Άσκηση 4η

Άλγεβρα Σημάτων

Έστω τρία σήματα

$$s_0(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le T_s\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases},\qquad s_1(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le T_s/2\\ -1, & T_s/2\le t\le T_s\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}\quad \text{και}\quad s_2(t)=-s_1(t)$$

i. Να βρεθεί η διάσταση του χώρου των σημάτων*.
ii. Να βρεθεί η διάσταση και μία ορθοκανονική βάση του χώρου.
iii. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα αστερισμού.
iv. Προσδιορίστε τα κατώφλια απόφασης του ανιχνευτή*.
v. Να σχεδιαστεί το μπλοκ διάγραμμα του αποδιαμορφωτή.
vi. Να σχεδιαστεί γραφικά η κρουστική απόκριση των προσαρμοσμένων φίλτρων του αποδιαμορφωτή.

Λύση

i. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ότι τα $s_0(t)$ και $s_1(t)$ είναι ορθογώνια δεδομένου ότι

$$\langle s_0(t),s_1(t)\rangle=\int_0^{T_s}s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^{T_s/2}s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t+\int_{T_s/2}^{T_s}s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^{T_s/2}1\bullet 1\mathrm{d}t+\int_{T_s/2}^{T_s}1\bullet(-1)\mathrm{d}t=\frac{T_s}{2}-\left(T_s-\frac{T_s}{2}\right)=0.$$

Άρα, εφόσον έχουμε τα $s_0(t)$ και $s_1(t)$ ορθογώνια και το $s_2(t)$ να εκφράζεται μέσω του $s_1(t)$, η διάσταση της βάσης είναι $N = 2$.

ii. Για να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση πραγματοποιούμε ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt:

- Υπολογίζουμε την ενέργεια του $s_0(t)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $E_0=\int_0^{T_s}s_0^2(t)\mathrm{d}t$, όπου εύκολα προκύπτει $E_0 = T_s$.

  Άρα, $\psi_0(t)=\dfrac{s_0(t)}{\sqrt{E_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{T_s}},\ 0\le t\le T_s$

- $$c_{1,0}=\int_0^{T_s}s_1(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t=\int_0^{T_s/2}1\cdot\frac{1}{\sqrt{T_s}}\mathrm{d}t+\int_{T_s/2}^{T_s}(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{T_s}}\mathrm{d}t=0$$

  $$\psi_1(t)=\frac{1}{\sqrt{E_1}}\left[s_1(t)-c_{1,0}\psi_0(t)\right]=\frac{s_1(t)}{\sqrt{T_s}}$$

  Η ενέργεια του s_1 είναι: $E_1=\int_0^{T_s}s_1^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{T_s/2}1^2\,\mathrm{d}t+\int_{T_s/2}^{T_s}(-1)^2\,\mathrm{d}t=T_s$

  $$\text{Άρα, }\psi_1(t)=\begin{cases}1/\sqrt{T_s}, & 0\le t\le T_s/2\\ -1/\sqrt{T_s}, & T_s/2\le t\le T_s\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

---
* Προαιρετικό ερώτημα.

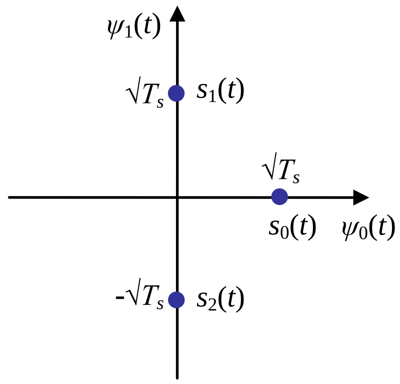
- $c_{2,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{T_s} s_1(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t = -c_{1,0} = 0$

$$c_{2,1} = \int_0^{T_s} s_2(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{T_s} s_1(t)\frac{s_1(t)}{\sqrt{T_s}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{T_s}}\int_0^{T_s} s_1^2(t)\mathrm{d}t = -\sqrt{T_s}$$

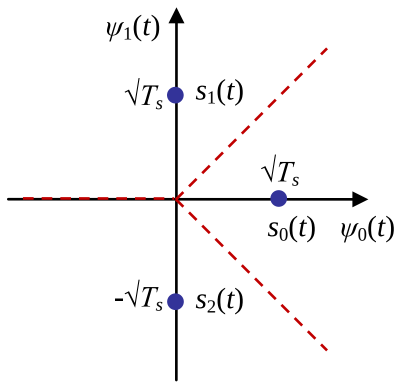
$$\psi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E_2}}\left[s_2(t) - \sum_{i=0}^{1} c_{i+1,i}\,\psi_i(t)\right] = \frac{1}{E_2}\left[-s_1(t) + \sqrt{T_s}\,\psi_1(t)\right] = 0$$

Άρα, πράγματι η διάσταση του χώρου είναι $N = 2$, ενώ τα μέλη της ορθοκανονικής βάσης είναι τα $\psi_0(t)$ και $\psi_1(t)$.

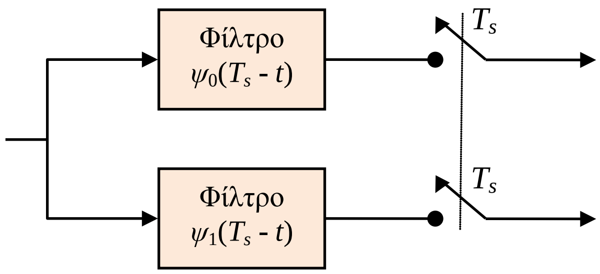
iii. Το διάγραμμα αστερισμού μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα γράφημα δύο διαστάσεων. Όπως φαίνεται παραπάνω τα $s_0(t)$, $s_1(t)$ και $s_2(t)$ μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των $\psi_0(t)$ και $\psi_1(t)$ ως εξής:
$s_0(t) = \sqrt{T_s}\,\psi_0(t)$, $s_1(t) = \sqrt{T_s}\,\psi_1(t)$, $s_2(t) = -\sqrt{T_s}\,\psi_1(t)$



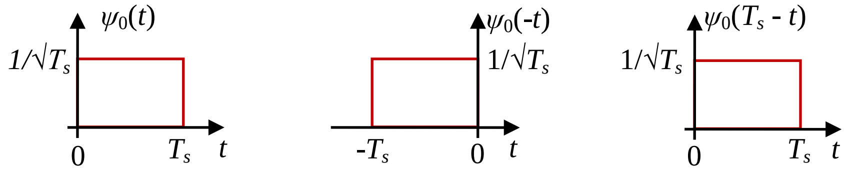
iv. Τα κατώφλια απόφασης του ανιχνευτή φαίνονται στο παρακάτω σχήμα με κόκκινες διακεκομμένες γραμμές.



v. Εφόσον $N = 2$, μπορούμε να υλοποιήσουμε τον αποδιαμορφωτή με δύο προσαρμοσμένα φίλτρα δηλαδή όπως στο παρακάτω σχήμα



vi. Η κρουστική απόκριση του $\psi_i(T_s - t)$ με i = 0,1 μπορεί να βρεθεί βρίσκοντας πρώτα την $\psi_i(-t)$ και ολισθαίνοντας την προς τα δεξιά κατά T_s



0