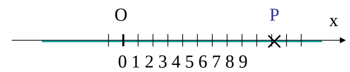
Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- Συστήματα Συντεταγμένων (2D)
- Διανυσματικά και Βαθμωτά Μεγέθη
- Πράξεις και ιδιότητες διανυσμάτων
- Διανυσματικές συναρτήσεις
- Παραγώγιση Διανυσματικών συναρτήσεων
- Ολοκλήρωση Διανυσματικών συναρτήσεων
- Θεμελιώδη Θεωρήματα Ολοκλήρωσης
- Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων (3D)

Εισαγωγή

Χώρος ν διαστάσεων:
Συνολο σημείων στο καθένα απο τα οποία αντιστοιχεί μια διατεταγμενη ν-ιάδα αριθμών

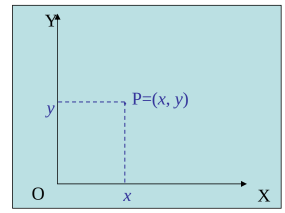
Μονοδιάστατος χώρος $\mathbb{R}^1$



Ορίζω σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο αναφοράς O και αντιστοιχώ το σημείο P με έναν αριθμό x

P` → $x+x$`
Q` → $(x, y) + (x`, y`) = (x+x`, y+y`)$

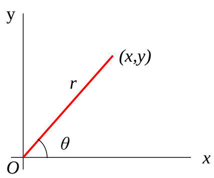
Διδιάστατος χώρος $\mathbb{R}^2$

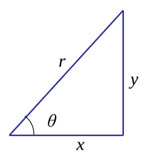


Ορίζω σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο αναφοράς O και αντιστοιχώ το σημείο P με μια διατεταγμένη διάδα αριθμών
- τις προβολές του P στους αξονες OX και OY .

Συστήματα Συντεταγμένων

Καρτεσιανό Ορθογώνιο Σ.Σ. (x,y) και πολοειδές Σ.Σ (r,θ)



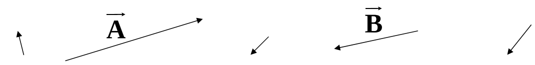


$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad x = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad y = r\sin\theta$$

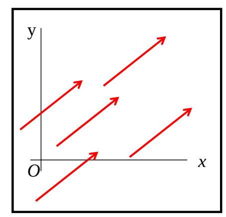
Διάνυσμα

Γεωμετρικό Διάνυσμα: κατευθυνόμενο (προσανατολισμένο) ευθύγραμμο τμήμα

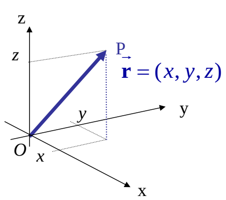


Ισότητα ανυσμάτων: Δύο ανύσματα είναι ίσα αν είναι παράλληλα, έχουν την ίδια φορά και έχουν ίσα μέτρα.

Αν $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ τότε $|\vec{\mathbf{A}}| = |\vec{\mathbf{B}}|$



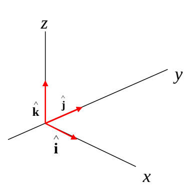
Διάνυσμα θέσης



Διάνυσμα θέσης σημείου P:

Το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα (διάνυσμα) με αρχή αυτή του συστήματος συντεταγμένων O και πέρας το σημείο P

$$\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$$

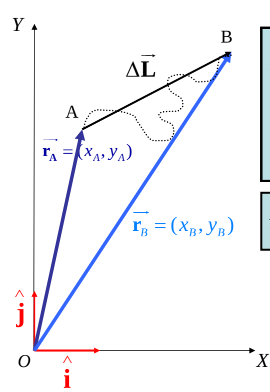


$$\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$$

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Διάνυσμα μετατόπισης



Καθώς ένα σωμάτιο κινήται κατά μήκος μίας τυχαίας διαδρομής από το σημείο A στο B, το άνυσμα της μετατόπισης του $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ αναπαριστάται από ένα βέλος από το σημείο A στο σημείο B και είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που το σωμάτιο ακολούθησε

Προσοχή: Το διάνυσμα θέσης εξαρτάται από το Σ.Σ., ενώ το διάνυσμα μετατόπισης όχι.

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} = (x_B - x_A)\,\hat{\mathbf{i}} + (y_B - y_A)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$d\vec{\mathbf{l}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}$$

Βαθμωτά και Διανυσματικά Μεγέθη

- Τα φυσικά μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται πλήρως από την αριθμητική τιμή τους και την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης ονομάζονται *βαθμωτά* ή *μονόμετρα* μεγέθη.
- Τα φυσικά μεγέθη για τον προσδιορισμό των οποίων απαιτείται <u>και</u> η γνώση της <u>κατεύθυνσης</u> τους ονομάζονται *διανυσματικά* ή *ανυσματικά* μεγέθη. (Το μέτρο του διανύσματος εκφράζει την <u>ένταση</u> του μεγέθους.)

