Άσκηση 6η

Άλγεβρα Σημάτων και Σχεδίαση Βέλτιστου Δέκτη

Έστω τα παρακάτω σήματα (με $T_s = 1$)

$$s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, \; 0 \le t \le 0.5 \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}, \; 0.5 \le t \le 1 \\ 0, \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad s_2(t) = -s_0(t) \text{ και } s_3(t) = -s_1(t).$$

i. Να προσδιοριστεί με συνοπτικό τρόπο η διάσταση του χώρου των σημάτων*.
ii. Να βρεθεί η διάσταση και μία ορθοκανονική βάση του χώρου.
iii. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα αστερισμού.
iv. Προσδιορίστε τα κατώφλια απόφασης του ανιχνευτή*.
v. Να σχεδιαστεί το μπλοκ διάγραμμα του αποδιαμορφωτή.
vi. Να σχεδιαστεί γραφικά η κρουστική απόκριση των προσαρμοσμένων φίλτρων του αποδιαμορφωτή.

Λύση

i. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ότι τα $s_0(t)$ και $s_1(t)$ είναι ορθογώνια δεδομένου ότι

$$\langle s_0(t), s_1(t) \rangle = \int_0^{T_s} s_0(t) s_1(t) \mathrm{d}t = \int_0^{0.5} s_0(t) s_1(t) \mathrm{d}t + \int_{0.5}^{1} s_0(t) s_1(t) \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{0.5} \sqrt{2} \bullet 0 \,\mathrm{d}t + \int_{0.5}^{1} 0 \bullet \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Άρα, εφόσον τα $s_2(t)$ και $s_3(t)$ εκφράζονται μέσω των $s_0(t)$ και $s_1(t)$, η διάσταση της βάσης είναι $N = 2$.

ii. Για να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση πραγματοποιούμε ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt:

- Υπολογίζουμε την ενέργεια του $s_0(t)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $E_0 = \int_0^{T_s} s_0^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{0,5} \left(\sqrt{2}\right)^2 \mathrm{d}t = 1$.

  Άρα, $\psi_0(t) = \dfrac{s_0(t)}{\sqrt{E_0}} = s_0(t) = \sqrt{2}, \; 0 \le t \le 0.5.$ (1)

- $c_{1,0} = \int_0^{T_s} s_1(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^{0.5} 0 \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_{0.5}^{1} \sqrt{2} \cdot 0\,\mathrm{d}t = 0.$

  Η ενέργεια του $s_1(t) - c_{1,0}\,\psi_0(t)$ είναι:

  $$E_1 = \int_0^{T_s} \left[s_1(t) - c_{1,0}\psi_0(t) \right]^2 \mathrm{d}t = \int_0^{T_s} s_1^2(t)\mathrm{d}t = \int_{0.5}^{1} \left(\sqrt{2}\right)^2 \mathrm{d}t = 1$$

  $$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \left[s_1(t) - c_{1,0}\,\psi_0(t) \right] = s_1(t) = \sqrt{2}, \; 0.5 \le t < 1 \qquad (2)$$

---

* Προαιρετικό ερώτημα.

- $$c_{2,0}=\int_0^{T_s} s_2(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{T_s} s_0(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t=-1$$

  $$c_{2,1}=\int_0^{T_s} s_2(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)\mathrm{d}t=0$$

  $$\psi_2(t)=\frac{1}{\sqrt{E_2}}\left[s_2(t)-\sum_{i=0}^{1}c_{2,i}\,\psi_i(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{E_2}}\left[-s_0(t)-(-1)\psi_0(t)\right]=0$$

- $$c_{3,0}=\int_0^{T_s} s_3(t)\psi_0(t)\mathrm{d}t=0$$

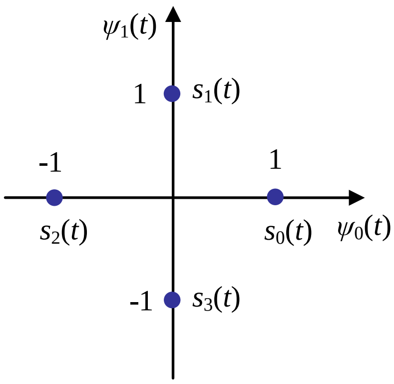
  $$c_{3,1}=\int_0^{T_s} s_3(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{T_s} s_1(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t=-\int_{0.5}^{1}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=-1$$

  $$c_{3,2}=\int_0^{T_s} s_3(t)\psi_2(t)\mathrm{d}t=0$$

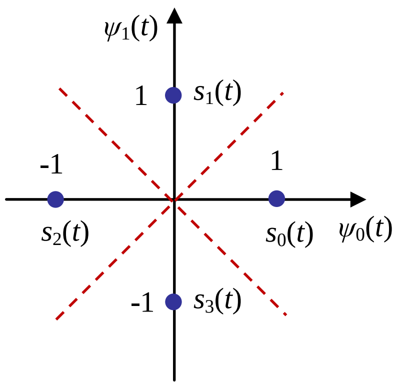
  $$\psi_3(t)=\frac{1}{\sqrt{E_3}}\left[s_3(t)-\sum_{i=0}^{2}c_{3,i}\,\psi_i(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{E_3}}\left[-s_1(t)-(-1)\psi_1(t)\right]=0$$

Άρα, πράγματι η διάσταση του χώρου είναι N = 2, ενώ τα μέλη της ορθοκανονικής βάσης είναι τα $\psi_0(t)$ και $\psi_1(t)$.

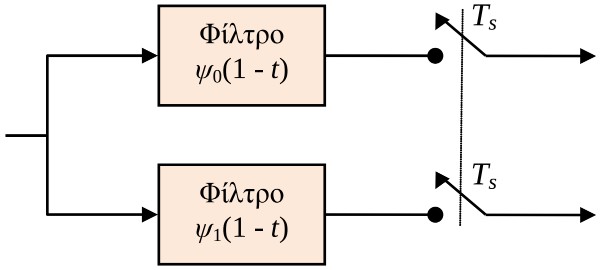
iii. Το διάγραμμα αστερισμού μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα γράφημα δύο διαστάσεων. Από τις εξισώσεις (1) και (2), καθώς και τα δεδομένα της εκφώνησης, προκύπτει ότι: $s_0(t)$ = $\psi_0(t)$, $s_1(t)$ = $\psi_1(t)$, $s_2(t)$ = $-\psi_0(t)$, $s_3(t)$ = $-\psi_1(t)$. Συνεπώς, το διάγραμμα αστερισμού είναι το εξής



iv. Τα κατώφλια απόφασης του ανιχνευτή σχηματίζονται από τις διχοτόμους των γωνιών οι οποίες σχηματίζονται από 2 σημεία του αστερισμού και την αρχή των αξόνων. Αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα με διακεκομμένες (κόκκινες) γραμμές.



v. Εφόσον $N = 2$, μπορούμε να υλοποιήσουμε τον αποδιαμορφωτή με δύο προσαρμοσμένα φίλτρα δηλαδή όπως στο παρακάτω σχήμα



vi. Η κρουστική απόκριση του $\psi_i(1 - t)$ με $i = 0,1$ μπορεί να βρεθεί βρίσκοντας πρώτα την $\psi_i(-t)$ και ολισθαίνοντας την προς τα δεξιά κατά T_s