



Άσκηση 3^η

Δειγματοληψία και Επανάκτηση

Έστω σήμα $x_a(t) = \cos(30\pi t) + 0.725 \cos(80\pi t)$ το οποίο δειγματοληπτείται.

i. Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της περιόδου δειγματοληψίας και η ελάχιστη τιμή του ρυθμού δειγματοληψίας.

ii. Αν υποθέσουμε ότι το σήμα δειγματοληπτείται με τραίνο Δέλτα ώσεων της μορφής

$$x_\delta(t) = 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 0.0125n), \text{ να δειχθεί ότι το δειγματοληπτημένο σήμα γράφεται}$$

ως $x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \delta(t - 0.0125n)$. Επίσης, να υπολογιστούν τα I_0, I_1, I_2 και δείξτε ότι $I_{n+160} = I_n$.

iii. Να καθοριστεί το εύρος ζώνης χαμηλοπερατού φίλτρου ώστε να είναι δυνατή η επανάκτηση του σήματος. Αν αντί του χαμηλοπερατού φίλτρου χρησιμοποιούταν φίλτρο διέλευσης ζώνης, να βρεθούν οι χαμηλή και υψηλή συχνότητες αποκοπής, καθώς και να καθοριστεί το εύρος ζώνης.

Λύση

i. Το φασματικό περιεχόμενο του σήματος $x_a(t)$ είναι μεταξύ $F_l = 15$ Hz και $F_h = 40$ Hz και συνεπώς το σήμα χαρακτηρίζεται ως διέλευσης ζώνης εύρους ζώνης $B_w = F_l - F_h = 40 - 15$ Hz = 25 Hz. Ο ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας είναι $R_s = 2 F_h / m$ με την παράμετρο m να είναι ένας θετικός ακέραιος που ορίζεται στο διάστημα $F_h / B_w - 1 < m \leq F_h / B_w \Leftrightarrow 40 / 25 - 1 < m \leq 40 / 25 \Leftrightarrow 0.6 < m \leq 1.6$, άρα $m = 1$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $R_s = 2 F_h / m = 80$ Hz, ενώ η μέγιστη τιμή της περιόδου δειγματοληψίας είναι $T_s = 1 / R_s = 12.5$ msec

ii. Το δειγματοληπτημένο σήμα προκύπτει ως γινόμενο του αναλογικού σήματος επί το σήμα δειγματοληψίας

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x_\delta(t)x_a(t) = \left[4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 0.0125n) \right] [\cos(30\pi t) + 0.725 \cos(80\pi t)] = \\ &= 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\cos(30\pi t) + 0.725 \cos(80\pi t)] \delta(t - 0.0125n) = \\ &= 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\cos(30\pi \cdot 0.0125n) + 0.725 \cos(80\pi \cdot 0.0125n)] \delta(t - 0.0125n) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{4 [\cos(0.0375\pi n) + 0.725 \cos(\pi n)]}_{I_n} \delta(t - 0.0125n) \end{aligned}$$

δηλαδή το δειγματοληπτημένο σήμα γράφεται ως $x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \delta(t - 0.0125n)$ με $I_n = 4 [\cos(0.0375\pi n) + 0.725 \cos(\pi n)] = 4 [\cos(0.0375\pi n) + 0.725(-1)^n]$. Εύκολα προκύπτει ότι $I_0 = 6.9, I_1 = 1.0723, I_2 = 6.8795$ και $I_{n+160} = 4 [\cos(0.0375\pi(n+160)) + 0.725(-1)^{n+160}] = 4 [\cos(6\pi + 0.0375\pi n) + 0.725(-1)^n] = 4 [\cos(0.0375\pi n) + 0.725 \cos(\pi n)] = I_n$.

