Στοιχεία Πιθανοτήτων

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Στέφανος Γιακουμάτος

Τυχαίο Πείραμα

Είναι ένα πείραμα του οποίου η κατάληξη (αποτέλεσμα) δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων

Παραδείγματα

- Το φύλο ενός νεογέννητου
- Το αποτέλεσμα ενός νέου φαρμάκου
- Το αποτέλεσμα που θα φέρει το ζάρι
- Η τυχερή εξάδα του Λόττο

Δειγματοχώρος

- Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος αποτελούν το δειγματοχώρο που συμβολίζεται με **S ή Ω**

Παραδείγματα

•Ο δειγματικός χώρος για το φύλο ενός παιδιού είναι:
Ω={Αγόρι, Κορίτσι}

•Ο δειγματικός χώρος της ρήψης ενός ζαριού είναι:
Ω={1,2,3,4,5,6}

•Ο δειγματικός χώρος για την διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα είναι:
Ω={0, +∞}

Ενδεχόμενα

- Κάθε δυνατό αποτέλεσμα, δηλαδή κάθε σημείο ενός δειγματοχώρου, λέγεται **απλό ενδεχόμενο** ή **απλό γεγονός**
- Ένα υποσύνολο του δειγμαχώρου που αποτελείται από ένα ή παραπάνω απλά ενδεχόμενα, ονομάζεται **ενδεχόμενο** ή **γεγονός**

Παραδείγματα

- Ο δειγματικός χώρος για το φύλο ενός παιδιού είναι το σύνολο Ω={Αγόρι, Κορίτσι} και αποτελείται από δύο απλά ενδεχόμενα:
  1. Αγόρι
  2. Κορίτσι

- Ο δειγματικός χώρος της ρήψης ενός ζαριού είναι ο Ω={1,2,3,4,5,6} και αποτελείται από 6 απλά ενδεχόμενα: 1 2 3 4 5 6
  - Έστω Α={Το ζάρι να φέρει αριθμό μεγαλύτερο από τέσσερα}. Το Α είναι ενδεχόμενο και αποτελείται από 2 απλά ενδεχόμενα Α={5,6}
  - Έστω Β={Το ζάρι να φέρει 6}. Το Β είναι ενδεχόμενο και αποτελείται από ένα απλό ενδεχόμενο

Τύποι Δειγματοχώρων

- **Διακριτοί Δειγματοχώροι:** είναι οι δειγματοχώροι που έχουν <u>πεπερασμένο</u> ή <u>αριθμήσιμο</u> πλήθος απλών ενδεχομένων
  - Ο αριθμός παιδιών σε μία οικογένεια: Ω={0,1,2,3,…}
- **Συνεχείς Δειγματοχώροι:** είναι οι δειγματοχώροι που έχουν <u>μη αριθμήσιμο</u> πλήθος απλών ενδεχομένων
  - Το εισόδημα μίας οικογένεια: Ω={R^+ }
  - Η διάρκεια ζωής μίας συσκευής S={R^+ }

Βασικές Πράξεις Ενδεχόμενων
(Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων)

Έστω ο δειγματοχώρος $S=\{a,b,c,d,e,f\}$

και ενδεχόμενα: $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,d,e\}$, $C=\{e,f\}$, $D=\{c,d\}$

- Ένωση (union): $A \cup B=\{a,b,c,d,e\}$, $B \cup D=\{c,d,e\}$
- Τομή (intersection): $A \cap B=\{c\}$, $B \cap D=\{c,d\}$, $A \cap C=\{\ \}=\emptyset$ κενό σύνολο.
- Συμπλήρωμα του ενδεχομένου A καλείται το ενδεχόμενο A′ το οποίο περιέχει τα απλά ενδεχόμενα του S τα οποία δεν περιέχονται στο A

  $B'=\{a,b,f\}$, $D'=\{a,b,e,f\}$

  Άσκηση: a) $C' \cup C=$__, b) $B \cap B'=$__

- Ο δειγματοχώρος Ω είναι και αυτός ένα ενδεχόμενο και ονομάζεται **βέβαιο γεγονός**
- Το ενδεχόμενο που δεν περιέχει κανένα από ενδεχόμενο, δηλαδή το ø, ονομάζεται **αδύνατο γεγονός**

Ασυμβίβαστα και Ανεξάρτητα Γεγονότα

- Δύο γεγονότα Α, Β ονομάζονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** όταν η πραγματοποίηση τους ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Αυτό σημαίνει:

$$A, B \text{ ασυμβίβαστα} \leftrightarrow A \cap B = AB = \emptyset$$

- Δύο γεγονότα είναι **στοχαστικά ανεξάρτητα** όταν η πραγματοποίηση του γεγονότος Α δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του γεγονότος Β και αντίστροφα

