Άσκηση 5η

Σχεδίαση Άριστων Φίλτρων

Τετραδικό PAM χρησιμοποιείται για μετάδοση με ρυθμό bit 9600 bits/sec μέσα από κανάλι με χαρακτηριστική μεταφοράς

$$H_C(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+j\,f/2400}, & |f|\le 2400\text{ Hz}\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Ο θόρυβος είναι AWGN με φασματική πυκνότητα ισχύος N_0 / 2.

i. Να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά του παλμού πριν το φίλτρο εκπομπής.
ii. Να βρεθεί η χαρακτηριστική μεταφοράς πλάτους του βέλτιστου φίλτρου εκπομπής.
iii. Να βρεθεί η χαρακτηριστική μεταφοράς πλάτους του βέλτιστου φίλτρου λήψης.

Λύση

Ο ρυθμός μετάδοσης συμβόλων του τετραδικού PAM είναι $R_s = R_b / \log_2(M) = 9600 / \log_2(4)$ σύμβολα/sec = 4800 σύμβολα/sec. Το κανάλι έχει εύρος ζώνης BW = 2400 Hz το οποίο ισούται με R_s / 2, δηλαδή πρέπει να χρησιμοποιηθούν παλμοί φάσματος δύναμης συνημιτόνου, $a = 0$. Άρα, το φάσμα των παλμών είναι $R_{rc}(f) = T_s = 1 / R_s = 20.83$ ms, $|f| \le$ 2400 Hz.

i. Πρέπει να επιλέξουμε τετραγωνικό παλμό μικρής διάρκειας, π.χ. $\tau = T_s /10 = 2.083$ ms. Ο μετασχηματισμός Fourier (MF) ενός τετραγωνικού παλμού, $p(t)$, διάρκειας από $-\tau$ / 2 έως $+\tau$ / 2 εύκολα μπορεί να υπολογισθεί (ή να παρθεί από πίνακες MF) ως εξής

$$P(f)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)\exp(-j\,2\pi\,f\,t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\exp(-j\,2\pi\,f\,t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{-j\,2\pi\,f}\exp(-j\,2\pi\,f\,t)\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=$$

$$=\frac{1}{-j\,2\pi\,f}\left[\exp\left(-j\,2\pi\,f\frac{\tau}{2}\right)-\exp\left(-j\,2\pi\,f\frac{-\tau}{2}\right)\right]=\tau\frac{\sin(\pi\,f\,\tau)}{\pi\,f\,\tau}=\tau\,\mathrm{sinc}(f\,\tau).$$

Δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε τετραγωνικούς παλμούς, $p_g(t)$, διάρκειας 0 έως τ, το φασματικό περιεχόμενο του $p_g(t)$ μπορεί να προκύψει από τον $p(t)$ βασιζόμενοι στην ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης του MF, δηλαδή ισχύει ότι $p_g(t) = p(t - \tau / 2)$ και συνεπώς $P_g(f) = \tau\,\mathrm{sinc}(f\,\tau)\,\exp(-\,j\,\pi\,f\,\tau)$. Προφανώς τα πλάτη των φασμάτων των $P_g(f)$ και $P(f)$ είναι ίδια, δηλαδή $|P_g(f)| = |P(f)|$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε αριθμητικά ότι $|P_g(f = 0)| = \tau$ και $|P_g(f = 2400)| = 0.996\,\tau \approx \tau$, δηλαδή ότι στη φασματική περιοχή $|f| \le$ 2400 Hz, το πλάτος του $P_g(f)$ διατηρείται σχεδόν σταθερό.

ii. Η χαρακτηριστική μεταφοράς πλάτους του βέλτιστου φίλτρου εκπομπής προκύπτει εύκολα από τη σχέση

$$|H_T(f)|=\sqrt{\frac{|R_{rc}(f)|}{|H_C(f)|}}=\sqrt{\frac{T_s}{\left|\dfrac{1}{1+j\,f/2400}\right|}}=$$

$$=\sqrt{T_s\left|1+j\frac{f}{2400}\right|}=0.0144\cdot\sqrt[4]{1+\left(\frac{f}{2400}\right)^2},\ |f|\le 2400\text{ Hz}.$$

iii. Η χαρακτηριστική μεταφοράς πλάτους του βέλτιστου φίλτρου λήψης προκύπτει εύκολα από τη σχέση

$$\left|H_R(f)\right| = K\left|H_T(f)\right| = K\sqrt{T_s}\sqrt[4]{1+\left(\frac{f}{2400}\right)^2},\ |f| \le 2400 \text{ Hz}.$$

Η σταθερά K μπορεί να υπολογιστεί από τη γενικότερη απαίτηση που υπάρχει για τους παλμούς φάσματος δύναμης συνημιτόνου δηλαδή

$$\left|P_g(f)\right|\left|H_T(f)\right|\left|H_C(f)\right|\left|H_R(f)\right| = \left|R_{rc}(f)\right| \Leftrightarrow$$

$$\tau\,\cancel{\sqrt{T_s}}\,\cancel{\sqrt[4]{1+\left(\frac{f}{2400}\right)^2}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+\left(\frac{f}{2400}\right)^2}}}\,K\,\cancel{\sqrt{T_s}}\,\cancel{\sqrt[4]{1+\left(\frac{f}{2400}\right)^2}} = \cancel{T_s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{\tau} = 4.8\cdot 10^4 .$$