Τυπολόγιο Μαθήματος

ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

Χειμερινό Εξάμηνο
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Χρήσιμοι Τύποι Υπολογισμού Μέσων Τιμών

	Περιγραφή	Σχέση
Συνεχούς Χρόνου	Μέση ενέργεια με δεδομένη την κυματομορφή $x(t)$ (*σήματα ενέργειας*)	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$
	Μέση ισχύς με δεδομένη την κυματομορφή $x(t)$ (*σήματα ισχύος*)	$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$
	Μέση τιμή με δεδομένη την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ (*τυχαία σήματα*) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \, dx = 1$	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$
	Μέση ισχύς με δεδομένη την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ (*τυχαία σήματα*)	$P = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) \, dx$
Διακριτού Χρόνου	Μέση τιμή με δεδομένα N δείγματα x_n	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{x_n}$
	Μέση ενέργεια με δεδομένα N δείγματα x_n	$E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lvert x_n\rvert^2$
	Μέση ισχύς με δεδομένη την συνάρτηση μάζας $f_X(x_k)$ (*τυχαία σήματα*) $\sum_{\kappa=1}^{K} f_X(x_k) = 1$	$P = \sum_{k=1}^{K} \lvert x_k\rvert^2 \, f_X(x_k)$
	Μέση τιμή με δεδομένη την συνάρτηση μάζας $f_X(x_k)$ (*τυχαία σήματα*)	$\mu = \sum_{k=1}^{K} x_k \, f_x(x_k)$

Ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt

Βήμα #1

Η 1η κυματομορφή της ορθοκανονικής βάσης προκύπτει ως

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\, s_0(t),$$

με $E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0^2(t)\mathrm{d}t$ την ενέργεια του $s_0(t)$.

Βήμα #2

Η 2η κυματομορφή προκύπτει ως

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\left[s_1(t) - c_{1,0}\, \psi_0(t)\right],$$

με $E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[s_1(t) - c_{1,0}\, \psi_0(t)\,\right]^2 \mathrm{d}t$ την ενέργεια της κυματορφής του αριθμητή $s_1(t) - c_{1,0}\, \psi_0(t)$ και $c_{1,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, \psi_0(t)\mathrm{d}t$.

Βήμα #*k*

Η *k*-ιωστή ($k = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$) κυματομορφή προκύπτει ως

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{E_k}}\left[s_k(t) - \sum_{n=0}^{k-1} c_{k,n}\, \psi_n(t)\right],$$

με $E_k = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[s_k(t) - \sum_{n=0}^{k-1} c_{k,n}\, \psi_n(t)\,\right]^2 \mathrm{d}t$ την ενέργεια της κυματορφής του αριθμητή $s_k(t) - \sum_{n=0}^{k-1} c_{k,n}\, \psi_n(t)$ και $c_{k,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_k(t)\, \psi_n(t)\mathrm{d}t$.

Πίνακας Ζευγών Μετασχηματισμού Fourier Σημάτων Ενέργειας

Συνάρτηση	Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
Μετασχηματισμός Fourier	$x(t)$	$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} \mathrm{d}t$
Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier	$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f$	$X(f)$
Τετραγωνικός Παλμός	$\mathrm{rect}(t) \triangleq \prod\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$T\,\mathrm{sinc}(f\,T)$
Τριγωνικός Παλμός	$\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{T}, & \lvert t\rvert \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$T\,\mathrm{sinc}^2(T\,f)$
Παλμός sinc	$\mathrm{sinc}(W\,t) = \frac{\sin(\pi\,W\,t)}{\pi\,W\,t}$	$\frac{1}{W}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{W}\right)$
Εκθετικός Παλμός	$\exp(-a\,\lvert t\rvert), \quad a > 0$	$\frac{2\,a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
Παλμός Gaussian	$\exp(-\pi\,t^2)$	$\exp(-\pi\,f^2)$
Παλμός Εκθετικής Απόσβεση	$\exp(-a\,t)\; u(t), \quad \mathcal{R}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\,\pi\,f}$
Παλμός sinc^2	$\mathrm{sinc}^2(B\,t)$	$\frac{1}{B}\bigwedge\left(\frac{f}{B}\right)$

