

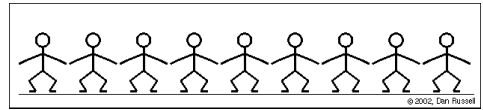
Κυματική Κίνηση



Physics for Scientists and Engineers, R. A. Serway:

Κεφάλαιο 16

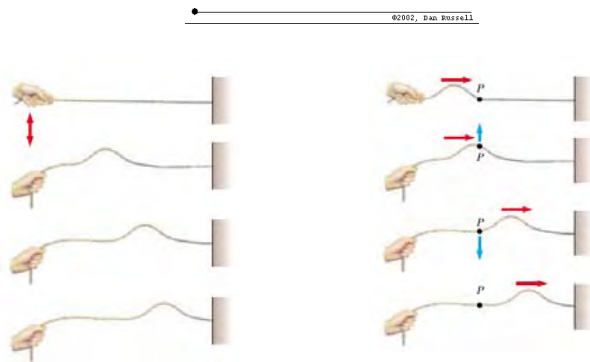
Τι είναι κύμα?



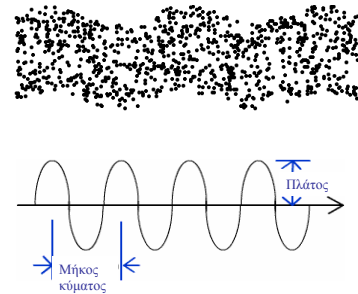
Ορισμός βιβλίου: Κύμα είναι μια διαταραχή στην κατάσταση ισορροπίας, η οποία ταξιδεύει - διαδίδεται, από μια περιοχή του χώρου σε μια άλλη.

Η έννοια του κύματος είναι αφηρημένη. Σε όλα τα κυματικά φαινόμενα υπάρχει μία **πηγή** που προκαλεί **μια χρονική εξάρτηση των συνθηκών σε κάποιο σημείο του χώρου** με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας **διαταραχής** της φυσικής κατάστασης σε αυτό το σημείο με ταυτόχρονη ύπαρξη των κατάλληλων προϋποθέσεων για την **διάδοση** της διαταραχής στον χώρο.

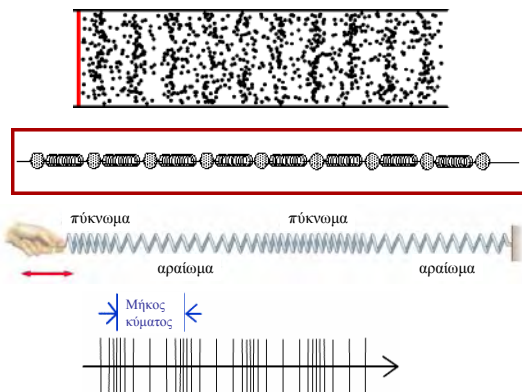
Εγκάρσιο κύμα σε νήμα υπό μηχανική τάση



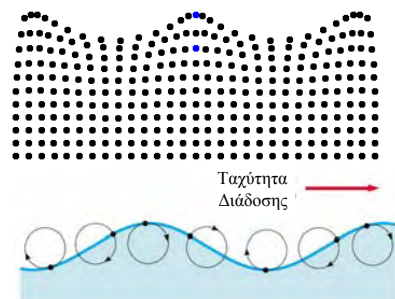
Εγκάρσια κύματα



Διαμήκη Κύματα



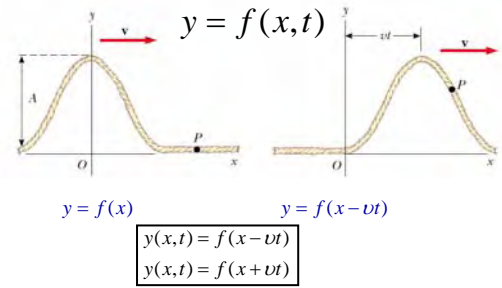
Υδάτινα κύματα



Μηχανικά Κύματα

- Αιτία διέγερσης (πηγή διαταραχής)
- Μέσον διατάραξης και διάδοσης διαταραχής
- Φυσικό μηχανισμό με τον οποίο κάθε στοιχειώδες τμήμα του μέσου «επικοινωνεί» με το γειτονικό του
- **Περιγραφή:** Θέση όλων των σημείων του διαταρασόμενου μέσου συναρτήσει του χρόνου.
- Από τι εξαρτάται η ταχύτητα διάδοσης;
- Ποια η κίνηση των σωματιδίων του μέσου;
- Μετατόπιση υλικού μέσου και διεύθυνση διάδοσης διαταραχής;
- Τι διαδίδεται; Ποιος ο μηχανισμός διάδοσης;
- Ισορροπία – διαταραχή – δυνάμεις επαναφοράς – αδράνεια

Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

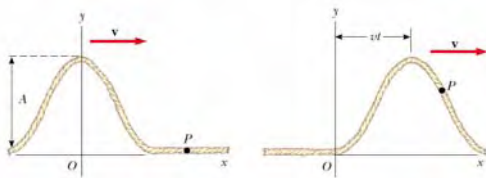


Η κυματοσυνάρτηση (κυματική συνάρτηση) $y(x,t)$ περιγράφει την εγκάρσια συντεταγμένη για κάθε στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στην θέση x , κάθε χρονική στιγμή t .

$y(x,t)$: περιγράφει την μετατόπιση της διαταραχής

Ταχύτητα κύματος

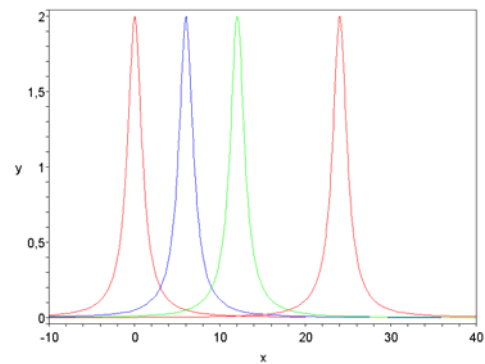
$$y(x,t) = f(x - vt)$$



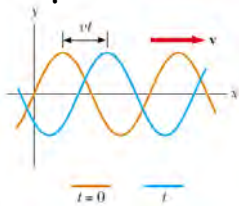
$$v = \frac{dx}{dt} : \text{ταχύτητα διάδοσης}$$

Οδεύοντα μονοδιάστατα κύματα

$$y(x,t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}, \quad t = 0, 2, 4, 8$$



Αρμονικά μονοδιάστατα κύματα

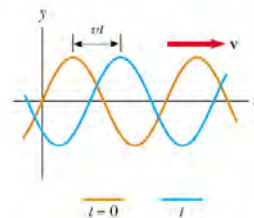


Την στιγμή $t=0$: $y = A \sin kx = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right)$

Αν το κύμα κινείται προς τα δεξιά $+x$ με ταχύτητα v η κυματοσυνάρτηση $y(x,t)$ θα έχει την μορφή:

$$y(x,t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right], \quad \lambda = vT$$

Αρμονικά (ημιτονοειδή) κύματα

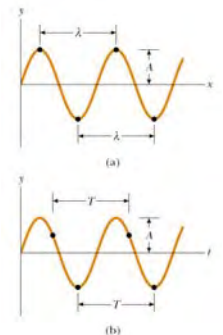


$$y = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

Πλάτος A: Η μέγιστη μετατόπιση της διαταραχής

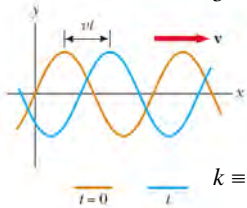
Μήκος κύματος λ: Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο συμφασικών σημείων, π.χ. η απόσταση δύο διαδοχικών κορυφών

Περίοδος T: Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το κύμα διανύει απόσταση ίση προς ένα μήκος κύματος



Αρμονικά (ημιτονοειδή) κύματα

$$y = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \Rightarrow y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$



$$y = A \sin(kx - \omega t - \phi)$$

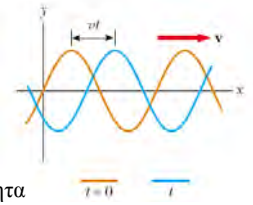
$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$, κυματριθμός ή σταθερά διάδοσης

$\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$, γωνιακή συχνότητα κύματος

