ΒΕΣ 06 – Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

Προσαρμοστικοί αλγόριθμοι στο πεδίο της συχνότητας: Ο ταχύς LMS (Fast Least Mean Square - FLMS)

- Εισαγωγή
- Τμηματικός αλγόριθμος LMS
- Σύγκλιση τμηματικού LMS
- Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
- Κανονικοποιημένος FLMS
- Παραδείγματα

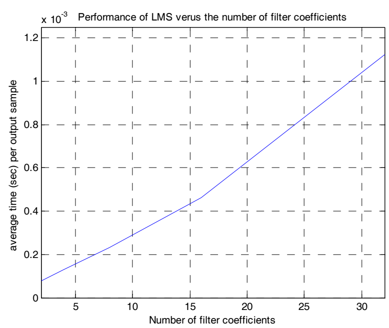
Βιβλιογραφία Ενότητας

- *Benvenuto [2002]: Κεφάλαιο 3*
- *Widrow [1985]: Chapter 6*
- *Haykin [2001]: Chapter10*
- *Sayed [2003]: Chapter 6*
- *Boroujeny [1999]: Chapter 6*
- *Bose [2003]: Chapter 9*
- *Chassaing [2004]: Chapter 7*

★ Εισαγωγή
☐ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☐ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☐ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Εισαγωγή

- Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου LMS αυξάνει με την αύξηση της τάξης του προσαρμοστικού φίλτρου (τάξη M, M+1 συντελεστές)
  - Ο αριθμός των πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε νέας τιμής της εξόδου είναι 2M+1.



- Σε πολλές περιπτώσεις όπως η καταπίεση ηχούς (echo cancellation) απαιτείται μεγάλη τάξη φίλτρου για να έχουμε αξιόλογα αποτελέσματα:
  - Αυξάνοντας την τάξη του φίλτρου *M* αυξάνουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα και το χρόνο εκτέλεσης
  - Με την αύξηση του χρόνου εκτέλεσης υπάρχει περίπτωση να μην είναι εφικτή η επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο (υπολογισμός της επόμενης τιμής της εξόδου πριν τη λήψη νέου δείγματος στην είσοδο) ιδιαίτερα για υψηλούς ρυθμούς δειγματοληψίας της εισόδου.

☑ Εισαγωγή
★ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☐ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☐ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Τμηματικός αλγόριθμος LMS

- Οι τμηματικοί προσαρμοστικοί αλγόριθμοι για επιτάχυνση των υπολογισμών ενημερώνουν τους συντελεστές του προσαρμοστικού φίλτρου μετά από ένα σύνολο δειγμάτων εισόδου (τμήμα - block) και όχι σε κάθε νέο δείγμα:
  - Το μέγεθος του τμήματος επιλέγεται συνήθως να είναι ίσο με το πλήθος των συντελεστών του φίλτρου (M+1)
  - Το κόστος για αυτή την επιλογή είναι μια μικρή καθυστέρηση στον υπολογισμό της εξόδου η οποία είναι αναγκαία για τη συγκέντρωση σε ένα καταχωρητή (buffer) των απαραίτητων δειγμάτων
  - Η ομαδοποίηση των δειγμάτων εισόδου δίνει τη δυνατότητα υλοποίησης του φίλτρου με τη βοήθεια του μετασχηματισμού στο πεδίο της συχνότητας. Επιπλέον κάνει τον αλγόριθμο λιγότερο ευαίσθητο σε παροδικές μεταβολές του σήματος εισόδου

Τμηματικός αλγόριθμος LMS (II)

- Η βασική διάταξη των τμηματικών προσαρμοστικών αλγορίθμων δίνεται στο επόμενο σχήμα:

$\mathbf{w}(k) = [w_0(k) \quad w_1(k) \quad \ldots \quad w_M(k)]^T$ = συντελεστές φίλτρου, τάξης M,

τις χρονικές στιγμές $n = kL + i, \; i = 0,1,\ldots,M$

$L = M + 1$ = μέγεθος τμήματος (block)

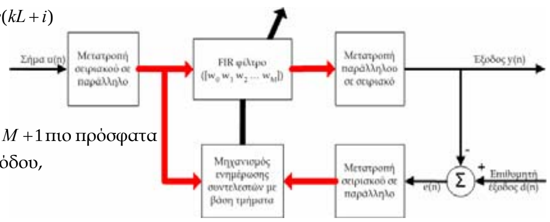
$$y(kL+i) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{u}(kL+i) = \sum_{l=0}^{M} w_l(k)u(kL+i-l), \qquad i = 0,1,\ldots,M$$

