ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Προσαρμοσμένο Φίλτρο και Δυαδικοί Δέκτες

ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Χειμερινό Εξάμηνο

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

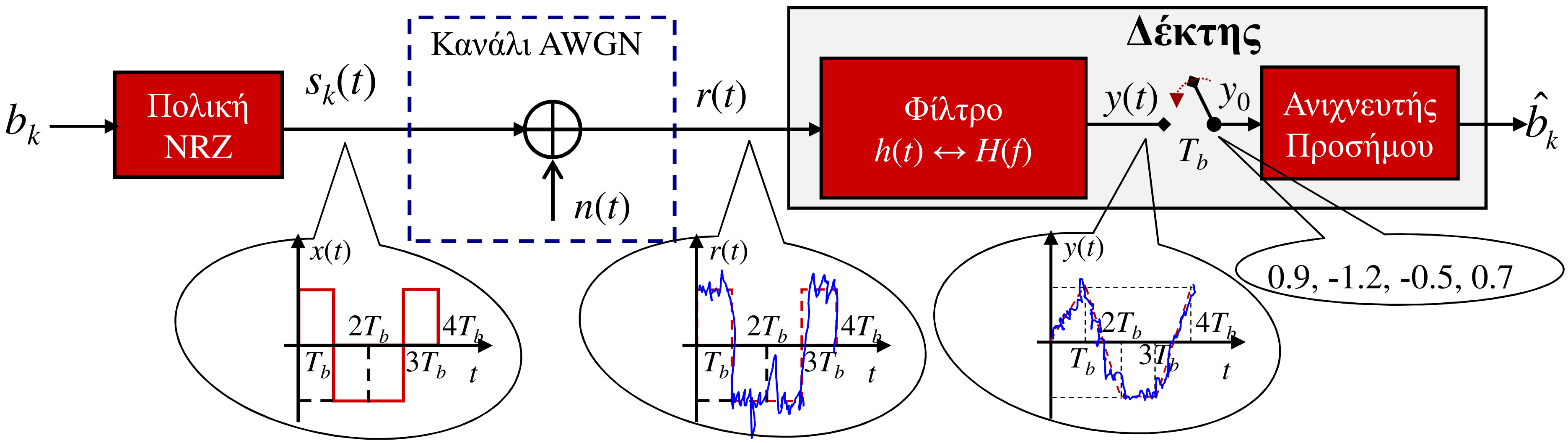
Νικόλαος Χ. Σαγιάς
Καθηγητής
Webpage: http://eclass.uop.gr/courses/TST215
e-mail: nsagias@uop.gr

12/10/2020 1:51:41 πμ

Περιεχόμενα Μαθήματος

- Εισαγωγικά
  - Θόρυβος AWGN
  - Βασικές παράμετροι και περιορισμοί
- Διαμόρφωση Βασικής Ζώνης
  - Κώδικες γραμμής
  - Διαμόρφωση πλάτους παλμών (PAM)
  - Διαμόρφωση θέσης παλμών (PPM)
- Κανάλια Περιορισμένου Εύρους Ζώνης
  - Διασυμβολική παρεμβολή
  - Φίλτρα Nyquist
  - Διάγραμμα οφθαλμού
  - Παλμοί ελεγχόμενης ISI
- Βέλτιστοι Δέκτες
  - Προσαρμοσμένο φίλτρο
  - Δέκτες δυαδικής διαμόρφωσης
- Σχεδίαση Βέλτιστου Δέκτη
  - Άλγεβρα Σημάτων
  - Αποδιαμορφωτές
  - Ανιχνευτές
  - Επιδόσεις συστημάτων
- Διαμόρφωση Διέλευσης Ζώνης
  - Σύμφωνο: ASK, FSK, PSK, QAM
  - Ασύμφωνο: DPSK, FSK

Προσαρμοσμένο Φίλτρο



- Ο πομπός κάθε T_b εκπέμπει έναν NRZ παλμό $+p(t)$ ή $-p(t)$, για bit $b_k = 1$ και 0, αντίστοιχα
- Το κανάλι αλλοιώνει τους παλμούς με προσθετικό θόρυβο με το σήμα στη λήψη να είναι

$$r(t) = \pm p(t) + n(t)$$

- Η ενέργεια του $p(t)$ είναι E_p, ενώ ο θόρυβος $n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ είναι Gaussian
- Ο δέκτης αποτελείται από φίλτρο, δειγματολήπτη και ανιχνευτή προσήμου (*sign detector*)
- Το σήμα διέρχεται από φίλτρο κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και δειγματοληπτείται κάθε T_b
- Με βάση το πρόσημο του $y_0 = y(t = T_b)$, ο ανιχνευτής αποφασίζει ποιος παλμός εκπέμφθηκε

