Ροπογεννήτρια (Moment Generating Function)

Ορισμός: Ως ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής *X* ορίζεται για κάθε $t \in \mathbf{R}$:

$$\Phi(t) = E\left(e^{tx}\right) = \begin{cases} \sum_{\forall x} e^{tx} P(X = x), & \text{X διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & \text{X συνεχής} \end{cases}$$

Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται ροπογεννήτρια διότι παράγει τις ροπές της τυχαίας μεταβλητής *X* μέσω παραγώγησης στο σημείο t=0.

$$\frac{d\Phi(t)}{dx} = \left(E\left(e^{tx}\right)\right)' = \left(\sum_{\forall x} e^{tx} P(X = x)\right)' = \sum_{\forall x} x e^{tx} P(X = x)$$

Άρα για t=0 $\Phi'(0) = \sum_{\forall x} xP(X = x) = E(X)$.

Η δεύτερη παράγωγος στο σημείο t=0 θα μας δώσει την $E\left(X^2\right)$, κ.ο.κ.

Παράδειγμα

Διωνυμική Κατανομή $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$\Phi(t) = E\left(e^{tx}\right) = \sum_{\forall x} e^{tx} P(X = x)$$

$$= \sum_{\forall x} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(e^t p\right)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \left(e^t p + 1 - p\right)^n$$

$$\Phi'(t) = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

$$\Phi''(t) = n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} \left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t$$

$$E(X) = \Phi'(0) = np$$

$$E\left(X^2\right) = \Phi''(0) = np(1-p)$$