Πίνακας Ζευγών Μετασχηματισμού Fourier Σημάτων Ισχύος

Συνάρτηση	**Πεδίο Χρόνου**	**Πεδίο Συχνότητας**
Μετασχηματισμός Fourier	$x(t)$	$X(f)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t$
Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier	$x(t)=\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\mathrm{d}f$	$X(f)$
‘Ωση	$\delta(t)$	1
DC	1	$\delta(f)$
Συνημίτονο	$\cos(2\pi f_0 t+\theta)$	$\frac{1}{2}\left[e^{-j\theta}\delta(f+f_0)+e^{j\theta}\delta(f-f_0)\right]$
Ημίτονο	$\sin(2\pi f_0 t+\theta)$	$\frac{j}{2}\left[e^{-j\theta}\delta(f+f_0)-e^{j\theta}\delta(f-f_0)\right]$
Μιγαδικό Εκθετικό	$\exp(j2\pi f_0 t+\theta)$	$\delta(f-f_0)\, e^{j\theta}$
Βηματική Συνάρτηση	$u(t)\triangleq\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
Συνάρτηση Προσήμου	$\mathrm{sgn}(t)\triangleq\begin{cases}1, & t\geq 0\\ -1, & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$
Γραμμικής Εξασθένισης	$\frac{1}{t}$	$-j\pi\,\mathrm{sgn}(f)$
Τρένο Ώσεων	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n T_s)$	$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T_s}\right)$
Σειρά Fourier	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp(j2\pi k f_0 t)$ με $a_k=f_0\int_{T_0} x(t)\exp(-j2\pi k f_0 t)\,\mathrm{d}t$ και $f_0=1/T_0$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(f-k f_0)$

Πίνακας Ιδιοτήτων Ζευγών Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	**Πεδίο Χρόνου**	**Πεδίο Συχνότητας**
	Δεδομένου ότι $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ *κ□ι* $q(t) \rightleftharpoons Q(f)$	
Γραμμικότητα	$a\, q(t) + b\, g(t)$	$a\, Q(f) + b\, G(f)$
Ολίσθηση Χρόνου	$g(t - t_0)$	$e^{-j2\pi\, f\, t_0} G(f)$
Κλιμάκωση	$g(a\, t)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} G\left(\frac{f}{a}\right)$
Διαμόρφωση #1	$g(t)\cos(2\pi\, f_0\, t)$	$\frac{1}{2}[G(f + f_0) + G(f - f_0)]$
Διαμόρφωση #2	$g(t)\sin(2\pi\, f_0\, t)$	$\frac{j}{2}[G(f + f_0) - G(f - f_0)]$
Διαμόρφωση #3	$g(t)\, e^{j2\pi\, f_0\, t}$	$G(f - f_0)$
Παραγώγιση στο Πεδίο Χρόνου	$\frac{\mathrm{d}^n g(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(j2\pi f)^n\, G(f)$
Ολοκλήρωση στο Πεδίο Χρόνου	$\int_{-\infty}^{t} g(x)\, \mathrm{d}x$	$\frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{1}{2} G(0)\, \delta(f)$
Παραγώγιση στο Πεδίο Συχνότητας	$t^n g(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n G(f)}{df^n}$
Συνέλιξη	$g(t) * q(t)$	$G(f)\, Q(f)$
Πολλαπλασιασμός	$g(t)\, q(t)$	$G(f) * Q(f)$
Δυικότητα	$G(t)$	$g(-f)$
Συζυγής	$g^*(t)$	$G^*(-f)$
Ερμιτιανή Συμμετρία	Αν η $g(t)$ είναι πραγματική, τότε	$G(f) = G^*(-f)$
Θεώρημα Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert g(t) \rvert^2\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert G(f) \rvert^2\, \mathrm{d}f$	

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

1. Υπάρχουν δύο παρόμοιες συναρτήσεις για την περιγραφή της συνάρτησης $\sin(x)/x$. Η μία είναι η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ και η άλλη είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας $S_a(x)$ και ορίζονται ως:

$$\mathrm{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi\, x)}{\pi\, x}$$

και

$$S_a(x) \triangleq \frac{\sin(x\,)}{x}$$

2. Η συνάρτηση ώσης, η αλλιώς η συνάρτηση Δέλτα του Dirac, ορίζεται μέσω των παρακάτω τριών σχέσεων:
   α) Singularity: $\delta(t - t_0) = 0$ για κάθε $t \neq t_0$
   β) Μοναδιαίο εμβαδό: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$
   γ) Ολίσθηση: $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = g(t_0)$ για $t_1 < t_0 < t_2$.

3. Πολλές βασικές συναρτήσεις δεν αλλάζουν μορφή με χρονική αντιστροφή, ενώ κάποιες απλά αλλάζουν πρόσημο:
   α) $\delta(-t) = \delta(t)$ (γενικά: $\delta(a\,t) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$)
   β) $\mathrm{rect}(-t) = \mathrm{rect}(t)$
   γ) $\Lambda(-t) = \Lambda(t)$
   δ) $\mathrm{sinc}(-t) = \mathrm{sinc}(t)$
   ε) $\mathrm{sgn}(-t) = -\mathrm{sgn}(t)$

