J.R. MUNKRES

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ
1985

Το Διοικητικό Συμβούλιο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας θέλει να εκφράσει τις ευχαριστίες του προς το συνάδελφο Ι. Μαρουλά (Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π.), που μετάφρασε τελείως αφιλοκερδώς το βιβλίο αυτό, καθώς και για τις παρατηρήσεις και λύσεις των ασκήσεων που πρόσθεσε στο τέλος του βιβλίου.

Το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός μας με το βιβλίο αυτό είναι να μελετήσουμε λεπτομερειακά τα γραμμικά συστήματα με k εξισώσεις και n αγνώστους. Αρχίζουμε με τη μελέτη των διανυσματικών χώρων, υπόχωρων και γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων. Με τις έννοιες αυτές της Γραμμικής Άλγεβρας αποδεικνύονται προτάσεις για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων και για τη διάσταση του συνόλου των λύσεων και τελειώνουμε με τη μελέτη των οριζουσών και τη σχέση τους με τα γραμμικά συστήματα. Ένα συμπληρωματικό εδάφιο αναφέρεται στη γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων.

Οι γνώσεις του αναγνώστη δεν είναι αναγκαίο να είναι εκτεταμένες. Χρειάζεται να είναι εξοικειωμένος με τα διανύσματα, έχοντας μελετήσει αυτά είτε στο Μαθηματικό Λογισμό είτε στη Φυσική, αν θέλει να καταλάβει τις αντίστοιχες γεωμετρικές έννοιες από τους ορισμούς και στο τελευταίο εδάφιο, υποθέτουμε κάποιες γνώσεις από τη Μαθηματική Ανάλυση.

Νομίζουμε ότι ένα τέτοιο βιβλίο μπορεί να μελετήσει ένας σπουδαστής μετά τη διδασκαλία του Μαθηματικού Λογισμού, γιατί τότε θα μπορεί να παρακολουθήσει τους ορισμούς και τους συλλογισμούς, τουλάχιστον όταν δεν είναι πολύ αφηρημένοι.

Από την άλλη πλευρά, η μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας θα πρέπει να προηγηθεί από ένα μάθημα Διαφορικών Εξισώσεων. Ο σπουδαστής θα γνωρίζει πλέον τις σχετικές προτάσεις για τα γραμμικά συστήματα και θα είναι εξοικειωμένος με τη γραμμική ανεξαρτησία, θέματα που παρουσιάζονται εκεί.

Το βιβλίο αυτό δεν καλύπτει όλα τα αντικείμενα της Γραμμικής Άλγεβρας αλλά μόνο εκείνα που χρειάζονται για τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων. Θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν εισαγωγή στα περισσότερο αφηρημένα θέματα που θίγονται στα βιβλία του Halmos, Finite dimensional Vector Spaces ή των Hoffman και Krunze, Linear Algebra.

Η συλλογή της ύλης έγινε σύμφωνα με τις ιδέες αυτές και επιπλέον με το στόχο ν'ανταποκρίνεται και στις σπουδαστικές ανάγκες. Θα πρέπει να ευχαριστήσω τους A. Mattuck, E.M. Brown και άλλους από το προσωπικό του Massachusetts Institute of Technology για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Αφιερώνω το μικρό αυτό βιβλίο με σεβασμό σε δύο από τους δασκάλους μου Irene Kucera και Clint Gass.

Cambridge, Mass. J.R.M.
Ιανουάριος 1964

§ 1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ορισμός 1.1. Έστω V^n το σύνολο των διατεταγμένων n - άδων $\left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right]$ των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο V^n καλείται **διανυσματικός χώρος** και τα στοιχεία του καλούνται **διανύσματα.** Συχνά θα συμβολίζουμε ένα διάνυσμα $\left[a_1, \ldots, a_n\right]$ με το σύμβολο $\vec{a}$. Οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ καλούνται **συντεταγμένες** του $\vec{a}$.