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου λήψης θα είναι

$$y(t) = h(t) * [\pm p(t) + n(t)]$$
$$= \pm h(t) * p(t) + h(t) * n(t) = \pm p_0(t) + n_0(t)$$

- Αφού δειγματοληπτηθεί τη χρονική στιγμή $t = T_b$ στην είσοδο του ανιχνευτή θα έχουμε

$$y_0 = y(T_b) = \pm p_0(T_b) + n_0(T_b) = \pm A + v$$

- Το $A = p_0(T_b)$ είναι μια σταθερή τιμή, αφού το $p_0(t) = h(t) * p(t)$ είναι η συνέλιξη δύο σταθερών συναρτήσεων, ενώ αποδεικνύεται ότι το $\nu \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$ είναι επίσης Gaussian

- Θεωρώντας ισοπίθανα bit 0 και 1, ο ανιχνευτής προσήμου αποφαίνεται σχετικά με το αν εκπέμφθηκε θετικός ή αρνητικός παλμός βάσει του προσήμου του $y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} +p(t), & \text{αν } y_0 \geq 0 \\ -p(t), & \text{αν } y_0 < 0 \end{cases}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Αν υποθέσουμε ότι εκπέμφθηκε θετικός παλμός, η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα είναι

$$P_+ = \mathbb{P}\{y_0 < 0| + A\} = \mathbb{P}\{A + \nu < 0\} = \mathbb{P}\{\nu < -A\} = \mathbb{P}\{\nu \geq A\} = Q\left(\frac{A}{\sigma_\nu}\right)$$

- Αν υποθέσουμε ότι εκπέμφθηκε αρνητικός παλμός, η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα είναι

$$P_- = \mathbb{P}\{y_0 \geq 0| - A\} = \mathbb{P}\{-A + \nu \geq 0\} = \mathbb{P}\{\nu \geq A\} = Q\left(\frac{A}{\sigma_\nu}\right)$$

- Δεδομένου ότι τόσο το bit 1 (και συνεπώς οι θετικοί παλμοί), όσο και το bit 0 (και συνεπώς οι αρνητικοί παλμοί) εκπέμπονται με πιθανότητα 1/2, η πιθανότητα σφάλματος bit προκύπτει από το θεώρημα ολικής πιθανότητας ως εξής

$$P_{be} = \mathbb{P}(1)\mathbb{P}\{y_0 < 0| + A\} + \mathbb{P}(0)\mathbb{P}\{y_0 \geq 0| - A\} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma_\nu}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{A}{\sigma_\nu}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma_\nu}\right)$$

- Η συνάρτηση Q είναι γνησίως φθίνουσα και άρα για να ελαχιστοποιηθεί η P_{be} πρέπει να μεγιστοποιηθεί το $\gamma = A/\sigma_\nu$ υλοποιώντας τη βέλτιστη (*optimum*) σχεδίαση της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου λήψης $h(t)$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Διατύπωση προβλήματος: Ποια είναι η μορφή της $h(t)$ που μεγιστοποιεί το

$$\gamma^2 = \frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_\nu^2}$$

- Συμπωματικά, το γ^2 είναι ο λόγος της μέσης ισχύος σήματος προς την μέση ισχύς του θορύβου (*signal-to-noise ratio* – SNR) τη χρονική στιγμή T_b

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Αποδεικνύεται, ότι το SNR γράφεται

$$\gamma^2 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f)\, df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, \mathrm{d}f}$$

με

$$Y(f) \triangleq \sqrt{\frac{2}{N_0}} P(f) \exp(j2\pi f T_b) \quad \text{και} \quad X(f) = H(f)\sqrt{\frac{N_0}{2}}$$

- Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz το SNR γίνεται

$$\gamma^2 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f)\, df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, \mathrm{d}f} \leq \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df}{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, \mathrm{d}f}} = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