$d(n) = d(kL+i)$

$e(n) = d(n) - y(n) \Leftrightarrow e(kL+i) = d(kL+i) - y(kL+i)$

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + 2\mu \sum_{i=0}^{M} \mathbf{u}(kL+i)e(kL+i)$$

$\mathbf{u}(n) = [u(n) \quad u(n-1) \quad \ldots \quad u(n-M)]^T$ = τα $M+1$ πιο πρόσφατα δείγματα της στοχαστικής διεργασίας εισόδου,



Παράδειγμα

- Έστω x(n) = a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+v(n), όπου v(n) είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή μ_v=0 και διασπορά σ_v^2. Να εφαρμοστούν οι αλγόριθμοι (i) LMS, (ii) block LMS, για τον υπολογισμό των τιμών a_1 και a_2., δεδομένων 10 πραγματώσεων $\mathbf{u}_i$(n) (i =1 …10).

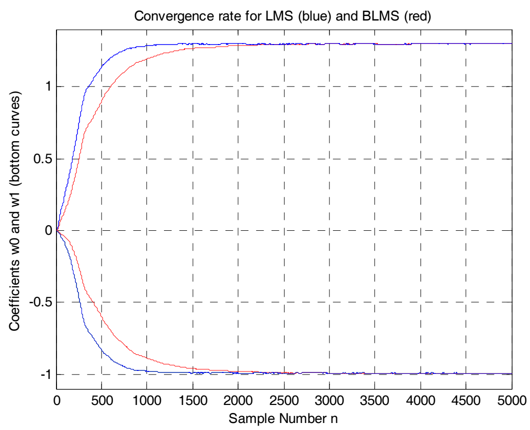
- Να συγκρίνεται:

  (α) την ταχύτητα σύγκλισης των αλγορίθμων,

  (β) το σφάλμα απόκλισης από τη λύση Wiener,

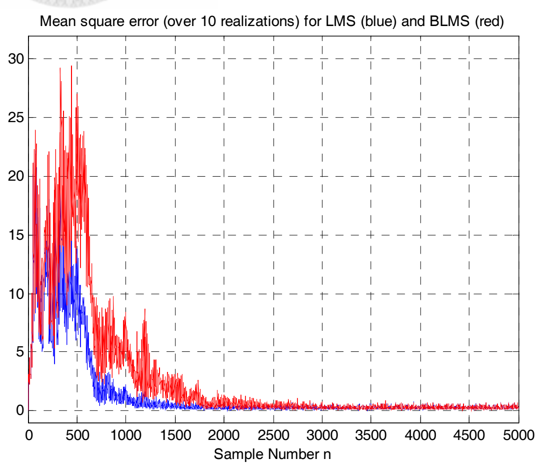
  (γ) την ταχύτητα εκτέλεσης των αλγορίθμων

Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα βλέπουμε τη σύγκλιση στις πραγματικές τιμές (a_1 =1.3, a_2=-0.995) για τους αλγορίθμους LMS (μπλε) και BLMS (κόκκινο)
  - Παρατηρούμε ότι ο τμηματικός LMS συγκλίνει πιο αργά προς τις σωστές τιμές (με μικρότερο αριθμό ενημερώσεων των συντελεστών του φίλτρου)

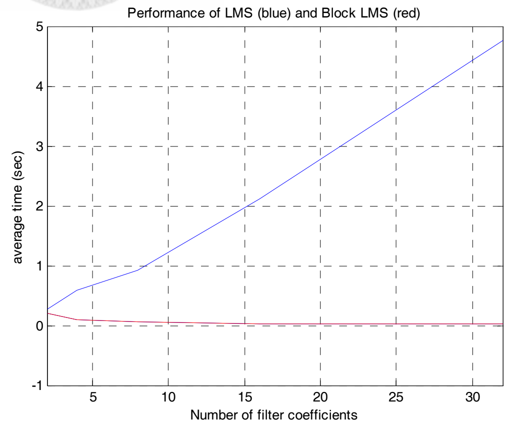
Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα βλέπουμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον αλγόριθμο LMS (μπλε) μειώνεται ταχύτερα από ότι για τον BLMS (κόκκινο). Εντούτοις στη μόνιμη κατάσταση (μεγάλες τιμές του *n*) το σφάλμα είναι ίδιο