<u>Παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών</u>: Η μάζα m, η θερμοκρασία T, ο όγκος V

<u>Παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών</u>:
Η ταχύτητα **V**, η μετατόπιση **ΔL**, η δύναμη **F,** η επιτάχυνση ***a*** κτλ.

Τα ανυσματικά μεγέθη συνήθως αναπαριστώνται είτε με έντονους χαρακτήρες **A** ή με ένα βέλος $\vec{\mathbf{A}}$.

Το μέτρο του διανύσματος αναπαριστάται ώς A ή ως $|\vec{\mathbf{A}}|$, $|\mathbf{A}|$

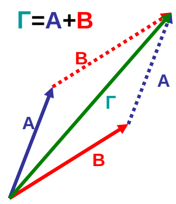
ΤΡΙΠΟΛΗ

Ημερομηνία	Ώρα		Θερμ/σία	Υγρασία	Διεύθ. ανέμου- Ένταση			Καιρός - φαινόμενα	
Τετάρτη 11/10/2006	21:00		14 °C	86 %		3 Μποφόρ Β			ΑΣΘΕΝΗΣ ΒΡΟΧΗ
Πέμπτη 12/10/2006	03:00		14 °C	89 %		3 Μποφόρ Β			ΑΣΘΕΝΗΣ ΒΡΟΧΗ
Πέμπτη 12/10/2006	09:00		13 °C	85 %		3 Μποφόρ Β			ΑΣΘΕΝΗΣ ΒΡΟΧΗ
Πέμπτη 12/10/2006	15:00		17 °C	63 %		4 Μποφόρ ΒΑ			ΣΥΝΝΕΦΙΑΣΜΕΝΟΣ
Πέμπτη 12/10/2006	21:00		14 °C	81 %		3 Μποφόρ Β			ΑΡΚΕΤΑ ΣΥΝΝΕΦΑ
Παρασκευή 13/10/2006	03:00		13 °C	91 %		3 Μποφόρ Β			ΑΣΘΕΝΗΣ ΒΡΟΧΗ
Παρασκευή 13/10/2006	09:00		13 °C	89 %		3 Μποφόρ Β			ΑΣΘΕΝΗΣ ΒΡΟΧΗ
Παρασκευή 13/10/2006	15:00		16 °C	68 %		4 Μποφόρ Β			ΑΣΘΕΝΗΣ ΒΡΟΧΗ
Παρασκευή 13/10/2006	21:00		14 °C	78 %		3 Μποφόρ Β			ΚΑΘΑΡΟΣ
Σάββατο 14/10/2006	03:00		13 °C	87 %		3 Μποφόρ Β			ΣΥΝΝΕΦΙΑΣΜΕΝΟΣ

Πράξεις με Διανύσματα

- Πρόσθεση δύο διανυσμάτων
- Πολλαπλασιασμός με ένα βαθμωτό
- Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων
- Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Ιδιότητες πρόσθεσης ανυσμάτων



Μεταθετική Ιδιότητα: $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}$

Προσεταιριστική Ιδιότητα: $\left(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}\right)+\vec{\mathbf{\Gamma}}=\vec{\mathbf{A}}+\left(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{\Gamma}}\right)$

Πολλαπλασιασμός Διανύσματος με βαθμωτό: $a\left(\vec{\mathbf{A}}\right)=a\vec{\mathbf{A}}$

Επιμεριστική Ιδιότητα: $a\left(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}\right)=a\vec{\mathbf{A}}+a\vec{\mathbf{B}}$

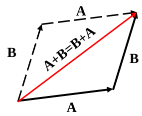
Μηδενικό διάνυσμα: $0\vec{\mathbf{A}}=\vec{\mathbf{0}}$

$\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{A}}$

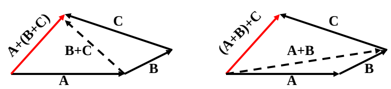
$\vec{\mathbf{A}}+(-\vec{\mathbf{A}})=\vec{\mathbf{0}}$

Αφαίρεση διανυσμάτων: $\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{A}}+\left(-\vec{\mathbf{B}}\right)$

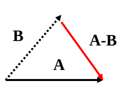
Μεταθετική Ιδιότητα: $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}$

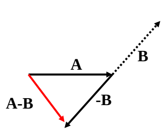


Προσεταιριστική Ιδιότητα: $\left(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}\right)+\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{A}}+\left(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}\right)$



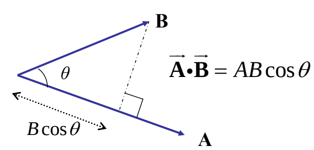
Αφαίρεση διανυσμάτων: $\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{A}}+\left(-\vec{\mathbf{B}}\right)$





Εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο διανυσμάτων

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα βαθμωτό μέγεθος και ορίζεται από την $\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}=AB\cos\theta$ όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ αν ενωθούν οι ουρές τους.