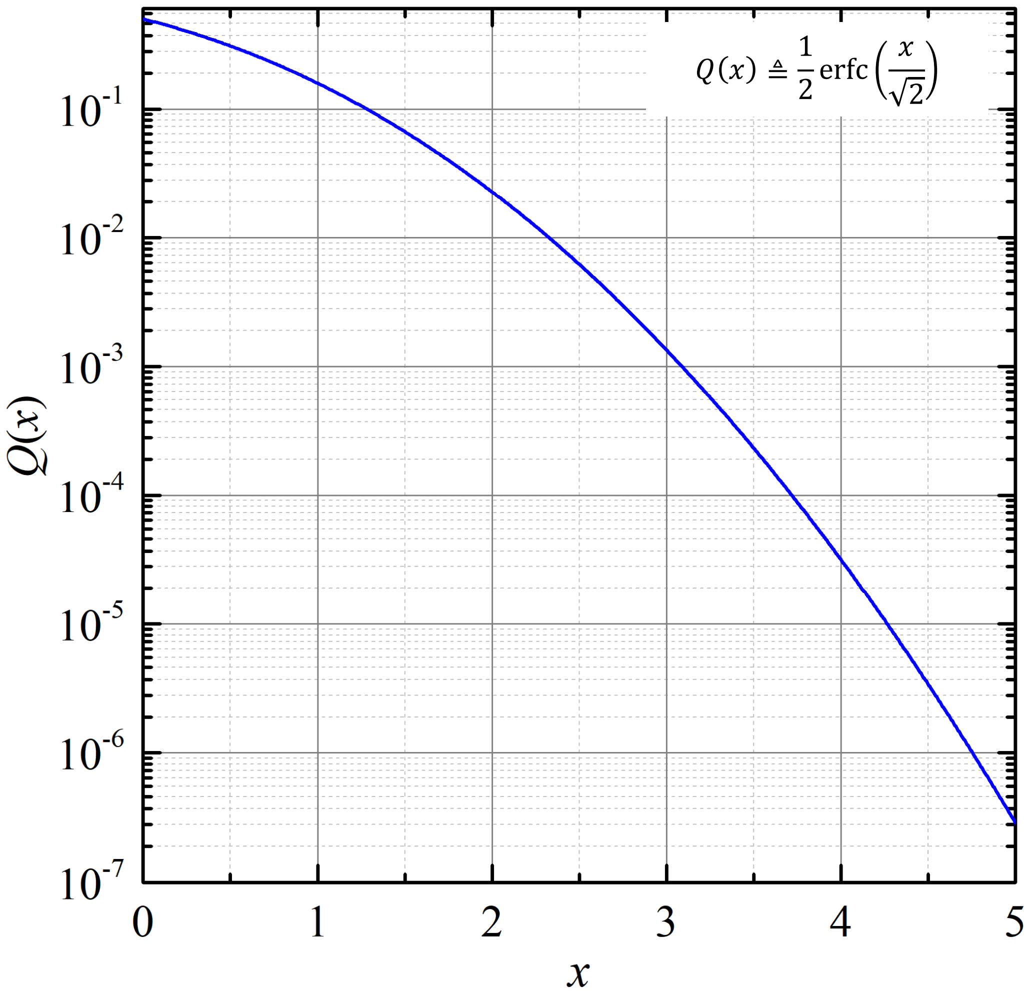
4.

Κατανομή Gaussian (ή Κανονική)

Συνάρτηση	Σχέση
Τυχαία μεταβλητή (ΤΜ) X με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right]$
Αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\}$	$F_X(x) = Q\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
Μέση τιμή της ΤΜ X	$\mathcal{E}\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\,\mathrm{d}x = \mu$
Μέση τιμή του τετραγώνου της ΤΜ X	$\mathcal{E}\langle X^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,\mathrm{d}x = \mu^2 + \sigma^2$
Διακύμανση	$\mathcal{E}\langle (X-\mu)^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_x(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2$