- Συνεπώς, το SNR γράφεται

$$\gamma^2 \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2\, df$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Η μέγιστη τιμή είναι το ίσον στην παραπάνω ανισότητα και προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz για $X(f) = k\, Y^*(f)$, με k μία αυθαίρετη σταθερά, δηλαδή για

$$H(f)\sqrt{\frac{N_0}{2}} = k\frac{P(-f)\exp(-j2\pi f T_b)}{\sqrt{N_0/2}} \Leftrightarrow H(f) = k\frac{P(-f)\exp(-j2\pi f T_b)}{N_0/2}$$

- Η $H(f)$ που βρέθηκε είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μεταφοράς του προσαρμοσμένου φίλτρου (*matched filter*)

- Παρατηρούμε ότι η $H(f)$ εξαρτάται από:
  - Το σχήμα του παλμού $P(f)$
  - Τη φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου
  - Τη χρονική στιγμή δειγματοληψίας T_b

- Η σταθερά k ενισχύει το ίδιο το σήμα και το θόρυβο και συνεπώς δεν επηρεάζει το SNR

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Με E_p την ενέργεια του παλμού $p(t)$, το μέγιστο SNR είναι

$$\gamma^2 = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 \, df = \frac{2\,E_p}{N_0}$$

- Θέτοντας $k = N_0/2$, η χαρακτηριστική συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου γίνεται

$$H(f) = P(-f) \exp(-j2\pi f T_b)$$

- Στο πεδίο του χρόνου, η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} P(-f) \exp(-j2\pi f T_b) \exp(j2\pi f t)\, \mathrm{d}f$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(-f) \exp[j2\pi(-f)(T_b - t)]\, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \exp[j2\pi x(T_b - t)]\, \mathrm{d}x \Leftrightarrow$$

$$h(t) = p(T_b - t)$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

- Σύνοψη Αποτελεσμάτων: Σε περιβάλλον λευκού θορύβου και ισοπίθανα bit 0 και 1, η πιθανότητα σφάλματος bit είναι

$$P_{be} = Q\left(\frac{2\,E_p}{N_0}\right)$$

- Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι με το προσαρμοσμένο φίλτρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιασδήποτε μορφής παλμός ενέργειας E_p
- Το μέγιστο SNR, δειγματοληπτώντας και μετρώντας το τη χρονική στιγμή $t = T_b$, είναι

$$\gamma^2 = \frac{2\,E_p}{N_0}$$

- Το προσαρμοσμένο φίλτρο λήψης έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = p(T_b - t)$$

- Το προσαρμοσμένο φίλτρο λήψης έχει χαρακτηριστική συνάρτηση μεταφοράς

$$H(f) = P(-f)\exp(-j2\pi f T_b)$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο

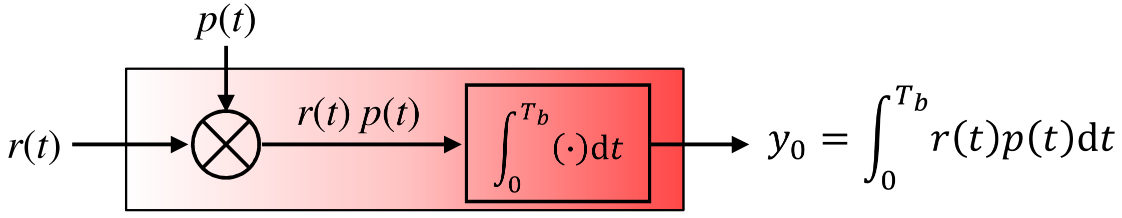
- Το προσαρμοσμένο φίλτρο μπορεί να υλοποιηθεί εναλλακτικά παρέχοντας ίδιες επιδόσεις
- Αν στην είσοδο του φίλτρου λήψης έχουμε σήμα $r(t)$, στην έξοδο θα έχουμε