<http://phet.colorado.edu/simulations/stringwave/stringWave.swf>

Φασική Ταχύτητα

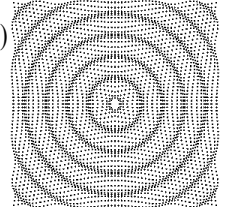
$$y = A \sin(kx - \omega t - \phi)$$



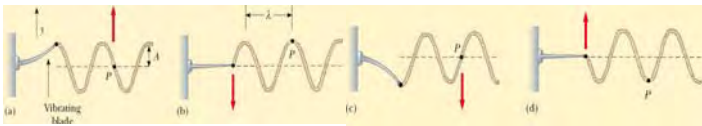
Η ταχύτητα του κύματος είναι ίση με την ταχύτητα που πρέπει να κινούμαστε ώστε να συμβαδίζουμε σταθερά με ένα σημείο φάσης

$$\text{φάση: } kx - \omega t - \phi = \text{const.} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (= \lambda f)$$

v : φασική ταχύτητα κύματος, ταχύτητα διάδοσης στον χώρο των ισοφασικών επιφανειών



Η κυματική εξίσωση



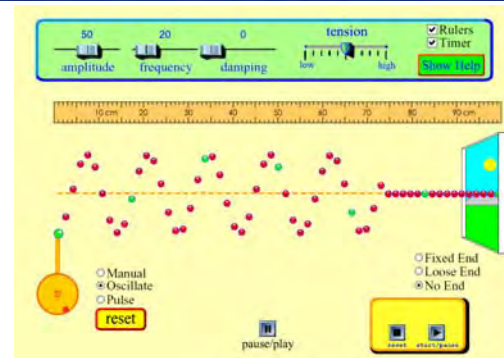
$$y = A \sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t - \phi)$$

$$\left. \begin{aligned} a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \sin(kx - \omega t - \phi) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -k^2 A \sin(kx - \omega t - \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Physics Education Technology

UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER



<http://phet.colorado.edu/simulations/stringwave/stringWave.swf>

Άσκηση 1

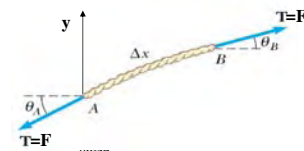
καταληκτική ημερομηνία παράδοσης: 28.03.08

Χρησιμοποιήστε την διαδικτυακή εφαρμογή στην διεύθυνση [http://phet.colorado.edu/simulations/stringWave.swf](http://phet.colorado.edu/simulations/stringwave/stringWave.swf), και επιλέξτε «oscillate» και «no end».

A. Να παραστήσετε γραφικά τις σχέσεις: $\lambda = \lambda(\omega)$, $v = v(\lambda)$ και $v = v(\omega)$ για απόσβεση (damping) $b=0$, σταθερή τάση (tension) και σταθερό (κατά προτίμηση «μικρό») πλάτος (amplitude). Τι συμπεράσματα βγάξετε για την ταχύτητα v ; Αποδίδει σωστά η διαδικτυακή εφαρμογή τις ιδιότητες των (γραμμικών) αρμονικών κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος εκτεταμένου νήματος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Υπόδειξη: Για 3-5 διαφορετικές τιμές της συχνότητας ω (frequency [rad/sec]), «μετρήστε» τα αντίστοιχα μήκη κύματος λ [m]. Από την γραφική παράσταση $\lambda = \lambda(\omega)$ υπολογίστε γραφικά την (φασική) ταχύτητα v .)

B. Διατηρώντας σταθερή την τιμή της συχνότητας ω (κατά προτίμηση σχετικά «χαμηλή»), επιλέξτε «τυχαία» 3-5 (άγνωστες) διαφορετικές τιμές της τάσης (tension) και προσδιορίστε «πειραματικά» την ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος. Χρησιμοποιώντας την σχέση $v = (F/\mu)^{1/2}$ προσδιορίστε τις τιμές της τάσης που «τυχαία» επιλέξατε. Δίνεται $\mu = 1.0 \text{ gr/m}$. Να αποδώσετε γραφικά την σχέση $v = v(F)$. (Υπόδειξη: Εδώ πρέπει να θεωρήσουμε ότι η εφαρμογή αναπαράγει σωστά τις ιδιότητες των αρμονικών κυμάτων)

Ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιου κύματος



$$\sum F_y = F \sin \theta_B - F \sin \theta_A = F (\tan \theta_B - \tan \theta_A) = F \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right]$$

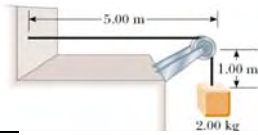
$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A}{\Delta x} \Delta x \rightarrow \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}: \quad \text{η κυματική εξίσωση με} \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

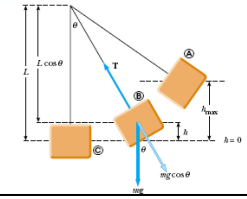
Ασκήσεις

Βρείτε την ταχύτητα διάδοσης παλμού στο νήμα του σχήματος

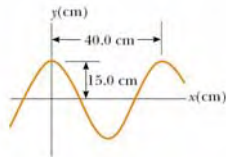


Αν το σώμα μάζας m εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας του πλάτους $\theta = \theta_0$, βρείτε το εύρος των τιμών που λαμβάνει η ταχύτητα διάδοσης του παλμού στο νήμα.