  π.χ. το φύλο του δεύτερου παιδιού δεν επηρεάζεται από την ηλικία του πρώτου παιδιού

Πιθανότητα κατά Laplace

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο της διαίρεσης του πλήθους των απλών ενδεχομένων που αποτελούν το ενδεχόμενο δια του πλήθους των απλών ενδεχομένων που αποτελούν των δειγματοχώρο

  - Το ζάρι να φέρει 2 ή 6

  Ο δειγματοχώρος είναι S={1,2,3,4,5,6} και

  Α={ το αποτέλεσμα να είναι 2 ή 6}={2,6} ↔ P(A)=2/6

Πιθανότητα σαν όριο σχετικής συχνότητας (Von Mises)

- Αν στις N επαναλήψεις ενός πειράματος ένα γεγονός A εμφανιστεί N_A φορές, τότε το πηλίκο N_A/N ονομάζεται (σχετική συχνότητα) του γεγονότος A. Όσο το N μεγαλώνει τόσο η σχετική συχνότητα σταθεροποιείται γύρο από έναν αριθμό που ονομάζεται **πιθανότητα του ενδεχομένου A**

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov, 1930)

- Η πιθανότητα είναι μία συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα
  i. $P(S)=1$
  ii. $0 \leq P(A) \leq 1$, για κάθε A υποσύνολο του S
  iii. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$, όταν τα ενδεχόμενα ανά δύο είναι ασυμβίβαστα

Ασκήσεις

Αποδείξτε

1. $P(A')=1-P(A)$
2. $P(\emptyset)=0$
3. $A\cap B=\emptyset \rightarrow P(A\cap B)=0$
4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Η πιθανότητα του Β όταν έχει συμβεί το Α ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του Β και δίνεται από:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Πολλαπλασιαστικός Νόμος

- $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) =$

$P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) * \ldots * P(A_k/A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})$

- Αν ισχύει $P(B/A) = P(B)$, τότε A και B είναι στοχαστικά ανεξάρτητα και $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Τύπος Bayes

- Αν A και B είναι δύο γεγονότα με P(B)>0 τότε

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\right)P\left(B/A\right)}{P(B)}$$

Θεώρημα κατά Bayes

Αν $B \subseteq S$ κκα

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n ,$$

δηλαδή $\forall\ i \neq j\ A_i \cap A_j = \varnothing$

τότε μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$P\left(A_k / B\right) = \frac{P\left(A_k B\right)}{P\left(B\right)}$$

$$= \frac{P\left(A_k\right)P\left(B / A_k\right)}{P\left(A_1\right)P\left(B / A_1\right) + \ldots + P\left(A_n\right)P\left(B / A_n\right)}$$

- $P(A_k)$ είναι η εκ των προτέρων πιθανότητα του A_k
- $P(A_k/B)$ είναι η εκ των υστέρων πιθανότητα του A_k δοθέντος ότι το B έχει συμβεί

Συνδυαστική

Διατάξεις

- Όταν έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα και τοποθετούμε στη σειρά r από αυτά τα αντικείμενα τότε έχουμε μία **διάταξη** των r αντικειμένων
- Το πλήθος όλων των διαφορετικών διατάξεων r αντικειμένων από τα n, συμβολίζεται με $\mathbf{(n)_r}$
- $\mathbf{(n)_r=n(n-1)\ldots(n-r+1)}$
- Αν r=n, τότε έχουμε μεταθέσεις, $(n)_n=n(n-1)\ldots2*1=n!$
- Άσκηση: με τους αριθμούς 1,2,3 μπορώ να κάνουμε 3!=6 διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς
- Άσκηση: με τους αριθμούς 1,2,3,4,5 μπορώ να κάνω $(4)_2=12$ διαφορετικούς διψήφιους αριθμούς

Διατάξεις με επαναλήψεις

- Όταν καθένα από τα n αντικείμενα μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε, τότε έχουμε **διατάξεις με επαναλήψεις r** αντικειμένων από τα n και το πλήθος τους είναι:
- $n*n*...*n=n^r$
- Παράδειγμα: μπορούμε να συμπληρώσουμε 3^{13} στήλες στο ΠΡΟΠΟ

Συνδυασμοί

- Αν από τα n διαφορετικά αντικείμενα πάρουμε r χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους αλλά μόνο ποια αντικείμενα πήραμε, τότε έχουμε **συνδυασμούς** των n ανά r αντικειμένων και το πλήθος τους είναι:

