *στοχαστική διεργασία*) είναι ένα σύνολο από τυχαίες μεταβλητές x(i) (*i* = 1…n) οι οποίες είναι εν γένει αλληλοεξαρτώμενες.
  - Ένα διακριτό σήμα του οποίου τα δείγματα μπορούν να πάρουν τυχαίες τιμές είναι μια στοχαστική διεργασία

- Κάθε τυχαία μεταβλητή x(i) χαρακτηρίζεται από μια *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x(i))* και τη *αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας F(x(i))* οι οποίες σχετίζονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$f(x(i)) = \frac{\partial F(x(i))}{\partial x(i)} \qquad F(x(i)) = p(X_i \le x(i)) = \int_{-\infty}^{x(i)} f(y(i))dy(i)$$

όπου $p(X_i \le x(i))$ είναι η πιθανότητα το X_i να πάρει τιμή μικρότερη ή ίση με την *x(i)*

Τυχαίες μεταβλητές



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (αριστερά) και αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας (δεξιά) για μια τυχαία μεταβλητή x(i).

Η συγκεκριμένη τυχαία μεταβλητή ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή *μ(x(i))* = 0.8 και τυπική απόκλιση *σ(x(i))* = 0.14

Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

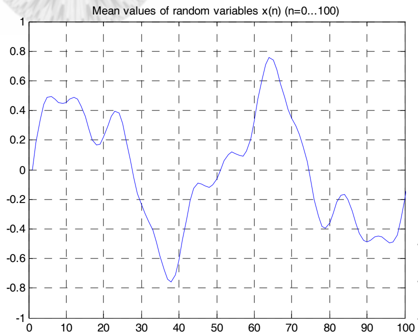
- Σε μια στοχαστική διεργασία X(n) = {x(0) x(1) … x(n)} οι τυχαίες μεταβλητές (δείγματα) *x*(*i*), δεν είναι (εν γένει) μεταξύ τους ανεξάρτητες αλλά σχετίζονται με την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας *f(x(0), x(1), …, x(n))* και την από κοινού αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας *F(x(0), x(1), …, x(n))*

$$F(x(0), x(1), \ldots, x(n)) = p(X_0 \leq x(0), X_1 \leq x(1), \ldots, X_n \leq x(n))$$

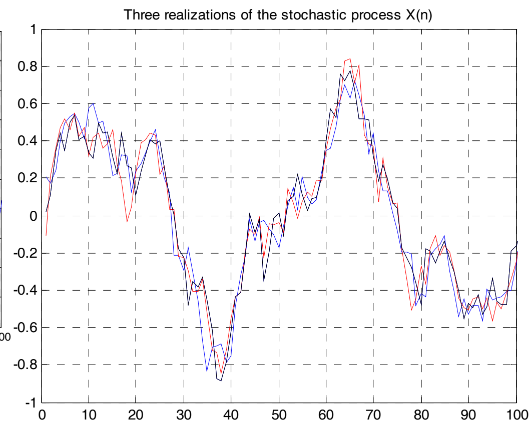
$$f(x(0), x(1), \ldots, x(n)) = \frac{\partial^n F(x(0), x(1), \ldots, x(n))}{\partial x(0) \partial x(1) \ldots \partial x(n)}$$

- Το σήμα $X_r(n) = \{x(0) = X_0, x(1) = X_1, \ldots, x(n) = X_n\}$ αποτελεί μια πραγμάτωση (*r = realization)* της στοχαστικής διεργασίας X(n)
- Για παράδειγμα τα δείγματα ενός τμήματος ομιλίας αποτελούν μια πραγμάτωση της στοχαστικής διεργασίας «ομιλία»

Πραγματώσεις στοχαστικών διεργασιών



Μέσες τιμές των τυχαίων x(i) μεταβλητών μιας στοχαστικής διεργασίας X(n) (ή αλλιώς *συνάρτηση μέσης τιμής της διεργασίας X(n)*)