Ιδιότητες

$\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{B}}\bullet\vec{\mathbf{A}}$

$\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{A}}=|A|^2=\vec{\mathbf{A}}^2$

$\vec{\mathbf{A}}\bullet(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}})=\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{C}}$

Αν $\vec{\mathbf{A}}\perp\vec{\mathbf{B}}$ τότε $\vec{\mathbf{A}}\bullet\vec{\mathbf{B}}=0$

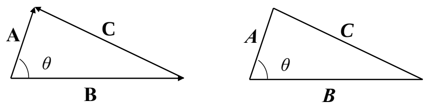
Εσωτερικό γινόμενο: Γεωμετρικά είναι το γινόμενο του A επί το μήκος της προβολής του **B** στον άξονα του **A**

Νόμος συνημιτονων

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$$

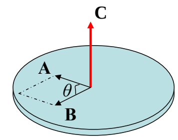
$$\vec{\mathbf{C}} \bullet \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{C}}^2 = \left(\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}\right) \bullet \left(\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}\right) = \vec{\mathbf{A}}^2 + \vec{\mathbf{B}}^2 - 2\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} \Rightarrow$$

$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ Νόμος συνημιτόνων



Εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο

Ως εξωτερικό γινόμενο του ανύσματος **A** με το άνυσμα **B** ορίζεται ένα νέο ανυσμά $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ το οποίο έχει μέτρο $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα **A** και **B**, και φορά τέτοια ώστε τα **A**, **B**, **C** να ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα.



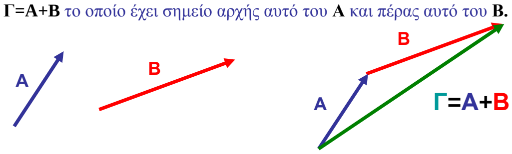
Δεξιόστροφο σύστημα: Ορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού

- Προσανατολίζω τον δεξιό αντίχειρα με το **A**
- Προσανατολίζω τον δεξιό δείκτη με το **B**
- Ο δεξιός μέσος δάκτυλος δείχνει την φορά του **C** ώστε τα **A**, **B**, **C** να ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα

Εξωτερικό γινόμενο: Γεωμετρικά το |**A x B**| είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμου με πλευρές τα *A* και *B*

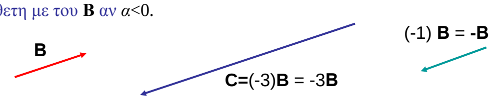
Πρόσθεση ανυσμάτων

Το άθροισμα δύο ανύσματων **A, B** προκύπτει τοποθετώντας διαδοχικά τα ανύσματα, έτσι ώστε το τέλος του **A** να συμπίπτει με την αρχή του **B** και ορίζεται ως ένα νέο άνυσμα **Γ=A+B** το οποίο έχει σημείο αρχής αυτό του **A** και πέρας αυτό του **B.**



Πολλαπλασιασμός ανυσμάτος με βαθμωτό

Το γινόμενο **C**=*α***B** ενός πραγματικού αριθμού *α* με ένα άνυσμα **B** ορίζεται ώς ένα νέο άνυσμα **C** παράλληλο με το **B**, με μέτρο |**C**|=|*α*| |**B**| και φορά *ίδια* με του **B** αν α>0 ή αντίθετη με του **B** αν *α*<0.



Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου

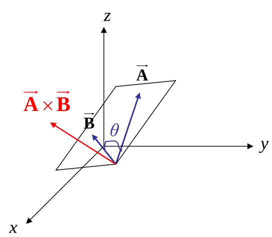
$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Αν $\vec{\mathbf{A}} \parallel \vec{\mathbf{B}}$ τότε $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}}$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Αν $\vec{\mathbf{A}} \perp \vec{\mathbf{B}}$ τότε $\left|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right| = |A||B| = \mathrm{AB}$

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

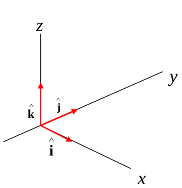


Τριπλά Γινόμενα

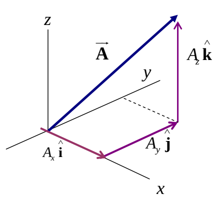
$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})$$

Διανυσματική άλγεβρα υπό μορφή συνιστωσών



$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$$



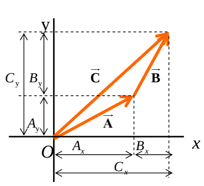
Πρόσθεση

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \left(A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

Πολ/μός με βαθμωτό

$$a\vec{\mathbf{A}} = a\left(A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right) = (aA)_x\,\hat{\mathbf{i}} + \left(aA_y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(aA_z\right)\hat{\mathbf{k}}$$



Διανυσματική άλγεβρα υπό μορφή συνιστωσών

Εσωτερικό γινόμενο

$$\hat{\mathbf{i}} \bullet \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \bullet \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \bullet \hat{\mathbf{k}} = 1, \quad \hat{\mathbf{i}} \bullet \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \bullet \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \bullet \hat{\mathbf{i}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = \left(A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}\right) \bullet \left(B_x\,\hat{\mathbf{i}} + B_y\,\hat{\mathbf{j}} + B_z\,\hat{\mathbf{k}}\right) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία