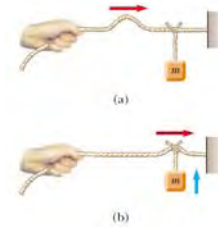
Νήμα ολικής μάζας m αναρτάται από σταθερό σημείο και ισορροπεί κατακόρυφα. Αποδείξτε ότι ένας εγκάρσιος παλμός θα διανύσει το μήκος του νήματος σε χρόνο $t = 2(L/g)^{1/2}$



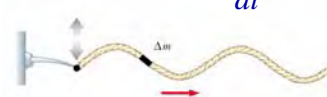
Βρείτε τον κυματικό αριθμό, την περίοδο, την κυκλική συχνότητα και την ταχύτητα φάσης του ημιτονοειδούς κύματος του σχήματος. Γράψτε την κυματοσυνάρτηση που το περιγράφει. Δίνεται $f = 8\text{Hz}$.



Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας αρμονικών εγκάρσιων κυμάτων



$$P = \frac{dE}{dt} \quad E \text{ (Joule)}, \quad P \text{ (Watt)}$$



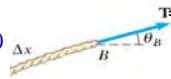
Κυματική ισχύς εγκάρσιου κύματος

$$F_y = -F \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(\omega t - kx)$$

$$\text{Ισχύς: } P = F_y v_y = -F \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(\omega t - kx)$$



$$P = Fk\omega A^2 \cos^2(\omega t - kx) = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

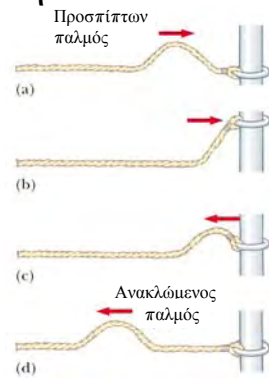
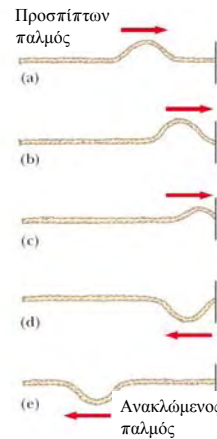
$$P_{\max} = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

$$\left(v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \right)$$

$$\bar{P} = P_{\text{av}} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu} \omega^2 A^2 v$$

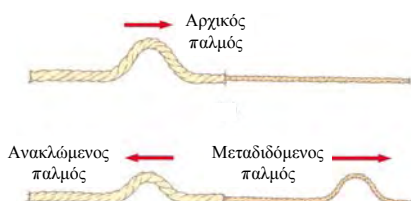
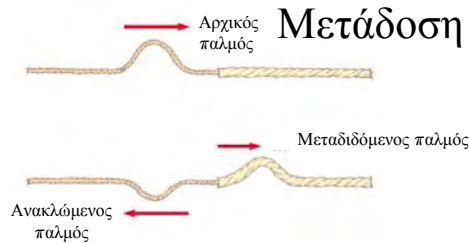
Η ισχύς που μεταφέρουν τα αρμονικά κύματα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της συχνότητας και το τετράγωνο του πλάτους τους.

Ανάκλαση



<http://phet.colorado.edu/simulations/stringwave/stringWave.swf>

Μετάδοση



Μετάδοση-Ανάκλαση

Όταν ένα κύμα ή ένας παλμός οδεύει από ένα μέσο A σε ένα μέσο B με $v_A > v_B$ (το B είναι πυκνότερο μέσο από το A), ο ανακλώμενος παλμός είναι ανεστραμμένος.

Όταν το μέσο A είναι πυκνότερο του B ($v_A < v_B$) ο ανακλώμενος παλμός δεν είναι ανεστραμμένος.

Σε κάθε περίπτωση, ο μεταδιδόμενος παλμός δεν είναι ανεστραμμένος.