- ☑ Εισαγωγή
- ★ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
- ☐ Σύγκλιση τμηματικού LMS
- ☐ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
- ☐ Κανονικοποιημένος FLMS
- ☐ Παραδείγματα

Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα βλέπουμε το χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων LMS και BLMS για διάφορες τιμές του L (μήκος φίλτρου)
  - Είναι φανερό ότι όσο μεγαλώνει το L τόσο αυξάνει ο χρόνος εκτέλεσης για τον LMS και μειώνεται το αντίστοιχο για το BLMS.
  - Από θεωρητικές μελέτες η πολυπλοκότητα για τον LMS είναι $O(L^2)$ σε αντίθεση με τον BLMS για τον οποίο έχουμε $O(L^2 \log_2 L)$.

- ☑ Εισαγωγή
- ☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
- ★ Σύγκλιση τμηματικού LMS
- ☐ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
- ☐ Κανονικοποιημένος FLMS
- ☐ Παραδείγματα

Σύγκλιση αλγορίθμου BLMS

- Η σύγκλιση για τον LMS διασφαλίζεται όταν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left\| \mathbf{I} - 2\mu \hat{\mathbf{R}}_u(n) \right\| < 1$$

$$\left\| \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{u}(kL+i)\mathbf{u}^T(kL+i) \right\| < 1$$

- Επειδή η εκτίμηση του πίνακα $\hat{\mathbf{R}}_u(n) = \mathbf{u}(kL+i)\mathbf{u}^T(kL+i)$ βασίζεται σε *L* διαφορετικές τιμές του διανύσματος ***u(kL+i)*** για να έχουμε σύγκλιση χρειάζεται:

$$0 < \mu < \frac{2}{L\lambda_{\max}} \Leftrightarrow 0 < \mu < \frac{2}{L\sum_{i=0}^{M} u^2(kL-i)}$$

- Η απορρύθμιση δίνεται από τη σχέση: $\frac{\mu}{2}\sum_{i=0}^{M}\lambda_i = \frac{\mu}{2} tr\{\hat{R}_u(n)\}$
  - Παρατηρούμε ότι ο BLMS συγκλίνει στη λύση Wiener (όπως και ο αλγόριθμος LMS) αλλά χρειάζεται πιο αυστηρή επιλογή για το μ για να διασφαλίζεται η σύγκλιση αυτή
  - Το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση είναι ίδιο και για τους δύο αλγορίθμους

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
★ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)

- Δεδομένου ότι στον τμηματικό LMS έχουμε ομαδοποίηση δεδομένων σε τμήματα είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Fourier για επιτάχυνση των πράξεων σε ορισμένα τμήματα του αλγορίθμου.
- Συγκεκριμένα:
  - Ο υπολογισμός της εξόδου περιλαμβάνει μια πράξη συνέλιξης

$$y(kL+i) = \mathbf{w}^T(k)\mathbf{u}(kL+i) = \sum_{l=0}^{M} w_l(k)u(kL+i-l), \qquad i = 0,1,\ldots,M$$

  η οποία μπορεί να υλοποιηθεί με 2 ευθύς μετασχηματισμούς Fourier, μια πράξη γινομένου των μετασχηματισμών και ένα αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$\mathbf{U}(k) = fft\{\mathbf{u}(kL+i)\}$$
$$W(k) = fft\{\mathbf{w}(k)\}$$
$$\mathbf{y}_k = ifft\{\mathbf{U}(k)\cdot W(k)\}$$

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
★ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (II)

- Ο υπολογισμός της βάθμωσης περιλαμβάνει μια πράξη συσχέτισης:

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = \sum_{l=0}^{M} \mathbf{u}(kL+i)e(kL+i)$$

  η οποία μπορεί να υλοποιηθεί με 2 ευθύς μετασχηματισμούς Fourier, μια πράξη συζυγούς συμπληρώματος, μια πράξη γινομένου των μετασχηματισμών και ένα αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$\mathbf{U}(k) = fft\{\mathbf{u}(kL+i)\}$$
$$E(k) = fft\{\mathbf{w}(k)\}$$
$$\boldsymbol{\varphi}(k) = ifft\{\mathbf{U}^H(k)\cdot E(k)\}$$