Αν $\vec{a} = \left[a_1, \ldots, a_n\right]$ και $\vec{b} = \left[b_1, \ldots, b_n\right]$ είναι διανύσματα και c είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε ορίζουμε τα $\vec{a}+\vec{b}$, $c\vec{a}$, και $\vec{a}\cdot\vec{b}$ από τους τύπους:

$$\vec{a}+\vec{b} = \left[a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n\right],$$

$$c\vec{a} = \left[ca_1, ca_2, \ldots, ca_n\right],$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Οι πράξεις αυτές καλούνται **πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός διανύσματος επί αριθμό** και **εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων,** αντίστοιχα και επαληθεύουν τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (προσεταιριστική).

(2) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (αντιμεταθετική).

(3) Υπάρχει ακριβώς ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε
$\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$, για κάθε $\vec{a}$.

(4) $\vec{a}+(-1)\vec{a} = \vec{0}$ 1)

(5) $c(d\vec{a}) = (cd)\vec{a}$ (προσεταιριστική).

(6) $(c+d)\vec{a}=c\vec{a}+d\vec{a}$ (επιμεριστική).

(7) $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$ (επιμεριστική).

(8) $1\vec{a}=\vec{a}$

Οι οκτώ αυτές ιδιότητες, που αναφέρονται μόνο στις δύο πρώτες πράξεις καλούνται **αξιώματα του διανυσματικού χώρου**, γιατί κάθε σύνολο στο οποίο έχει ορισθεί η πρόσθεση των στοιχείων του και ο πολλαπλασιασμός τους επί αριθμό ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες αυτές καλείται **διανυσματικός χώρος.**[2)] (Ειδικότερα, καλείται διανυσματικός χώρος στο σώμα των πραγματικών αριθμών, εφόσον c είναι πραγματικός αριθμός. Είναι δυνατόν c να είναι και μιγαδικός αριθμός, αλλά εδώ δεν θ'αναφέρουμε τέτοια περίπτωση).

Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(9) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.[3)]

(10) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{a}\cdot\vec{c})$.

(11) $(c\vec{a})\cdot\vec{b}=c(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

(12) $\vec{a}\cdot\vec{a}>\vec{0}$, εκτός αν $\vec{a}=\vec{0}$.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών είναι απλές. Π.χ. για την προσεταιριστική ιδιότητα (1), εφαρμόζοντας πρώτα τον ορισμό για την πρόσθεση των διανυσμάτων έχουμε:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \left[\, a_1+(b_1+c_1),\ldots,a_n+(b_n+c_n) \,\right],$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \left[\, (a_1+b_1)+c_1,\ldots,(a_n+b_n)+c_n \,\right].$$

Επειδή, όμως, από γνωστή ιδιότητα των πραγματικών αριθμών είναι

$$a_i+(b_i+c_i)=(a_i+b_i)+c_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

οι προηγούμενες δύο n-άδες έχουν όλες τις συντεταγμένες τους ίσες, και κατά συνέπεια $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Οι διανυσματικοί χώροι V^1, V^2 και V^3 έχουν απλή γεωμετρική εποπτεία. Πραγματικά, στον V^3 το διάνυσμα $[a_1,a_2,a_3]$ εικονίζεται στο χώρο μ'ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο 0 και τέλος το σημείο με συντεταγμένες (a_1,a_2,a_3). Έτσι η γεωμετρική ερμηνεία της διατεταγμένης τριάδας $[a_1,a_2,a_3]$ είναι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, που όπως είναι γνωστό στη Φυσική σημειώνεται: $a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$. Η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό αντιστοιχούν στους γνωστούς τρόπους πρόσθεσης προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων και στον πολλαπλασιασμό προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό. Όμοια, στο εσωτερικό γινόμενο αντιστοιχεί ο γνωστός μας τύπος από τη Γεωμετρία.

Στη Φυσική τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο χώρο. Αυτό, όμως, δε συμβαίνει στο διανυσματικό χώρο V^3. Απεναντίας θα θεωρούμε μόνο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα με αρχή το σημείο 0.