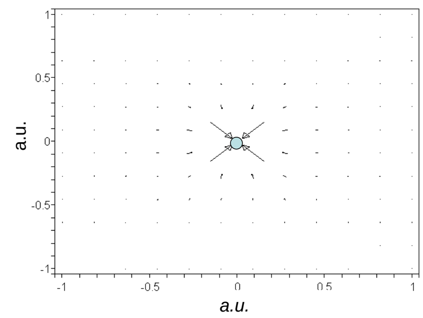
Μια βαθμωτή συνάρτηση του χώρου $\phi(\mathbf{r})$ που λαμβάνει σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r}=(x,y,z)$ συγκεκριμένες τιμές, ονομάζεται βαθμωτό πεδίο.

Σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r}$ αντιστοιχώ μια τιμή $\phi(\mathbf{r})$

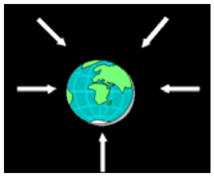
Μια διανυσματική συνάρτηση του χώρου, π.χ. $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\left(A_x(\mathbf{r}),A_y(\mathbf{r}),A_z(\mathbf{r})\right)$ που λαμβάνει σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r}=(x,y,z)$ συγκεκριμένες τιμές, ονομάζεται διανυσματικό πεδίο.

Σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r}$ αντιστοιχώ ένα άνυσμα $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

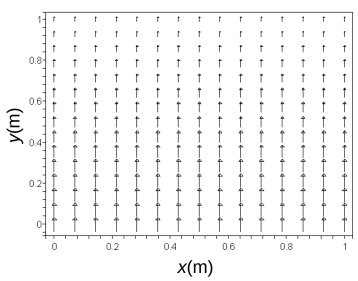
Επιτάχυνση βαρυτικού πεδίου



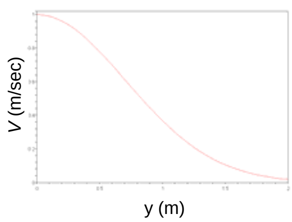
$$\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}})=-G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=-G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}=-GM\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$
$$=-GM\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{j}}\right)$$



Πεδίο ταχύτητας ροής ρευστού

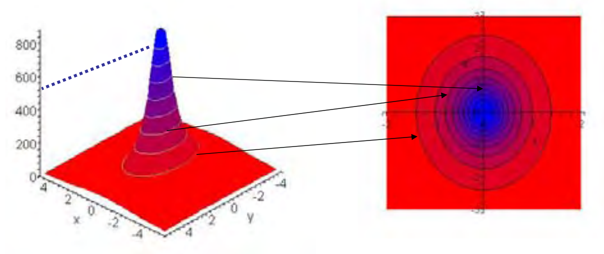


$$\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})=V_0e^{-ay^2}\hat{\mathbf{j}}$$



Ισοσταθμική επιφάνεια

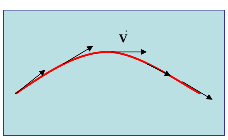
Ισοσταθμική επιφάνεια/καμπύλη: Η επιφάνεια/καμπύλη στο χώρο τα σημεία της οποίας χαρακτηρίζονται από την ίδια αριθμητική τιμή για ένα βαθμωτό μέγεθος, δηλ. $A=\{\mathbf{x}\},\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ \phi(\mathbf{x})=\beta=\sigma\tau\alpha\theta.$
(π.χ. ισοϋψείς σε γεωγραφικούς χάρτες, ισοβαρείς σε μετερεωλογικούς χάρτες.)

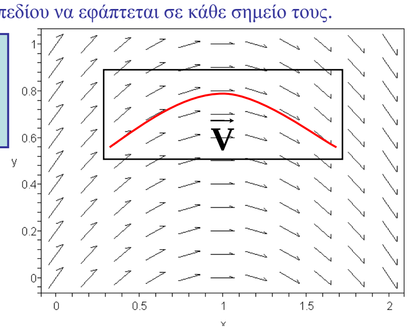


Δυναμική γραμμή

Δυναμικές γραμμές (διανυσματικού πεδίου): Οι γραμμές που έχουν την ιδιότητα το διάνυσμα του πεδίου να εφάπτεται σε κάθε σημείο τους.

$$\overrightarrow{\mathbf{V}_x}=V_{0x}\hat{\mathbf{i}}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{V}_y}=\mathbf{V_{0y}}+\vec{\mathbf{g}}t=\left(V_{0y}-g\frac{x}{V_{0x}}\right)\hat{\mathbf{j}}$$





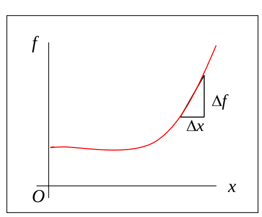
Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι ανάλογη της έντασης του πεδίου