$$y(t) = h(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

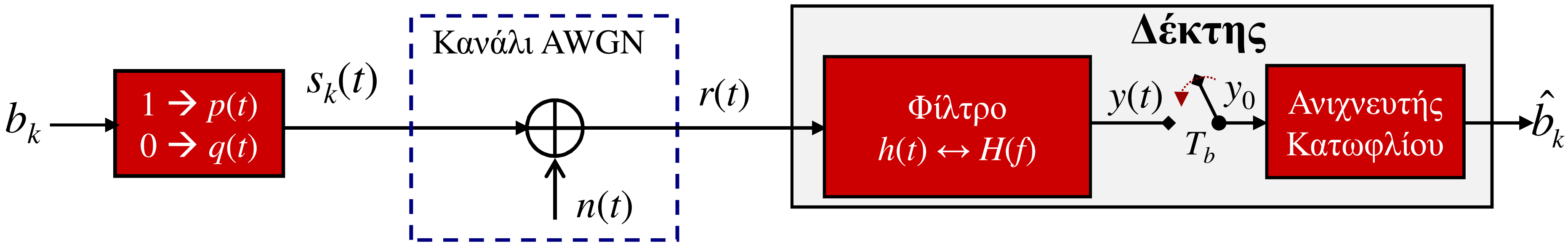
- Δεδομένου ότι $h(t) = p(T_b - t)$, η $h(t-\tau)$ γράφεται $h(t-\tau) = p[T_b - (t-\tau)] = p(\tau + T_b - t)$
- Κατά τη χρονική στιγμή δειγματοληψίας $t = T_b$ και δεδομένου ότι το $r(t)$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή 0, ενώ το $p(t) = 0$ για $t > T_b$, προκύπτει

$$y_0 = y(T_b) = \int_{0}^{T_b} r(\tau)p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Η παραπάνω σχέση εκφράζει την [ετεροσυσχέτιση](#) (*crosscorrelation*) μεταξύ $r(t)$ και $p(t)$ και η αντίστοιχη υλοποίηση λέγεται συσχετιστής (*correlator*)



Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης



- Ο πομπός κάθε T_b εκπέμπει έναν παλμό $s_k(t) = p(t)$ ή $q(t)$, για bit $b_k = 1$ και 0, αντίστοιχα
- Το κανάλι αλλοιώνει τους παλμούς με θόρυβο $n(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ και στη λήψη έχουμε

$$r(t) = s_k(t) + n(t)$$

- Ο δέκτης περιλαμβάνει φίλτρο, δειγματολήπτη και ανιχνευτή κατωφλίου (*threshold detector*)
- Ο ανιχνευτής πρέπει να αναγνωρίσει ποιος μεταξύ των παλμών $p(t)$ ή $q(t)$ εκπέμφθηκε
- Κατά την εκπομπή των παλμών των $p(t)$ και $q(t)$ στη δειγματοληψία θα έχουμε

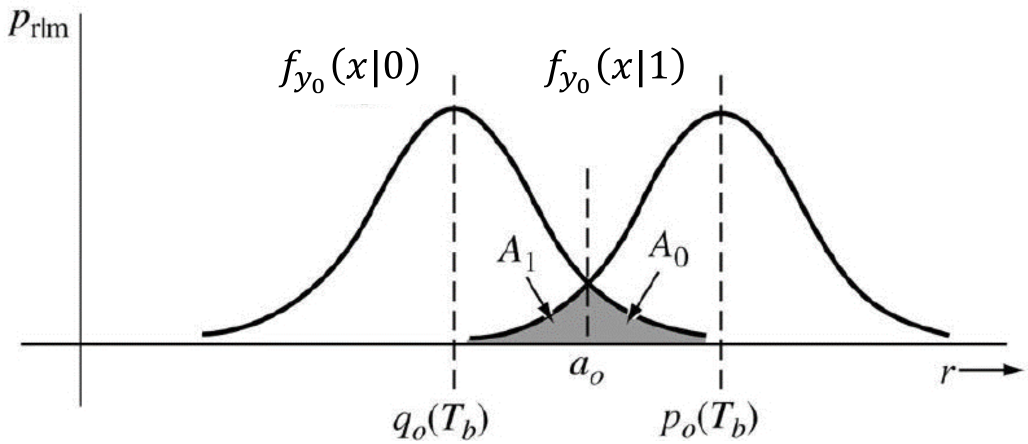
$$y_p(T_b) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)\exp(j2\pi f T_b)\,\mathrm{d}f \quad \text{και} \quad y_q(T_b) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)H(f)\exp(j2\pi f T_b)\,\mathrm{d}f$$