- Οι ανωτέρω τροποποιήσεις οδήγησαν στο ταχύ αλγόριθμο LMS ο οποίος έχει οδηγήσει σε περαιτέρω βελτίωση της ταχύτητας εκτέλεσης από ότι ο BLMS όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα

Παράδειγμα

- Έστω x(n) = a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+v(n), όπου v(n) είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή μ_v=0 και διασπορά σ_v^2. Να εφαρμοστούν οι αλγόριθμοι (i) BLMS, (ii) FLMS, για τον υπολογισμό των τιμών a_1 και a_2., δεδομένων 10 πραγματώσεων $\mathbf{u}_i$(n) (i =1 …10).

- Να συγκρίνεται:

  (α) την ταχύτητα σύγκλισης των αλγορίθμων,

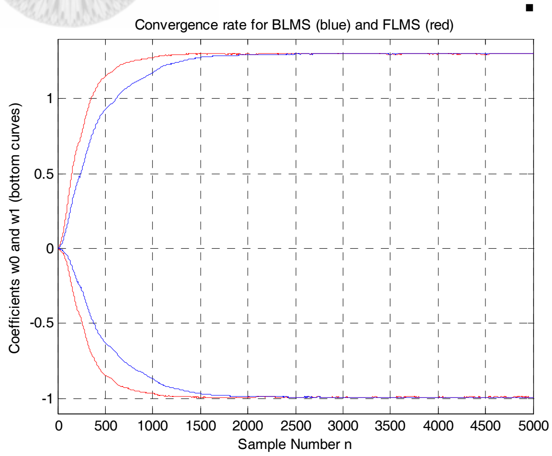
  (β) το σφάλμα απόκλισης από τη λύση Wiener,

  (γ) την ταχύτητα εκτέλεσης των αλγορίθμων

ΒΕΣ 06: Προσαρμοστικά Συστήματα στις Τηλεπικοινωνίες

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
★ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

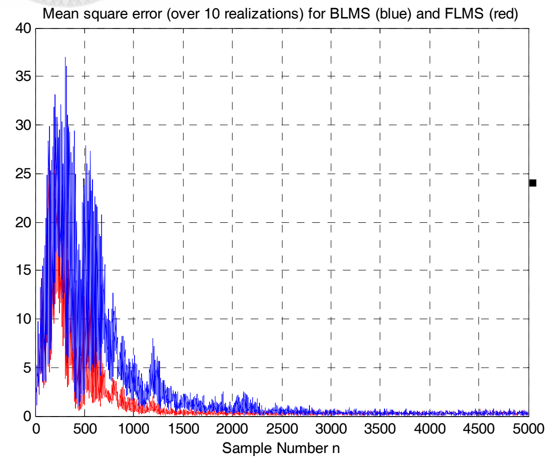
Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα βλέπουμε τη σύγκλιση στις πραγματικές τιμές (a_1 =1.3, a_2=-0.995) για τους αλγόριθμους BLMS (μπλε) και FLMS (κόκκινο)
  - Παρατηρούμε ότι ο FLMS συγκλίνει σημαντικά πιο γρήγορα προς τις σωστές τιμές
  - Η ταχύτητα σύγκλισης είναι στη πραγματικότητα αντίστοιχη του LMS με σημαντικά μικρότερο αριθμό ενημερώσεων των συντελεστών του φίλτρου.

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
★ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

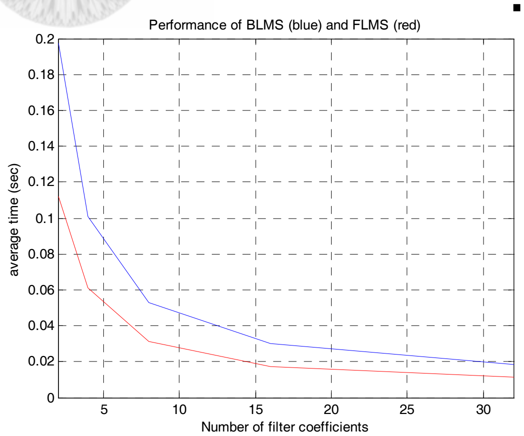
Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα βλέπουμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για τον αλγόριθμο FLMS (κόκκινο) μειώνεται σημαντικά ταχύτερα από ότι για τον BLMS (μπλε).
- Επιβεβαιώνεται επομένως ότι η λύση Wiener προσεγγίζεται ταχύτερα από τον αλγόριθμο FLMS.

