ΒΕΣ 06 – Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Βέλτιστα Ψηφιακά Φίλτρα: Φίλτρα Wiener, Ευθεία και αντίστροφη γραμμική πρόβλεψη

Βιβλιογραφία Ενότητας

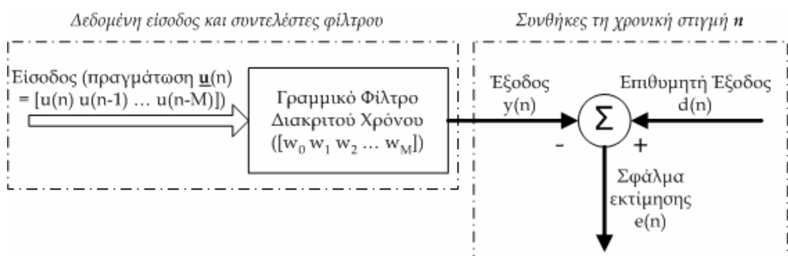
- *Benvenuto [2002]: Κεφάλαιο 2*
- *Widrow [1985]: Chapter 2*
- *Haykin [2001]: Chapter 5*
- *Sayed [2003]: Chapter 2*
- *Boroujeny [1999]: Chapter 2*
- *Bose [2003]: Chapter 7*
- *Chassaing [2004]: Chapter 7*

Εισαγωγή

- Δεδομένης μιας στάσιμης στοχαστικής διεργασίας *X(n)* με γνωστά στατιστικά χαρακτηριστικά (συνάρτηση αυτοσυσχέτισης *r(k)*) στην οποία επιδρούν ανεπιθύμητες διαταραχές (θόρυβος *v(n)*) το φίλτρο εκείνο το οποίο επιτυγχάνει τη βέλτιστη απομάκρυνση του θορύβου ονομάζεται βέλτιστο γραμμικό φίλτρο ή φίλτρο Wiener.
- Το ανωτέρω πρόβλημα (απαλοιφή θορύβου) διατυπώνεται σε διάφορες παραλλαγές, όπως:
  - Αναγνώριση (μοντελοποίηση) συστήματος
  - Αντίστροφη μοντελοποίηση συστήματος
  - Γραμμική πρόβλεψη των δειγμάτων της στοχαστικής διεργασίας
- Σε πρακτικό περιβάλλον σπάνια η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διεργασίας X(n) είναι γνωστή και επομένως το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός φίλτρου το οποίο προσεγγίζει στο μέγιστο δυνατό βαθμό το φίλτρο Wiener.

Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα

- Το πρόβλημα του βέλτιστου γραμμικού φιλτραρίσματος διατυπώνεται ως εξής:
  - Έστω μια πραγμάτωση $\mathbf{u}(n) = [u(n)\ u(n-1)\ \ldots\ u(n-M)]^T$ (*T* δηλώνει το ανάστροφο ενός διανύσματος ή πίνακα) μιας διεργασίας και η επιθυμητή έξοδος *d(n)* τη χρονική στιγμή *n*. Να βρεθούν οι συντελεστές του γραμμικού φίλτρου $\underline{\mathbf{w}} = [w_0\ w_1\ \ldots\ w_M]$ ώστε η πραγματική έξοδος *y(n)* να προσεγγίζει όσο το δυνατό περισσότερο την επιθυμητή έξοδο *d(n)* (δηλαδή το σφάλμα εκτίμησης *e(n)* να είναι όσο το δυνατό μικρότερο).



Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα (II)

- Περιορισμοί:
  - Το φίλτρο πρέπει να είναι γραμμικό ώστε η μαθηματική ανάλυση του προβλήματος (βέλτιστο φιλτράρισμα) να είναι εφικτή
  - Το φίλτρο πρέπει να είναι ψηφιακό (ακριβέστερα διακριτού χρόνου) ώστε να επιτρέπει υλοποίηση σε ψηφιακούς υπολογιστές ή επεξεργαστές σήματος (DSPs)
- Επιλογές που επηρεάζουν το πρόβλημα:
  - Τύπος φίλτρου (FIR ή IIR?).
    - Τα IIR φίλτρα απαιτούν, εν γένει, λιγότερους υπολογισμούς αλλά παρουσιάζουν προβλήματα αστάθειας τα οποία είναι κρίσιμα αν το φίλτρο μας είναι προσαρμοστικό (οι συντελεστές του μεταβάλλονται με το χρόνο). Ως αποτέλεσμα σχεδόν πάντοτε χρησιμοποιούνται FIR φίλτρα για την υλοποίηση προσαρμοστικών συστημάτων
  - Στατιστικό κριτήριο βελτιστοποίησης (κόστους).
    - Παρότι υπάρχουν διάφορες επιλογές ως προς το κριτήριο βελτιστοποίησης, το πλέον συνηθισμένο είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE). Ο λόγος είναι η δυνατότητα εύκολης μαθηματικής ανάλυσης την οποία επιδέχεται