- Ο φιλτραρισμένος θόρυβος $v(t) = h(t) * n(t)$ είναι Gaussian μηδενικής μέσης τιμής και ισχύος

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

- Με a_0 συμβολίζουμε το κατώφλι απόφασης μεταξύ των τιμών $q_0(T_b)$ και $p_0(T_b)$
- Για παλμό $p(t)$, στην είσοδο του ανιχνευτή $y_0 = p_0(T_b) + \nu$ και άρα $y_0 \sim \mathcal{N}(p_0(T_b), \sigma_\nu^2)$
- Αντίστοιχα, για παλμό $q(t)$, $y_0 = q_0(T_b) + \nu$ και άρα $y_0 \sim \mathcal{N}(q_0(T_b), \sigma_\nu^2)$



- Η πιθανότητα σφάλματος bit είναι

$$P_{be} = \mathbb{P}\{1\}\mathbb{P}\{y_0 < a_0 | p(t)\} + \mathbb{P}\{0\}\mathbb{P}\{y_0 \geq a_0 | q(t)\} = \frac{1}{2}(A_1 + A_0) = \cdots = Q\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

- Για να ελαχιστοποιήσουμε το P_{be}, βάσει της ανισότητας Cauchy-Schwarz, προκύπτει

$$\gamma^2 = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f) - Q(f)|^2 \mathrm{d}f$$

- Για λευκό θόρυβο, η χαρακτηριστική συνάρτηση μεταφοράς του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$H(f) = [P(-f) - Q(-f)] \exp(-j2\pi f T_b)$$

- Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$, η κρουστική απόκριση του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t)$$

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval

$$\gamma^2 = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |P(f) - Q(f)|^2\, df = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} [p(t) - q(t)]^2\, df = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N_0/2}$$

- Τα E_p και E_q είναι οι ενέργεια των παλμών $p(t)$ και $q(t)$, ενώ το E_{pq} εκφράζει την ετεροσυσχέτιση μεταξύ των $p(t)$ και $q(t)$

$$E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)\, q(t)\, \mathrm{d}t$$

- Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση για το γ στην $P_{be} = Q(\gamma/2)$ προκύπτει ότι

$$P_{be} = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2\,N_0}}\right)$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ γενικό, δίδοντας την πιθανότητα σφάλματος bit για μία μεγάλη γκάμα δυαδικών διαμορφώσεων όπως PAM, on/off, PPM, ASK, PSK, FSK

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

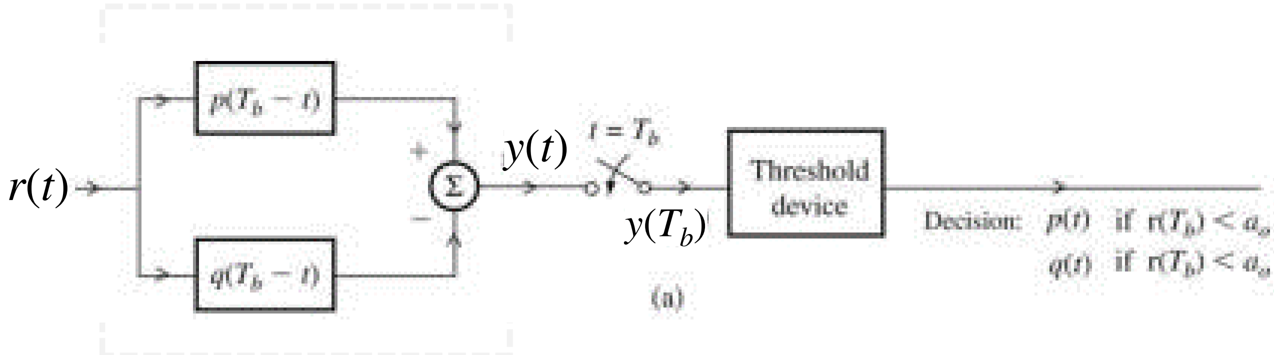
- Τέλος, προκύπτει ότι το κατώφλι απόφασης εναλλακτικά γράφεται

$$a_0 = \frac{E_p - E_q}{2}$$

- Η δομή του ανιχνευτή κατωφλίου είναι η βέλτιστη ως προς την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας σφάλματος και δεν υπάρχει άλλη δομή που να παράσχει καλύτερες επιδόσεις