Διαφορικός Λογισμός

Η παράγωγος *df/dx* μιας συναρτησης *f(x)* εκφράζει τον παράγοντα αναλογίας με τον οποίο μεταβάλλεται η συναρτηση *f(x)* όταν αλλάζουμε τη μεταβλητή *x*, κατά ένα στοιχειώδες ποσό *dx*.

$$df=\left(\frac{df}{dx}\right)dx$$

Το *df* ονομάζεται διαφορικό της *f*



Γεωμετρική ερμηνεία:
Η παράγωγος *df/dx* μιας συναρτησης δίνει την κλίση της καμπύλης *f(x)*

Διαφορικό συνάρτησης

Αν οι μεταβλητές μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y,z,t)$ μεταβληθούν κατά τις ελάχιστες ποσότητες $dx,\ dy,\ dz,\ dt$, η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά την ποσότητα df, η οποία καλείται διαφορικό της f

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt}$$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$: είναι η μερική παράγωγος της f ως προς α και εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς α, όταν οι άλλες μεταβλητές παραμενουν σταθερές.

[Αν $u = f + g$ έπεται ότι θα ισχύει $du = df + dg$]

25

Διαφορικό διανυσματικής συνάρτησης

Μία ανυσματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών της

$$\mathbf{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\,\hat{\mathbf{i}} + F_y(x,y,z)\,\hat{\mathbf{j}} + F_z(x,y,z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Η έννοια του διαφορικού μπορεί να επεκταθεί στις ανυσματικές συναρτήσεις (δεδομένου ότι τα $\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}$ παραμένουν σταθερά) με τον ορισμό:

$$d\mathbf{F}(x,y,z) = dF_x\,\hat{\mathbf{i}} + dF_y\,\hat{\mathbf{j}} + dF_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

π.χ. για το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ ο ορισμός δίνει:
$d\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{l}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$, το στοιχειώδες άνυσμα μετατόπισης.

26

Παραγώγιση ανυσματικών συναρτήσεων

Η παράγωγος μιας ανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(x,y,z,t)$, ως προς μία μεταβλητή της συνάρτησης $\alpha = x,y,z,t$ μπορεί να γραφεί

$$\frac{d\vec{\mathbf{F}}}{d\alpha} = \frac{dF_x}{d\alpha}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dF_y}{d\alpha}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dF_z}{d\alpha}\hat{\mathbf{k}}$$

$\pi.\chi.$ η παράγωγος του ανύσματος θέσης $\vec{\mathbf{r}}(x,y,z)$, ως προς τον χρόνο t είναι το άνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} = V_x\,\hat{\mathbf{i}} + V_y\,\hat{\mathbf{j}} + V_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

27

Μερικές ιδίοτητες...

Κανόνας αλυσίδας για βαθμωτές συναρτήσεις: $\frac{d(gf)}{d\alpha} = \frac{dg}{d\alpha}f + g\frac{df}{d\alpha}$

$$\frac{d\left(g\vec{\mathbf{F}}\right)}{d\alpha} = \frac{dg}{d\alpha}\vec{\mathbf{F}} + g\frac{d\vec{\mathbf{F}}}{d\alpha}$$

$$\frac{d\left(\vec{\mathbf{G}}\bullet\vec{\mathbf{F}}\right)}{d\alpha} = \frac{d\vec{\mathbf{G}}}{d\alpha}\bullet\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{G}}\bullet\frac{d\vec{\mathbf{F}}}{d\alpha}$$

$$\frac{d\left(\vec{\mathbf{G}}\times\vec{\mathbf{F}}\right)}{d\alpha} = \frac{d\vec{\mathbf{G}}}{d\alpha}\times\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{G}}\times\frac{d\vec{\mathbf{F}}}{d\alpha}$$

28

Κλίση βαθμωτού πεδίου

Το διαφορικό $d\phi$ μιας βαθμωτής συνάρτησης $\phi(x,y,z)$ είναι

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

Παρατηρούμε ότι μπορεί να γραφεί ως το εσωτερικό γινόμενο

$$d\phi = (\nabla\phi)\bullet\left(d\vec{\mathbf{r}}\right)$$

όπου $d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$ και το ανύσμα $\nabla\phi$ δίνεται από

$$\boxed{\nabla\phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}:}$$ κλίση βαθμωτού πεδίου ϕ

Η κλίση είναι μια διανυσματική ποσότητα και αποτελεί γενίκευση της παραγώγου.