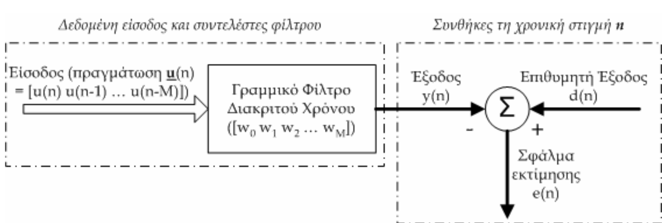
Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

- Έστω ότι λαμβάνουμε ως κριτήριο βελτιστοποίησης το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$J(w) = E[e^2(n)] = E[\{d(n) - y(n)\}^2]$$

- Θεωρώντας ότι το φίλτρο του οποίου τους συντελεστές αναζητούμε είναι γραμμικό τάξης M ισχύει:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} w_k u(n-k) = \mathbf{w}^T \mathbf{u}(n)$$



Κριτήριο Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (II)

- Με βάση τις δύο προηγούμενες σχέσεις το κριτήριο βελτιστοποίησης εκφράζεται ως:

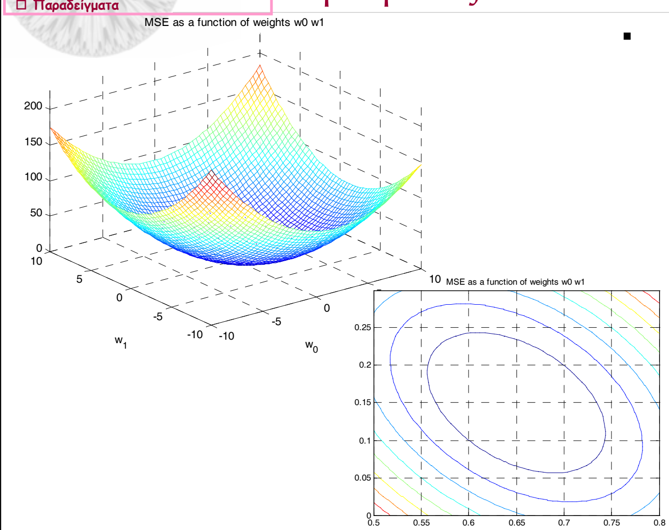
$$\begin{aligned} J(w) &= E[\{d(n)-\mathbf{w}^T\mathbf{u}(n)\}^2] = E[\{d(n)-\mathbf{w}^T\mathbf{u}(n)\}\{d(n)-\mathbf{w}^T\mathbf{u}(n)\}] \\ &= E[\{d^2(n)-\mathbf{w}^T\mathbf{u}(n)d(n)-d(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}+\mathbf{w}^T\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}\}] \\ &= E[d^2(n)]-2\mathbf{w}^T E[d(n)\mathbf{u}(n)]+\mathbf{w}^T E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)]\mathbf{w} \\ &= \sigma_d^2-2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{du}+\mathbf{w}^T\mathbf{R}_u\mathbf{w} \end{aligned}$$

όπου σ_d^2 είναι η διασπορά της διεργασίας εισόδου (όπως καταγράφεται μέσω της πραγμάτωσης **u**(n)) η οποία θεωρείται ότι έχει μηδενική μέση τιμή,

$\mathbf{p}_{du} = [p_{du}(0)\ p_{du}(1)\ \ldots\ p_{du}(M)]^T$ είναι το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης της επιθυμητής εξόδου τη χρονική στιγμή *n* με την πραγμάτωση **u**(n),

$\mathbf{R}_u$ είναι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης (M+1)x(M+1) στοιχείων της στοχαστικής διεργασίας εισόδου

Μορφή του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος



- Η προηγούμενη σχέση για το κριτήριο J(w) αποτελεί μια τετραγωνική μορφή έχει τη μορφή πολυδιάστασης παραβολής με ένα μοναδικό ελάχιστο.