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
★ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☐ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Παράδειγμα (συν.)



- Στο σχήμα βλέπουμε το χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων FLMS και BLMS για διάφορες τιμές του L (μήκος φίλτρου)
  - Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος FLMS υπερέχει σαφώς σε χρόνο εκτέλεσης για όλες τις τιμές του L.

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☑ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
★ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Κανονικοποιημένος FLMS

- Στον κανονικοποιημένο αλγόριθμο FLMS η βάθμωση **φ**(k) διορθώνεται διαιρώντας με το φάσμα ισχύος κάθε συχνοτικής περιοχής.
  - Η ταχύτητα σύγκλισης καθορίζεται από τη μικρότερη μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα αυτοσυχέτισης της εισόδου.
  - Για να επιταχυνθεί η σύγκλιση χρησιμοποιείται στην πραγματικότητα διανυσματικό κέρδος προσαρμογής μ του οποίου τα στοιχεία είναι αντιστρόφως ανάλογα προς την ισχύ των συχνοτικών περιοχών του σήματος εισόδου.
  - Η δυνατότητα αυτή παρέχεται μέσου του υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier των τμημάτων εισόδου και δεν υπάρχει στις χρονικές εκδοχές του LMS.
- Ο κανονικοποιημένος αλγόριθμος FLMS (NLMS) χρησιμοποιεί την εξίσωση προσαρμογής: $P_i(k) = |U_i(k)|^2 + \varepsilon,\ \mathrm{i} = 0,1,\ldots,2\mathrm{M}-1$

$$\mathbf{D}(k) = \text{Πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα } \frac{1}{P_i(k)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = \mathit{ifft}\{\mathbf{D}(k)\cdot \mathbf{U}^H(k)\cdot \mathbf{E}_k\}$$

$$W(k+1) = W(k) + a\cdot \mathit{fft}\{\boldsymbol{\varphi}(k)\}$$

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☑ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
★ Κανονικοποιημένος FLMS
☐ Παραδείγματα

Κανονικοποιημένος FLMS (II)

Αρχικοποίηση:

1. W(0) = μηδενικό διάνυσμα 2M στοιχείων
2. P(0) = μοναδιαίο διάνυσμα 2M στοιχείων

Συμβολισμοί:

- **0** = μηδενικό διάνυσμα M στοιχείων
- *fft* = ταχύς μετασχηματισμός Fourier
- *ifft* = αντίστροφος ταχύς μετασχηματισμός Fourier
- *a* = κέρδος προσαρμογής
- $P_i(k)$ = ισχύς i- στης συχνότητας του k-στου τμήματος
- *M* = τάξη προσαρμοστικού φίλτρου
- *γ* = σταθερά μνήμης για προσαρμοστικό υπολογισμό της ισχύος

Υπολογισμοί:

Για κάθε νέο τμήμα (block) από M δείγματα

$$\mathbf{U}(k) = \mathit{diag}(\mathit{fft}(\{u(kL-L), u(kL-L), \ldots, u(kL), \ldots, u(kL+L-1)\})$$
$$= \text{Πίνακας με διαγώνια στοιχεία το μετασχηματισμό fft των στοιχείων των τμημάτων k - 1 και k σε διαδοχή}$$

$$\mathbf{y}_k = \text{τα τελευταία M στοιχεία του } \mathit{ifft}\{\mathbf{U}(k)\cdot W(k)\}$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{d}_k - \mathbf{y}_k = \text{αντίστροφος ταχύς μετασχηματισμός Fourier}$$

$$\mathbf{E}_k = \mathit{fft}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{e}_k\end{bmatrix}\right\}$$

$$P_i(k) = \gamma P_i(k-1) + (1-\gamma)|U_i(k)|^2,\ \mathrm{i} = 0,1,\ldots,2\mathrm{M}-1$$

$$\mathbf{D}(k) = \text{Πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα } \frac{1}{P_i(k)}$$