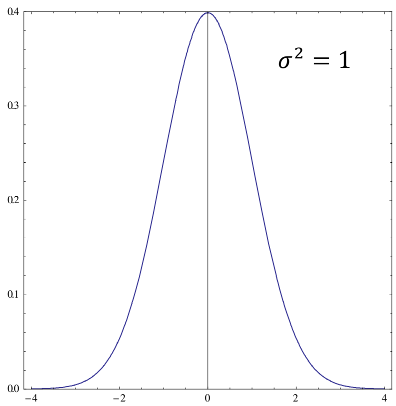
Τιμές Συνάρτησης Q

x	*Q*(*x*)
0	0.5
0.1	0.460172163
0.2	0.420740291
0.3	0.382088578
0.4	0.344578258
0.5	0.308537539
0.6	0.274253118
0.7	0.241963652
0.8	0.211855399
0.9	0.184060125
1	0.158655254
1.1	0.135666061
1.2	0.11506967
1.3	0.096800485
1.4	0.080756659
1.5	0.066807201
1.6	0.054799292
1.7	0.044565463
1.8	0.035930319
1.9	0.02871656
2	0.022750132
2.1	0.017864421
2.2	0.013903448
2.3	0.01072411
2.4	0.008197536
2.5	0.006209665
2.6	0.004661188
2.7	0.003466974
2.8	0.00255513
2.9	0.001865813
3	0.001349898
3.1	0.000967603
3.2	0.000687138
3.3	0.000483424
3.4	0.000336929
3.5	0.000232629
3.6	0.000159109
3.7	0.0001078
3.8	7.2348E-05
3.9	4.80963E-05
4	3.16712E-05
4.1	2.06575E-05
4.2	1.33457E-05
4.3	8.53991E-06
4.4	5.41254E-06
4.5	3.39767E-06
4.6	2.11245E-06
4.7	1.30081E-06
4.8	7.93328E-07
4.9	4.79183E-07
5	2.86652E-07

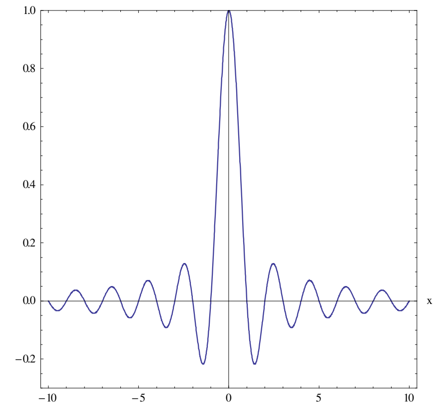

$Q(x) \triangleq \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
$Q(x)$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0
1
2
3
4
5
x

Σημαντικότερα Γραφήματα Συναρτήσεων

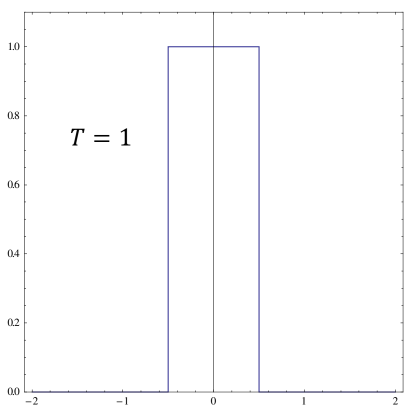
$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}}\exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)$$



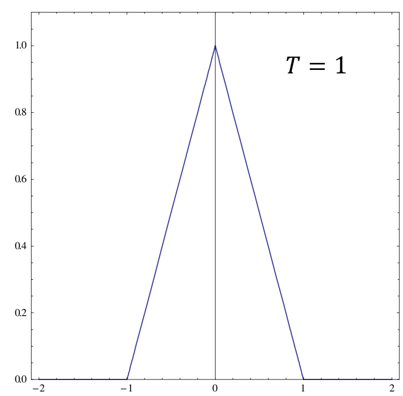
$$\operatorname{sinc}(t)\triangleq\frac{\sin(\pi\,t)}{\pi\,t}$$



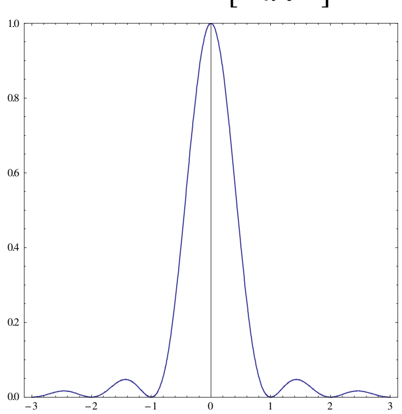
$$\operatorname{rect}(t)=\prod\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1, & |t|\le T/2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$



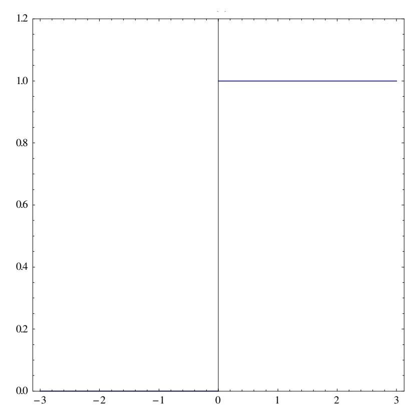
$$\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right)\triangleq\begin{cases}1-\dfrac{|t|}{T}, & |t|\le T\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$



$$\operatorname{sinc}^2(t)=\left[\frac{\sin(\pi\,t)}{\pi\,t}\right]^2$$



$$u(t)\triangleq\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$\cos(x) = \frac{1}{2}[\exp(j\,x) + \exp(-j\,x)]$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2\,j}[\exp(j\,x) - \exp(-j\,x)]$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(2\,x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\,x)]$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\,x)]$$

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$