Τρεις πραγματώσεις της στοχαστικής διεργασίας X(n)

Περιγραφή στοχαστικών διεργασιών

- Μια στοχαστική διεργασία X(n) μπορεί να περιγραφεί σε ικανό βαθμό με τη βοήθεια τριών συναρτήσεων:
  - Της συνάρτησης μέσης τιμής
    μ(n) = E[X(n)] (E[·] δηλώνει την αναμενόμενη τιμή)
  - Της συνάρτησης αυτοσυχέτισης
    r(n,n-k) = E[X(n)X*(n-k)], k = 0,±1, ±2,… (* δηλώνει μιγαδικό συζυγή)
  - Της συνάρτησης αυτοσυμμεταβλητότητας
    c(n,n-k) = E[(X(n)-μ(n))(X(n-k)-μ(n-κ))*], k = 0,±1, ±2,…

Στάσιμες Στοχαστικές Διεργασίες

- Μια στοχαστική διεργασία X(n) είναι στάσιμη όταν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Δηλαδή:
  f(x(0), x(1), …, x(n)) = f(x(0+k), x(1+k), …, x(n+k))
  για n = 0,1,… και $\forall k$

- Μια στοχαστική διεργασία X(n) είναι υπό την ευρεία έννοια στάσιμη όταν οι συναρτήσεις μέσης τιμής, αυτοσυσχέτισης και αυτοσυμμεταβλητότητας έχουν τη μορφή:
  - μ(n) = μ $\forall n$
  - r(n,n-k) = r(k) $\forall n$
  - c(n,n-k) = c(k) $\forall n$

  - Για μια στάσιμη υπό την ευρεία έννοια διεργασία η ποσότητα $r(0) = E[|x(n)|^2]$ ισούται με τη μέση τετραγωνική τιμή της διεργασίας και η ποσότητα $c(0) = E[|x(n) - \mu(n)|^2]$ ισούται με τη διασπορά της διεργασίας

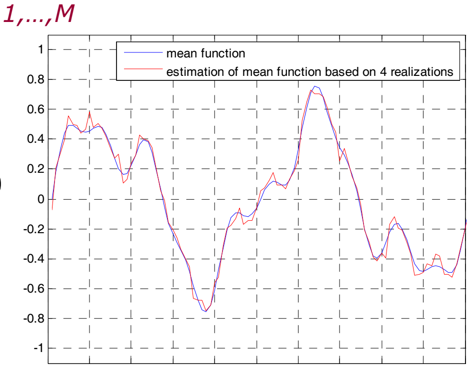
Εκτίμηση συναρτήσεων μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης

- Οι συναρτήσεις μέσης τιμής μ(n) και αυτοσυσχέτισης r(n,n-k) μιας στοχαστικής διαδικασίας X(n) βασίζονται στον τελεστή E[·] ο οποίος δηλώνει αναμενόμενη τιμή. Επομένως για την εκτίμηση τους χρειαζόμαστε ένα σύνολο από πραγματώσεις
  $X_r(n)=\{x_r(0),x_r(1),..,x_r(n)\}$, $r = 1,…,M$

$$\mu(n) = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} X_r(n)$$

$$r(n,n-k) = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} x_r(n) x_r^*(n-k)$$

για n = 0,1,…



Εκτίμηση συναρτήσεων μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης (ΙΙ)

- Για μια υπό την ευρεία έννοια στάσιμη διεργασία X(n) οι συναρτήσεις της μέσης τιμής μ(n) (η οποία είναι σταθερή και ίση με μ) και της αυτοσυσχέτισης r(k) μπορούν να υπολογιστούν από μία και μόνο πραγμάτωση $X_r(n) = \{x_r(0)\ x_r(1) \ldots x_r(n)\}$ βασιζόμενη σε χρονικούς μέσους όρους:

$\hat{\mu}(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_r(n-i)$ *: εκτίμηση της συνάρτησης μέσης τιμής με N δείγματα*