Τέλος, θα ήταν σκόπιμο να σημειωθεί η διάκριση μεταξύ της τριάδας $[a_1,a_2,a_3]$ που καλείται **διάνυσμα** και της τριάδας (a_1,a_2,a_3) που παριστάνει ένα **σημείο**. Η διαφορά είναι ότι αυτά αντιμετωπίζονται διαφορετικά. Για παράδειγμα, μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα, αλλά δεν έχει έννοια η πρόσθεση δύο σημείων. Επίσης, μιλάμε για απόσταση δύο σημείων, αλλά όχι για απόσταση δυο διανυσμάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε:

   (a) $[1,-1,1,1]+2[4,1,1,-1]$ (b) $a[1,0,0,0]+b[1,1,1,1]$

   (c) $[1,1]\cdot([-1,2]+[1,0])$ (d) $[a,b,0]\cdot[1,0,7]$

2. Ερμηνεύστε γεωμετρικά τους διανυσματικούς χώρους V^1 και V^2.

3. Σημειώστε στις ιδιότητες (2) μέχρι (12) τις αντίστοιχες γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Τί συμπεραίνετε;

4. Στις ιδιότητες (1) μέχρι (12) διακρίνετε τις σημειωμένες πράξεις.

5. Ο μη αρνητικός αριθμός $\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ λέγεται **νορμ** (norm) του $\vec{a}$. Αν $\vec{a}\in V^3$ ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της $\|\vec{a}\|$. Όταν $\|\vec{a}\|=1$, το διάνυσμα $\vec{a}$ καλείται **μοναδιαίο.**

6. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς, ψευδείς ή ισχύουν με ορισμένους περιορισμούς. Αποδείξτε τις αληθείς χρησιμοποιώντας μόνο τις ιδιότητες (1) μέχρι (12).

   (a) $0\vec{a}=\vec{0}$ (b) $\vec{a}+c=c+\vec{a}$ (c) $c\vec{0}=\vec{0}$ 4)

   (d) Για το διάνυσμα $\vec{a}$, υπάρχει ακριβώς ένα διάνυσμα $\vec{b}$ τέτοιο ώστε: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

   (e) Για το διάνυσμα $\vec{a}$, υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός c τέτοιος ώστε: $c\vec{a}=\vec{0}$.

   (f) Για το διάνυσμα $\vec{a}$, υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός c τέτοιος ώστε: $c\vec{a}=1$.

   (g) Για το διάνυσμα $\vec{a}$, υπάρχει ακριβώς ένα διάνυσμα $\vec{b}$ τέτοιο ώστε: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

   (h) $(c\vec{a})\cdot(d\vec{b})=(cd)(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (i) $\vec{0}\cdot\vec{a}=\vec{0}$

   (j) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ (k) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c})$

   (l) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ (m) $|c\vec{a}|=c|\vec{a}|$

   (n) $\|c\vec{a}\|=|c|\ \|\vec{a}\|$ (o) Αν $\vec{a}\neq\vec{0}$, τότε $\|\vec{a}\|>0$

   (p) $\|\vec{0}\|=0$

   (q) Το διάνυσμα $(1/\|\vec{a}\|)\vec{a}$ έχει νορμ 1, όταν $\vec{a}\neq 0$.

7. Αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, δείξτε ότι

$$-1\le\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}\le 1,$$

χρησιμοποιώντας μόνο τις ιδιότητες (1) μέχρι (12). (Υποδ. Χρησιμοποιείστε τις σχέσεις $\|c\vec{a}+d\vec{b}\|^2\ge 0$ και $\|c\vec{a}-d\vec{b}\|^2\ge 0$ για $c=1/\|\vec{a}\|$ και $d=1/\|\vec{b}\|$).

8. Αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, δείξτε ότι $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$ ακριβώς όταν υπάρχει αριθμός c τέτοιος ώστε: $\vec{a}=c\vec{b}$.