iii. Ο μετασχηματισμός Fourier του $x_d(t)$ μπορεί να υπολογιστεί όπως παρακάτω

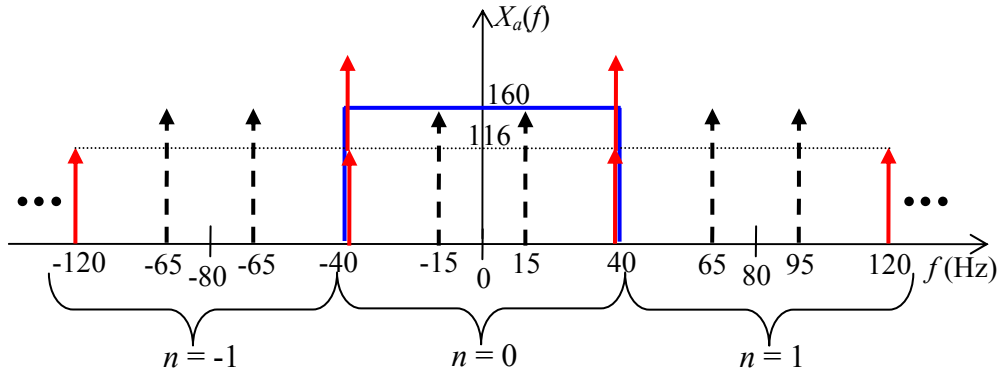
$$\begin{aligned} X_d(f) &= \mathbf{F}\{x_d(t)\} = \mathbf{F}\{x_\delta(t)x_a(t)\} = X_\delta(f) \otimes X_a(f) = \\ &= \left[320 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - 80n) \right] \otimes X_a(f) = 320 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - 80n). \end{aligned}$$

Το $X_a(f)$ προκύπτει εύκολα από το $x_a(t)$ χρησιμοποιώντας πίνακες μετασχηματισμών Fourier ως $X_a(f) = 0.5 \{ \delta(f + 15) + \delta(f - 15) + 0.725 [\delta(f + 40) + \delta(f - 40)] \}$. Άρα, το $X_d(f)$ θα είναι



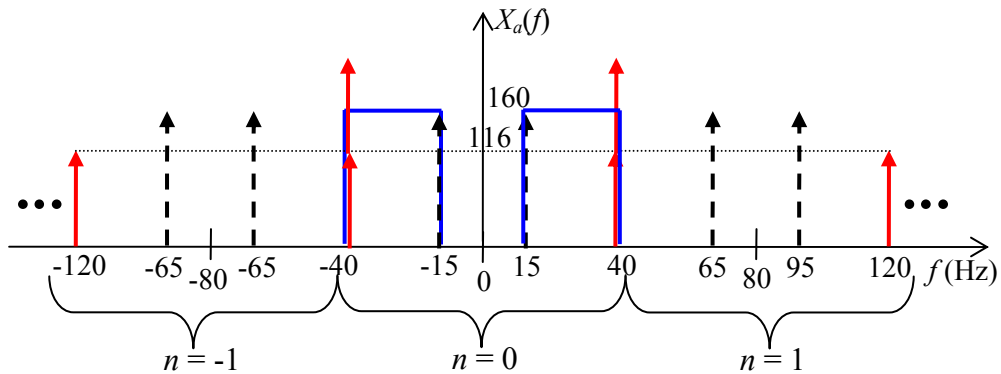
$$X_a(f) = 160 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \delta(f + 15 - 80n) + \delta(f - 15 - 80n) + 0.725 [\delta(f + 40 - 80n) + \delta(f - 40 - 80n)] \right\}.$$

Το εύρος ζώνης χαμηλοπερατού φίλτρου που απαιτείται για την επανάκτηση του $x_a(t)$ θα πρέπει να είναι λίγο μεγαλύτερο από 40 Hz. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ο ρυθμός δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από (και όχι ίσος με) 80 Hz έτσι ώστε κατά την επανάκτηση να μην περιλαμβάνονται οι τόνοι -40 και +40 από τα γειτονικά φάσματα με $n = -1$ και +1, αντίστοιχα.



Επανάκτηση με Χαμηλοπερατό Φίλτρο

Αν αντί του χαμηλοπερατού φίλτρου χρησιμοποιηθεί φίλτρο διέλευσης ζώνης, η χαμηλή συχνότητας αποκοπής πρέπει να είναι μικρότερη από 25 Hz, ενώ η υψηλή συχνότητας αποκοπής πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 40 Hz. Συνεπώς, το εύρος ζώνης του φίλτρου διέλευσης ζώνης πρέπει να είναι τουλάχιστον 25 Hz. Όπως και παραπάνω, ο ρυθμός δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από (και όχι ίσος με) 80 Hz έτσι ώστε κατά την επανάκτηση να μην περιλαμβάνονται οι τόνοι -40 και +40 από τα γειτονικά φάσματα με $n = -1$ και +1, αντίστοιχα.



Επανάκτηση με Φίλτρο Διέλευσης Ζώνης