$\hat{r}(k,N) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_r(n-i)x_r(n-i-k)$ 0≤k ≤N-1 *: εκτίμηση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης με N δείγματα*

Εργοδικές Στοχαστικές Διεργασίες

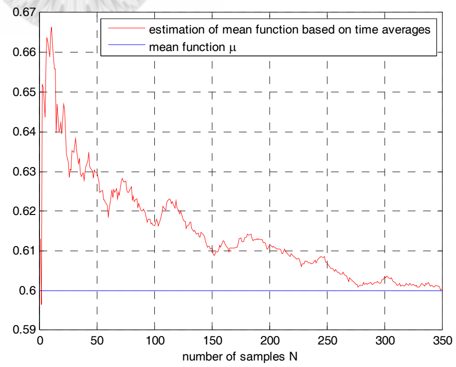
- Μια υπό την ευρεία έννοια στάσιμη στοχαστική διεργασία X(n) είναι εργοδική όταν οι συναρτήσεις μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης μπορούν να εκτιμηθούν από μια πραγμάτωση $X_r(n) = \{x_r(0)\ x_r(1) \ldots x_r(n)\}$ βασιζόμενη σε χρονικούς μέσους όρους.
- Συγκεκριμένα για να είναι η X(n) εργοδική κατά μέση τιμή πρέπει:

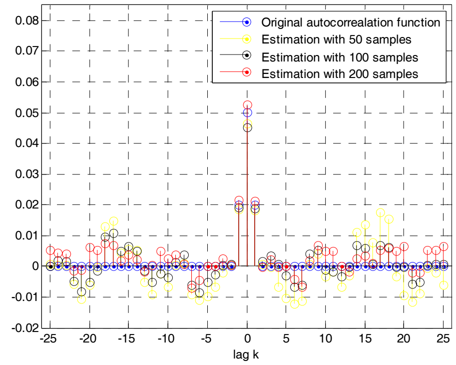
$$\lim_{N\to\infty}\left[\left(\mu - \hat{\mu}(N)\right)^2\right] = 0$$

- Για να είναι η X(n) εργοδική κατά αυτοσυσχέτιση πρέπει:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\left(r(k) - \hat{r}(k,N)\right)^2\right] = 0, \qquad 0 \le k \le M << N$$

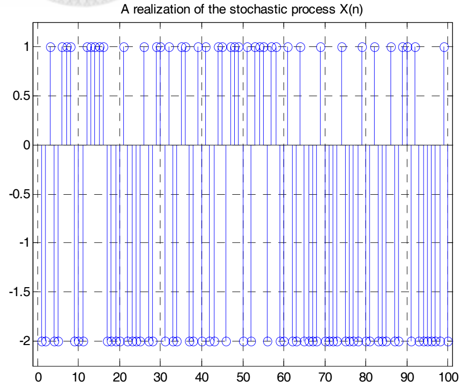
Εργοδικές Στοχαστικές Διεργασίες (ΙΙ)





Εκτίμηση συναρτήσεων μέσης τιμής (αριστερά) και αυτοσυσχέτισης (δεξιά) μιας στάσιμης εργοδικής στοχαστικής διεργασίας X(n) με βάση μια πραγμάτωση

Άσκηση (Ι)



1. Μια τυχαία μεταβλητή x(n) έχει αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας:

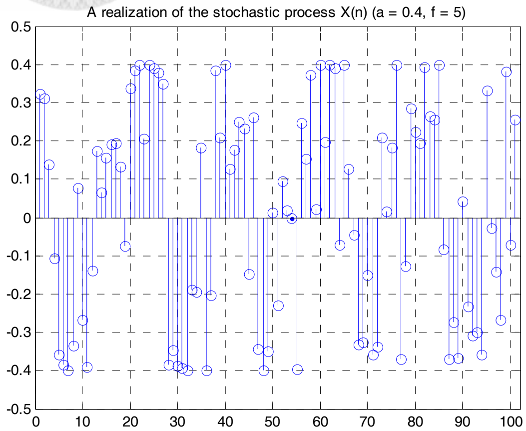
$$F(x(n)) == \begin{cases} 0 & x(n) < -2 \\ 0.6 & -2 \le x(n) < 1 \\ 1 & x(n) \ge 1 \end{cases}$$

- Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x(n))

Μια στοχαστική διεργασία X(n) απαρτίζεται από τυχαίες μεταβλητές x(i) οι οποίες ακολουθούν την ανωτέρω κατανομή (βλέπε σχήμα).