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

- Λόγω της μορφής της $h(t)$, το φίλτρο μπορεί να υλοποιηθεί από δύο παράλληλα φίλτρα
- Στην 1η υλοποίηση η έξοδος των δύο φίλτρων αφαιρείται

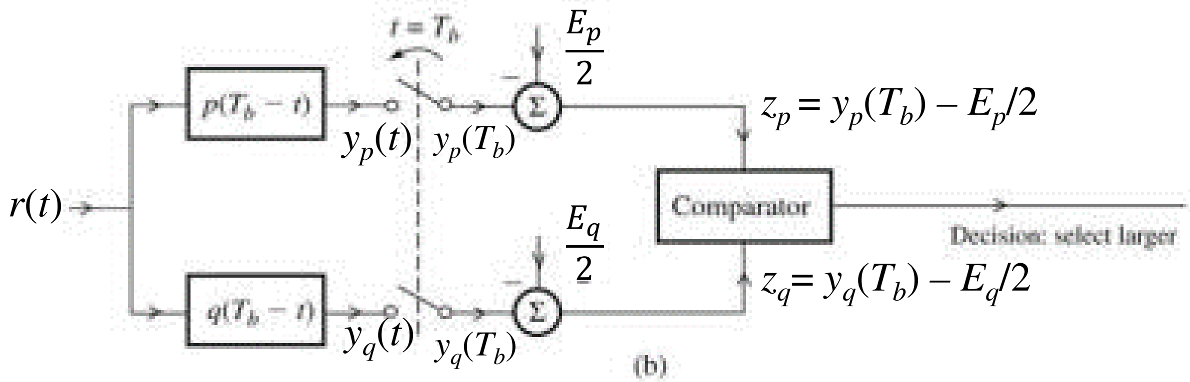


- Η στατιστική παραμένει ίδια όπως στην αρχική υλοποίηση, αφού μετά τον αφαιρέτη

$$y(t) = h(t)$$

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

- Στη 2η υλοποίηση, λόγο μορφής του a_0, μετά τη δειγματοληψία αφαιρείται $E_p/2$ και $E_q/2$ από κάθε κλάδο, προκειμένου να δημιουργηθεί στατιστική με συμμετρία γύρω από το 0

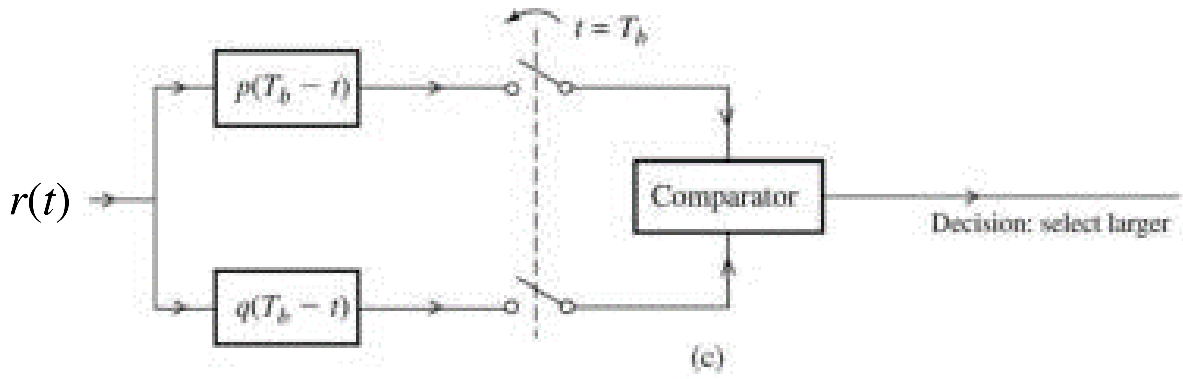


- Ο ανιχνευτής κατωφλίου αντικαταστάθηκε από έναν συγκριτή (*comparator*), ο οποίος αποφαίνεται ποιο από τα z_p και z_q είναι μεγαλύτερο και αποφασίζει αντίστοιχα υπέρ του $p(t)$ ή του $q(t)$
- Η στατιστική παραμένει ίδια όπως στην αρχική υλοποίηση, αφού για παράδειγμα η πιθανότητα σφάλματος bit, με δεδομένο ότι εκπέμφθηκε ο παλμός είναι

$$P_{e1} = \mathbb{P}\{z_p < z_q | p(t)\} = \mathbb{P}\left\{y_p(T_b) - \frac{E_p}{2} < y_q(T_b) - \frac{E_q}{2} | p(t)\right\} = \mathbb{P}\{y_p(T_b) - y_q(T_b) < a_0 | p(t)\} = \mathbb{P}\{y_0(T_b) < a_0 | p(t)\}$$