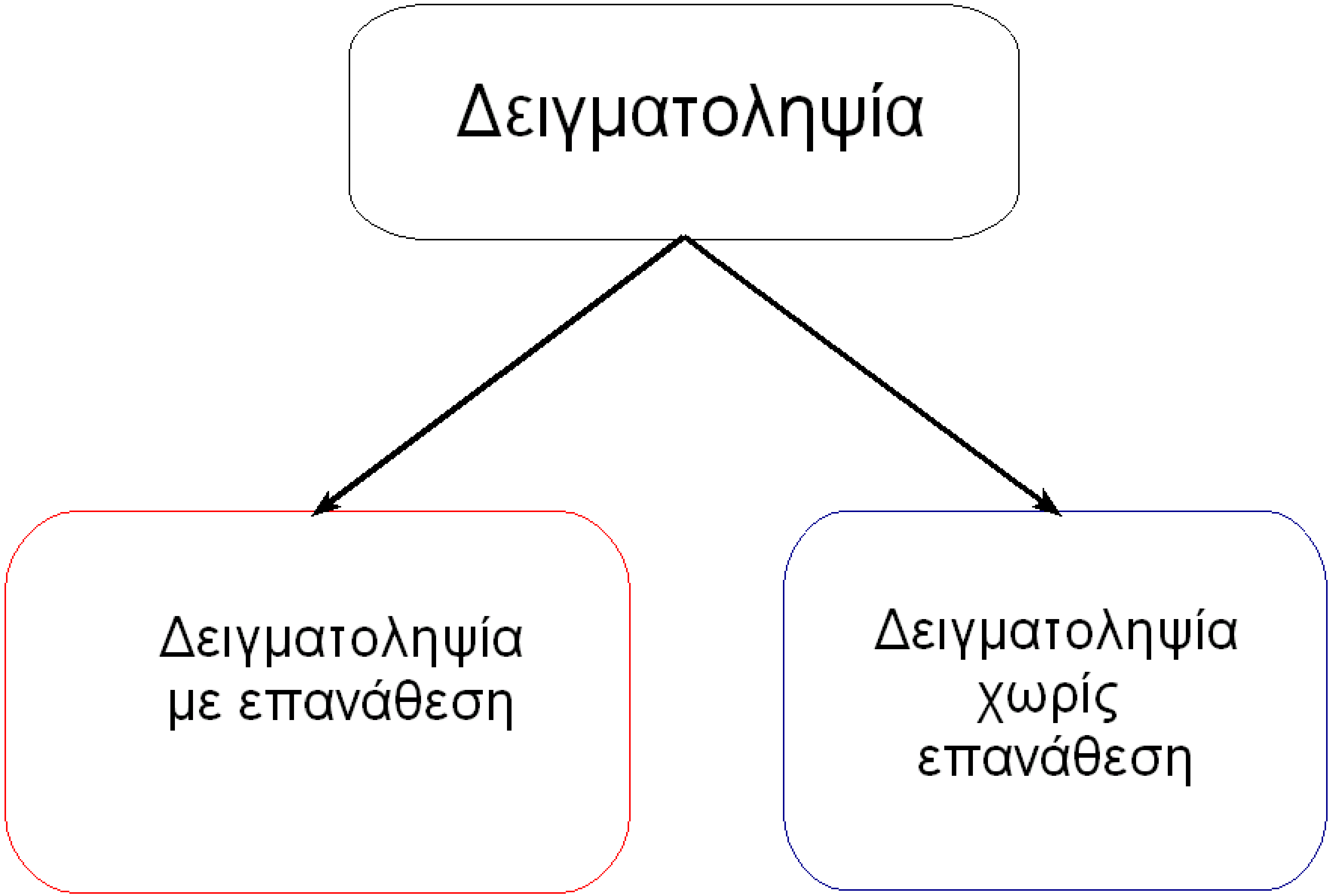
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Π.χ. το πλήθος των εξάδων που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΛΟΤΤΟ είναι περίπου 14.000.000

Μεταθέσεις με όμοια αντικείμενα

- Αν τα n αντικείμενα δεν είναι όλα διαφορετικά αλλά r_1 είναι ίδια, r_2 είναι ίδια κτλ, έτσι ώστε $r_1+r_2+\ldots+r_k=n$
- Οι διαφορετικές μεταθέσεις είναι

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \cdots r_k!}$$


Δειγματοληψία
Δειγματοληψία με επανάθεση
Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση

Τυχαίο Δείγμα

- Με την φράση τυχαίο δείγμα μεγέθους n από έναν πληθυσμό μεγέθους N, εννοούμε ότι η δειγματοληψία γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα δείγματα μεγέθους r να έχουν ίση πιθανότητα να επιλεγούν