- Να βρεθεί η συνάρτηση μέσης τιμής της ανωτέρω διεργασίας
- Να δειχθεί ότι η ανωτέρω διεργασία είναι εργοδική κατά μέση τιμή

Άσκηση (ΙΙ)



1. Μια στοχαστική διεργασία X(n) απαρτίζεται από τυχαίες μεταβλητές $x(i) = a\sin(2\pi f i + \theta)$ όπου *a* και *f* είναι γνωστές τιμές και *θ* είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [-π π]
   - Να βρεθούν οι συναρτήσεις μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης της ανωτέρω διεργασίας και να δειχθεί ότι είναι υπό την ευρεία έννοια στάσιμη

Πίνακας αυτοσυσχέτισης

- Στη πράξη όταν μελετάμε στοχαστικά σήματα (διεργασίες) αυτό που καταγράφουμε είναι ένα μέρος (απαρτιζόμενο από Μ δείγματα) μιας πραγμάτωσης της διαδικασίας, το οποίο ονομάζουμε διάνυσμα παρατήρησης και το συμβολίζουμε με **u**(n).
  - **u**(n) = [u(n) u(n-1) … u(n-M+1)]^T
    (T δηλώνει το ανάστροφο ενός διανύσματος ή πίνακα).

- Ορίζουμε ως πίνακα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{R}_u$ της στοχαστικής διαδικασίας X(n) από την οποία προέρχεται το διάνυσμα παρατήρησης **u**(n) την ποσότητα:

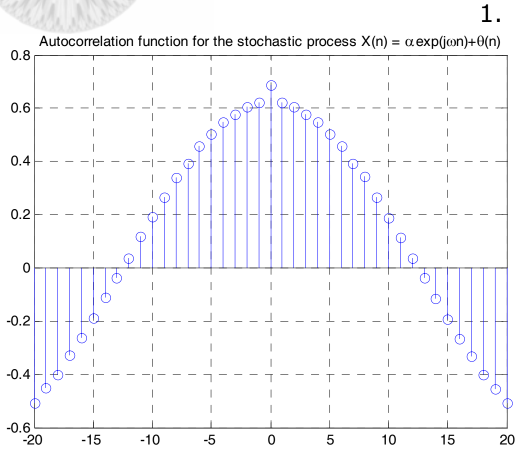
$$R_u = E\left[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\right]$$ όπου *H* δηλώνει το αναστρόφο και συζυγές

Πίνακας αυτοσυσχέτισης (II)

- Αν η στοχαστική διαδικασία X(n) είναι υπό την ευρεία έννοια στάσιμη ο πίνακας αυτοσυσχέτισης εκφράζεται ως:

$$R_u = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(M-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & & r_u(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_u(-M+1) & r_u(-M+2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix}$$

Άσκηση (III)



1. Έστω η στοχαστική διεργασία $X(n) = ae^{j\omega n} + \theta \qquad n = 0 \dots M$ η οποία αντιστοιχεί σε ένα ημιτονοειδές σήμα ($ae^{j\omega n}$) στο οποίο έχει επιδράσει θόρυβος θ με μέση τιμή $\mu_\theta = 0$ και διασπορά σ_θ^2 (ο θόρυβος είναι μια στάσιμη στοχαστική διεργασία).

   Στο σχήμα δίνεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της X(n). Να υπολογιστεί το πλάτος *α* και η συχνότητα *ω* του ημιτονοειδούς σήματος