29

Κλίση βαθμωτού πεδίου

$$\nabla\phi \equiv \mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}:$$ Κλίση βαθμωτού πεδίου ϕ

Η κλίση $\nabla\phi$ δείχνει την κατεύθυνση της μέγιστης αυξησης της συνάρτησης ϕ

Το μέτρο $|\nabla\phi|$ δίνει τον ρυθμό αύξησης κατά την κατεύθυνση μέγιστης αύξησης

30

Ο ανυσματικός διαφορικός τελεστής

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla\phi = \mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}:$$ κλίση βαθμωτού πεδίου

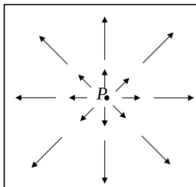
$$\nabla\bullet\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{div}\vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}:$$ απόκλιση διανυσματικού πεδίου

$$\nabla\times\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{curl}\vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}:$$ στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου

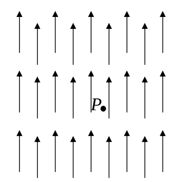
Απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης

$$\nabla\bullet\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{div}\vec{\mathbf{F}} = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(F_x\hat{\mathbf{i}}+F_y\hat{\mathbf{j}}+F_z\hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Η απόκλιση διανύσματος είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που μας δίνει κατά πόσο το διάνυσμα **F** αποκλίνει («*απλώνεται*»)



$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\nabla\vec{\mathbf{F}}_1 = 3$$



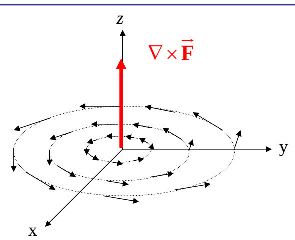
$$\vec{\mathbf{F}}_2 = 4\hat{\mathbf{k}}$$
$$\nabla\vec{\mathbf{F}}_2 = 0$$

Στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης

$$\nabla\times\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{curl}\vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Ο στροβιλισμός του διανύσματος **F** εκφράζει το κατά πόσο το διάνυσμα **F** περιστρέφεται (στροβιλίζεται) γύρω από το σημείο που υπολογίζεται

$$\vec{\mathbf{F}} = -y\hat{\mathbf{i}}+x\hat{\mathbf{j}}$$
$$\nabla\times\vec{\mathbf{F}} = 2\hat{\mathbf{k}}$$



Διανυσματικές ταυτότητες

Κανόνες πρόσθεσης

$$\nabla(f+g) = \nabla f+\nabla g$$
$$\nabla\bullet(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\bullet\mathbf{A}+\nabla\bullet\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla(kf) = k\nabla f$$
$$\nabla\bullet(k\mathbf{A}) = k\nabla\bullet\mathbf{A}$$
$$\nabla\times(k\mathbf{A}) = k\nabla\times\mathbf{A}$$

Τριπλά γινόμενα

$$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\bullet(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})$$

Κανόνες γινομένων

$$\nabla(fg) = g\nabla f+f\nabla g$$
$$\nabla(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\bullet\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\bullet\nabla)\mathbf{A}$$
$$\nabla\bullet(f\mathbf{A}) = f(\nabla\bullet\mathbf{A})+\mathbf{A}\bullet\nabla f$$
$$\nabla\bullet(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\bullet(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\bullet(\nabla\times\mathbf{B})$$
$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\times\nabla f$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\bullet\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\bullet\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{A}(\nabla\bullet\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\bullet\mathbf{A})$$

Δεύτεροι παράγωγοι

$$\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla f) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

Γενίκευση ορισμένου ολοκληρώματος σε περισσότερες μεταβλητές:

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d}\int_{z=e}^{z=g} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=e}^{z=g}\left\{\int_{y=c}^{y=d}\left[\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y,z)dx\right)\right]dy\right\}dz,$$

Αν οι μεταβλητές του ολοκληρώματος (x,y,z) αντιστοιχούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τότε το ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ότι πραγματοποιείται μέσα σε όγκο $V = |b-a|\times|d-c|\times|g-e|$ που περιβάλλεται από κάποια επιφάνεια S που ορίζεται από κάποια εξίσωση $w(x,y,z)=0$.

$$\int_V fdV = \int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=e}^{z=g}\left\{\int_{y=c(z)}^{y=d(z)}\left[\left(\int_{x=a(y,z)}^{x=b(y,z)} f(x,y,z)dx\right)\right]dy\right\}dz$$

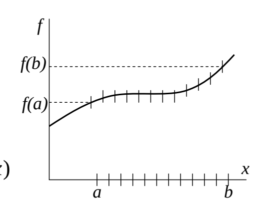
Γενίκευση στην περίπτωση ανυσματικών συναρτήσεων $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z,a) = F_x\hat{\mathbf{i}}+F_y\hat{\mathbf{j}}+F_z\hat{\mathbf{k}}$:

$$\int_V \vec{\mathbf{F}}dV = \left(\int_V F_x dV\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\int_V F_y dV\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\int_V F_z dV\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\int_{a1}^{a2}\vec{\mathbf{F}}da = \left(\int_{a1}^{a2}F_x da\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(\int_{a1}^{a2}F_y da\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\int_{a1}^{a2}F_z da\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Θεμελιώδες θεώρημα ανάλυσης:

$$\int_a^b\left(\frac{df}{dx}\right)dx = f(b)-f(a)$$

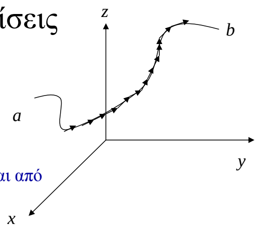


$$\int_a^b F(x)dx = f(b)-f(a), \qquad {df}/{dx} = F(x)$$

Για να ολοκληρώσω την $F(x)$ πρέπει να βρω $f(x)$: ${df}/{dx} = F(x)$

Το ολοκλήρωμα μιας παραγώγου σε κάποιο διάστημα υπολογίζεται από τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα (σύνορα) του διαστήματος