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης

- Η 3η υλοποίηση μπορεί ισοδύναμα και απλούστερα σε σχέση με τη 2η να πραγματοποιηθεί στην περίπτωση που οι δύο παλμοί έχουν μεταξύ τους ίδια ενέργεια, δηλαδή $E_p = E_q$



- Στην 1η υλοποίηση ο ανιχνευτής είναι ένας ανιχνευτής κατωφλίου, ενώ στη 2η και 3η υλοποίηση το ρόλο του ανιχνευτή έχει ένας συγκριτής ως προς τη μεγαλύτερη τιμή που θα λάβει από τους δύο κλάδους

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης: 2PAM

- Δυαδικό PAM: Θεωρούμε την περίπτωση αντίποδων (*antipodal*) σημάτων $p(t) = -q(t)$ με παλμούς ίσης ενέργειας

$$E_p = E_q$$

- Το βέλτιστο κατώφλι είναι για $a_0 = 0$, ενώ η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h(t) = p(T_b - t)$$

- Κατά τη μετάδοση στέλνουμε με την ίδια πιθανότητα τόσο bit 1, μέσω $+p(t)$, όσο και bit 0, μέσω $-p(t)$ και συνεπώς

$$E_b = \mathbb{P}\{1\}E_p + \mathbb{P}\{0\}E_q = E_p$$

- Το E_b ονομάζεται μέση ενέργεια ανά bit (average *energy per bit*) και εκφράζει την ενέργεια που απαιτείται κατά μέσο όρο προκειμένου να αποστείλουμε ένα bit
- Δεδομένου ότι $E_{pq} = -E_p$, η πιθανότητα σφάλματος bit είναι

$$P_{be} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης: On/Off

- On/Off: Θεωρούμε την περίπτωση σημάτων $p(t)$ και $q(t) = 0$ με παλμούς ενέργειας E_p και $E_q = 0$, αντίστοιχα
- Το βέλτιστο κατώφλι είναι για $a_0 = E_p/2$, ενώ η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι

$$h(t) = p(T_b - t)$$

- Κατά τη μετάδοση στέλνουμε με την ίδια πιθανότητα τόσο bit 1, μέσω $+p(t)$, όσο και bit 0, μέσω 0 και συνεπώς

$$E_b = \mathbb{P}\{1\}E_p + \mathbb{P}\{0\}E_p = \frac{E_p}{2}$$

- Δεδομένου ότι $E_{pq} = 0$, η πιθανότητα σφάλματος bit είναι

$$P_{be} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Σε σύγκριση με το δυαδικό PAM απαιτούνται 3 dB περισσότερα για να επιτευχθεί η ίδια πιθανότητα σφάλματος bit

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης: 2PPM

- Δυαδικό PPM: Θεωρούμε την περίπτωση σημάτων $p(t)$ και $q(t)$ με παλμούς ενέργειας E_p και E_q, αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε ότι τα $p(t)$ και $q(t)$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους
$$E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)q(t)\mathrm{d}t = 0$$
- Το βέλτιστο κατώφλι είναι για $a_0 = 0$, ενώ η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι
$$h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t)$$
- Κατά τη μετάδοση στέλνουμε με την ίδια πιθανότητα τόσο bit 1, μέσω $p(t)$, όσο και bit 0, μέσω $q(t)$ και συνεπώς
$$E_b = \mathbb{P}\{1\}E_p + \mathbb{P}\{0\}E_q = \frac{E_p + E_q}{2}$$
- Δεδομένου ότι $E_{pq} = 0$, η πιθανότητα σφάλματος bit είναι
$$P_{be} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$
- Σε σύγκριση με το δυαδικό PAM απαιτούνται 3 dB περισσότερα για να επιτευχθεί η ίδια πιθανότητα σφάλματος bit

Βέλτιστοι Δέκτες Δυαδικής Διαμόρφωσης