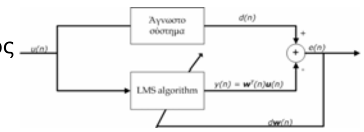
$$\boldsymbol{\varphi}(k) = \text{τα πρώτα M στοιχεία του } \mathit{ifft}\{\mathbf{D}(k)\cdot \mathbf{U}^H(k)\cdot \mathbf{E}_k\}$$

$$W(k+1) = W(k) + a\cdot \mathit{fft}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}(k)\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\right\}$$

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☑ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☑ Κανονικοποιημένος FLMS
★ Παραδείγματα

Παραδείγματα

- Στο επόμενο σχήμα δίνεται η βασική διάταξη αναγνώρισης συστήματος με τη χρήση του αλγορίθμου LMS:
  - Το επιθυμητό σήμα *d(n)* είναι ίσο με την απόκριση του άγνωστου συστήματος
  - Το σήμα u(n) είναι συνήθως λευκός θόρυβος



- Παράδειγμα:
  - Έστω ότι το άγνωστο σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z)=\frac{0.5+0.2z^{-1}+0.1z^{-2}}{1-0.25z^{-1}}$$

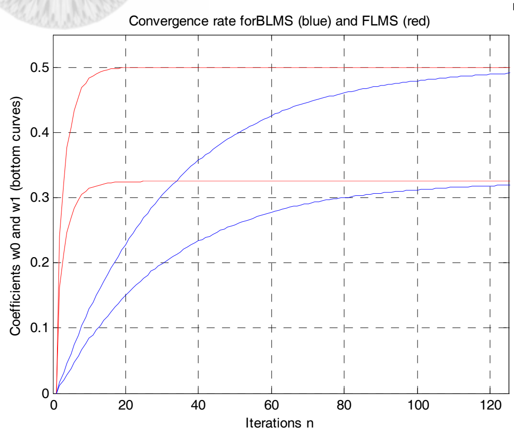
  - Για μοντελοποίηση του ανωτέρω συστήματος με FIR φίλτρο τάξης 5 (6 συντελεστών) η βέλτιστη λύση (λύση Wiener) είναι:

$$\mathbf{w}_o=[0.5 \quad 0.325 \quad 0.1812 \quad 0.0453 \quad 0.0113 \quad 0.0028]^T$$

  -
  - Εφαρμόζουμε τους αλγορίθμους LMS, Leaky-LMS, NLMS, VLMS και εξετάζουμε τη σύγκλιση τους.

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☑ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☑ Κανονικοποιημένος FLMS
★ Παραδείγματα

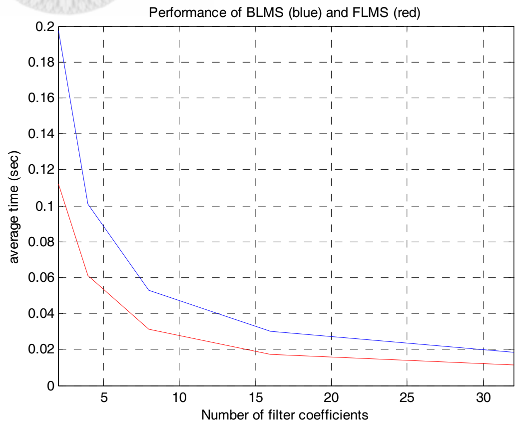
Αναγνώριση συστήματος (ΙΙ)



- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σταδιακή προσέγγιση των τιμών w_0 (=0.5) και w_1 (=0.325) για τους αλγορίθμους BLMS και FLMS:
  - Παρατηρούμε μια εμφανή βελτίωση στη ταχύτητα σύγκλισης για τον κανονικοποιημένο αλγόριθμος FLMS (κόκκινες καμπύλες) σε σχέση με τον αλγόριθμο BLMS (μπλε καμπύλες)

☑ Εισαγωγή
☑ Τμηματικός αλγόριθμος LMS
☑ Σύγκλιση τμηματικού LMS
☑ Ο ταχύς αλγόριθμος LMS (FLMS)
☑ Κανονικοποιημένος FLMS
★ Παραδείγματα

Αναγνώριση συστήματος (II)



- Στο σχήμα βλέπουμε το χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων FLMS και BLMS για διάφορες τιμές του L (μήκος φίλτρου)
  - Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος FLMS υπερέχει σαφώς σε χρόνο εκτέλεσης για όλες τις τιμές του L.