Θεμελιώδες θεώρημα για τις κλίσεις



$T(x,y,z)$: Βαθμωτή συνάρτηση

$a(a_x,a_y,a_z) \xrightarrow{d\vec{\mathbf{l}}} b(b_x,b_y,b_z)$

Το διαφορικό της T για στοιχειώδη μετατόπιση dl δίνεται από

$$dT = (\nabla T)\bullet d\vec{\mathbf{l}}$$

Η συνολική μεταβολή της T κατά την μετάβαση από το a στο b κατά μήκος της επιλεγόμενης διαδρομής είναι

$$\int_a^b (\nabla T)\bullet d\vec{\mathbf{l}} = T(b) - T(a)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της κλίσης μια συνάρτησης δίνεται από τις τιμές της συνάρτησης στα σύνορα της διαδρομής.

* Η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη της διαδρομής

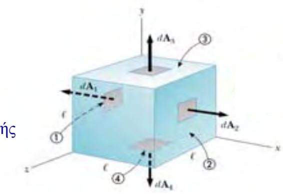
* $\oint (\nabla T)\bullet d\vec{\mathbf{l}} = 0$

37

Θεώρημα της απόκλισης (θεώρημα Gauss, θεώρημα Green)

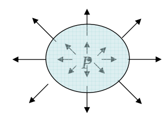
$\mathbf{u}(x,y,z)$: Διανυσματική συνάρτηση

$$\int_{\text{Όγκος}} (\nabla\bullet\mathbf{u})dV = \oint_{\text{Επιφάνεια}} \mathbf{u}\bullet d\vec{\mathbf{a}}$$



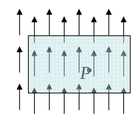
Το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης μιας διανυσματικής συνάρτησης σε μία περιοχή, ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης στην επιφάνεια που περιβάλλει την περιοχή.

$\int_{\text{Όγκος}}$ (Πηγές - Καταβόθρες περιοχής) = $\oint_{\text{Επιφάνεια}}$ (Συνολική Ροή από την συνοριακή επιφάνεια)



$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$

$\nabla\vec{\mathbf{F}}_1 = 3$



$\vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{r}} = z\hat{\mathbf{k}}$

$\nabla\vec{\mathbf{F}}_2 = 0$

38

Θεώρημα στροβιλισμού (θεώρημα Stokes)

$\mathbf{v}(x,y,z)$: Διανυσματική συνάρτηση

$$\boxed{\int_{\text{Επιφάνεια}} (\nabla\times\mathbf{v})\bullet d\vec{\mathbf{a}} = \oint_{\text{Συνοριακή Γραμμή}} \mathbf{v}\bullet d\vec{\mathbf{l}}}$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού μιας διανυσματικής συνάρτησης, ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στην συνοριακή γραμμή που περικλείει την περιοχή.

Ερμηνεία:

39

Θεμελιώδη Θεωρήματα - με απλά λόγια...

Το (επικαμπύλιο / χωρικό / επιφανειακό) ολοκλήρωμα μιας παραγώγου (κλίση βαθμωτής συνάρτησης / απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης / στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης) πάνω σε κάποια περιοχή (διαδρομή / όγκος / επιφάνεια) δίνεται από τις τιμές της συνάρτησης στα σύνορα.

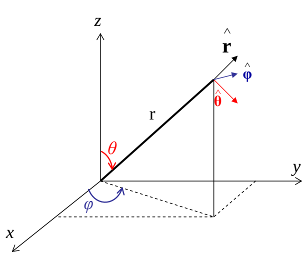
$$\int_a^b (\nabla T)\bullet d\vec{\mathbf{l}} = T(b) - T(a)$$

$$\int_{\text{Όγκος}} (\nabla\bullet\mathbf{u})dV = \oint_{\text{Επιφάνεια}} \mathbf{u}\bullet d\vec{\mathbf{a}}$$

$$\int_{\text{Επιφάνεια}} (\nabla\times\mathbf{v})\bullet d\vec{\mathbf{a}} = \oint_{\text{Συνοριακή Γραμμή}} \mathbf{v}\bullet d\vec{\mathbf{l}}$$

40

Σφαιρικές συντεταγμένες



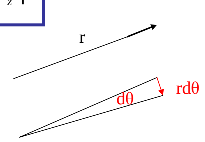
$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta \end{array}}$$

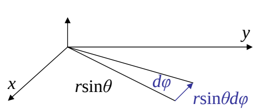
$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$$