Στο σχήμα απεικονίζεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για την περίπτωση M = 2 ($\mathbf{w} = [w_0\ w_1]$)

Εξισώσεις Wiener-Hoph

- Για την εύρεση των συντελεστών **w** που αντιστοιχούν στο βέλτιστη λύση παραγωγίζουμε το MSE ως προς **w** και εξισώνουμε με μηδέν:

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{p}_{du} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}_u\mathbf{w} \qquad \frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = -2\mathbf{p}_{du} + 2\mathbf{R}_u\mathbf{w}$$

  - Δεδομένης της μορφής του MSE (βλέπε προηγούμενη διαφάνεια) είναι φανερό ότι αυτό έχει ένα μοναδικό ακρότατο το οποίο και είναι ελάχιστο.

- Οι εξισώσεις $\mathbf{R}_u\mathbf{w} = \mathbf{p}_{du}$

  είναι γνωστές ως εξισώσεις Wiener-Hoph. Με τη βοήθεια τους μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του βέλτιστου γραμμικού φίλτρου $\mathbf{w_o}$: $\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{p}_{du}$

Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) δίνεται από τη σχέση:

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{du}^T\mathbf{w}_o = \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{du}^T\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{p}_{du}$$

Η αρχή της ορθογωνιότητας

- Μια σημαντική ιδιότητα της λύσης Wiener (συντελεστές $\mathbf{w}^o$) του βέλτιστου γραμμικού φίλτρου είναι η ορθογωνιότητα του ελάχιστου σφάλματος $e^o(n)$ τόσο με την πραγμάτωση <u>**u**</u>(n) όσο και με την έξοδο $y^o(n)$ του βέλτιστου φίλτρου: $J(w) = E[e^2(n)] \Rightarrow \frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 2E[e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}}]$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{M} w_k u(n-k) = d(n) - \mathbf{w}^T\mathbf{u}(n)$$

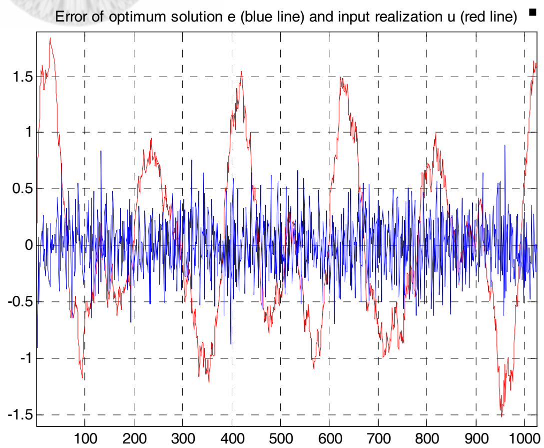
  - Δεδομένου ότι για το βέλτιστο φίλτρο πρέπει: $\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = 0$

    χρειάζεται: $2E[e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}}] = 0 \Rightarrow E[e^o(n)\mathbf{u}(n)] = 0$

$$\Rightarrow E[e^o(n)y^o(n)] = E[e^o(n)\mathbf{w}_o^T\mathbf{u}(n)]$$

Η αρχή της ορθογωνιότητας αποτελούν ένα πρακτικό τρόπο ελέγχου αν ένα φίλτρο λειτουργεί με τους βέλτιστους συντελεστές. Σε μια τέτοια περίπτωση το σφάλμα εκτίμησης πρέπει να έχει εσωτερικό γινόμενο, τόσο με το διάνυσμα εξόδου όσο και με το διάνυσμα εισόδου, ίσο με μηδέν

Η αρχή της ορθογωνιότητας (II)



- Στο σχήμα απεικονίζεται το σφάλμα εκτίμησης $e^o(n)$ (μπλε γραμμή) σε λειτουργία βέλτιστου φίλτρου καθώς και η έξοδος $y^o(n)$ (κόκκινη γραμμή).

  Είναι φανερό πως το σφάλμα και η έξοδος είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα (κάθετα) όπως αναμένεται από τη αρχή της ορθογωνιότητας

Παραδείγματα

- Να βρεθεί το φίλτρο Wiener τάξης M = 2, για την ισοστάθμιση του τηλεπικοινωνιακού διαύλου του σχήματος. Τα σήματα $v_1(n)$ και $v_2(n)$ αντιστοιχούν σε λευκό θόρυβο με μηδενική μέση τιμή και διασπορές $\sigma_{v1}^2=0.31$ $\sigma_{v2}^2=0.12$ και είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Η επιθυμητή έξοδος είναι το σήμα d(n).
  - Με πράσινο χρώμα: Στοχαστική Διεργασία Εισόδου
  - Με μπλε χρώμα: Τηλεπικοινωνιακός Δίαυλος
  - Με πορτοκαλί χρώμα: Φίλτρο Wiener