$dl_r = dr$

$dl_\theta = r d\theta$

$dl_\phi = r\sin\theta d\phi$

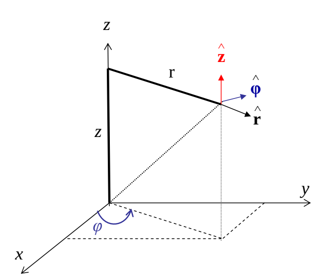




$$\boxed{d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}}}$$

41

Κυλινδρικές συντεταγμένες



$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le r < \infty,\ -\infty \le z \le \infty,\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z \end{array}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z\hat{\mathbf{z}}}$$

$dl_r = dr$

$dl_\phi = r d\phi$

$dl_z = dz$

$$\boxed{d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\hat{\mathbf{z}}}$$

42

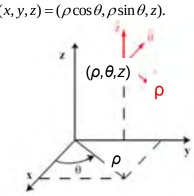
Προσοχή!

Σε αντίθεση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, η διεύθυνση των μοναδιαίων διανυσμάτων στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ΑΛΛΑΖΕΙ ανάλογα με το διάνυσμα θέσης. Για αυτό το λόγο θέλει ιδιαίτερη προσοχή όταν χρησιμοποιούμε διαφορικούς τελεστές!

Να δειχθεί ότι στις κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$ (1)

Γνωρίζουμε ότι $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$ (Εξ. 2). Θα εκφράσουμε τις μερικές παραγώγους $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ και τα μοναδιαία διανύσματα $\left(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right)$ συναρτήσει των $\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ και $\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}}\right)$ λαμβάνοντας υπόψιν $(x, y, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} &= \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} &= \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\mathbf{j}} &= \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}} \quad (3)$$



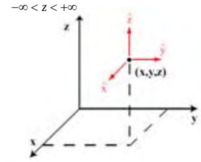
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= .... = -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ.(3,4) στην (2) και μετα από απλές πράξεις καταλήγουμε στην (1).

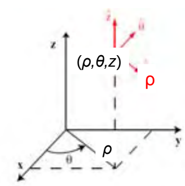
	Καρτεσιανές	Κυλινδρικές	Σφαιρικές
	(x,y,z)	$(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$	$(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$
$\vec{\mathbf{A}}$	$A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$	$A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$	$A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$\nabla\bullet\vec{\mathbf{A}}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla\times\vec{\mathbf{A}}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right)\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\phi\sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Καρτεσιανες

$-\infty < x < +\infty$
$-\infty < y < +\infty$
$-\infty < z < +\infty$



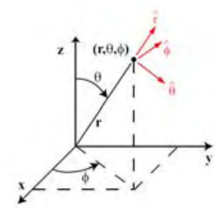
Κυλινδρικές



$0 \le r < \infty$
$0 \le \theta \le \pi$
$0 \le \phi \le 2\pi$

$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$

Σφαιρικές

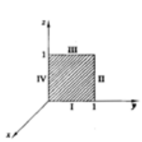


$0 \le r < \infty$
$0 \le \theta \le \pi$
$0 \le \phi \le 2\pi$

$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$
$z = r\cos\theta$

Υποθέστε ότι $\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{j} + (4yz^2)\hat{k}$. Ας ελέγξουμε το θεώρημα του Stokes για το τετράγωνο που φαίνεται στο Σχ. 1.34. Εδώ

$$\nabla \times \mathbf{v} = (4z^2 - 2x)\hat{\imath} + 2z\hat{k} \quad \text{και} \quad d\mathbf{a} = dy\,dz\,\hat{\imath}$$



Σχήμα 1.34

(Παίρνοντας το $d\mathbf{a}$ να δείχνει στην κατεύθυνση του θετικού άξονα x, δεσμευόμαστε να ακολουθήσουμε την αριστερόστροφη φορά ολοκλήρωσης. Θα μπορούσαμε εξίσου καλά να γράφαμε $d\mathbf{a} = -dy\,dz\,\hat{\imath}$, θα 'μασταν όμως τότε υποχρεωμένοι να κινηθούμε δεξιόστροφα.) Επειδή για την επιφάνεια αυτή, $x = 0$,

$$\int_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dy\,dz = \tfrac{4}{3}$$

Τι μπορούμε, τώρα, να πούμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα; Πρέπει να το σπάσουμε σε τέσσερα κομμάτια.

(i) $x = 0,\ y: 0 \to 1,\ z = 0,\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 3y^2\,dy,\ \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 3y^2\,dy = 1$

(ii) $x = 0,\ y = 1,\ z: 0 \to 1,\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 4z^2\,dz,\ \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 4z^2\,dz = \tfrac{4}{3}$

(iii) $x = 0,\ y: 1 \to 0,\ z = 1,\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 3y^2\,dy,\ \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 3y^2\,dy = -1$

(iv) $x = 0,\ y = 0,\ z: 1 \to 0,\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0,\ \int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0.$

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 1 + \tfrac{4}{3} - 1 + 0 = \tfrac{4}{3}, \quad \text{όπως περιμέναμε.}$$