9. Στην άσκηση 7 ο τύπος $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$ καλείται **ανισότητα Cauchy-Schwarz**. Απ'αυτή ορίζεται η **γωνία** ω δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\omega=$ τοξ συν $(\vec{a}\cdot\vec{b}/\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|)$. Γιατί χρειαζόμαστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στον ορισμό της γωνίας; Η ανισότητα ισχύει αν ένα από τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ είναι μηδέν;

10. Δείξτε ότι $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$. (Υποδ. Εφαρμόστε, την ανισότητα Cauchy-Schwarz για να δείξετε ότι $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) \leq (\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|)^2$).

11. Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας στην άσκηση 10 όταν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι διανύσματα του V^3;

§ 2. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Ορισμός 2.1. Ένα μη κενό σύνολο $W \subset V^n$ καλείται **διανυσματικός υπόχωρος** του V^n ακριβώς όταν:

I. για κάθε $\vec{a},\vec{b} \in W$, το διάνυσμα $\vec{a}+\vec{b} \in W$, και

II. για κάθε $\vec{a} \in W$ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, το διάνυσμα $c\vec{a} \in W$.[1)]

Μεταξύ των διανυσμάτων του W ορίζονται οι ίδιες διανυσματικές πράξεις που αναφέραμε και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες (1) μέχρι (12). (Για παράδειγμα, το 0 ανήκει στο W διότι $\vec{0}=0\vec{a}$, όπου $\vec{a}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του W). Έτσι, W είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο διανυσματικός υπόχωρος W μπορεί να είναι μόνο το μηδενικό διάνυσμα του V^n ή ακόμη και ο διανυσματικός χώρος V^n.

Παράδειγμα 2.1. Ας είναι $W=\{[a_1,a_2,a_3]:a_1=a_3\}$. Το σύνολο αυτό είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^3. Πραγματικά, θεωρώντας και το διάνυσμα $\vec{b}=[b_1,b_2,b_3]\in W$, τότε $\vec{a}+\vec{b}\in W$ και $c\vec{a}\in W$, αφού $a_1+b_1=a_3+b_3$ και $ca_1=ca_3$.

Παράδειγμα 2.2. Ας είναι $W=\{[a_1,a_2,a_3,a_4]:a_3\geq 0\}$. Το σύνολο αυτό δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^4, επειδή δεν ισχύει η ιδιότητα (II) του ορισμού (2.1). Για παράδειγμα, έστω $\vec{a}=[1,0,2,-1]$. Τότε το $\vec{a}\in W$, αλλά το διάνυσμα $(-2)\vec{a}\notin W$.

Ορισμός 2.2. Αν $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του V^n, η παράσταση

$$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\ldots+c_p\vec{a}_p, \quad (c_i\in\mathbb{R})$$

καλείται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων αυτών.

Ορισμός 2.3. Αν $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού υπόχωρου $W(\subset V^n)$, τέτοια ώστε κάθε διάνυσμα του W είναι γραμμικός συνδυασμός τους, τότε τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ καλούνται **γεννήτορες** του W ή θα λέμε ότι ο υπόχωρος W **γεννιέται** απ'αυτά.

Αν αναφερθούμε στο πρώτο από τα προηγούμενα παραδείγματα, τα διανύσματα $[1,0,1]$ και $[0,1,0]$ είναι γεννήτορες του W, γιατί κάθε διάνυσμα $\vec{a}\in W$ γράφεται $[a_1,a_2,a_3]=a_1[1,0,1]+a_2[0,1,0]$. Ένα άλλο σύνολο γεννητόρων του W είναι τα διανύσματα $[1,-1,1]$ και $[0,2,0]$, αφού $[a_1,a_2,a_3]=a_1[1,-1,1]+((a_1+a_2)/2)[0,2,0]$.

Στην §4 θα δείξουμε ότι σε κάθε διανυσματικό υπόχωρο W του V^n μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του W. Ειδικότερα για το χώρο V^n έχουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. Ο διανυσματικός χώρος V^n γεννιέται από n διανύσματα.[2)]

Παρατήρηση: Στο αντίστροφο πρόβλημα, αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_p$ του V^n υπάρχει διανυσματικός υπόχωρος W με γεννήτορες τα διανύσματα αυτά, η απάντηση είναι καταφατική, και επιπλέον ο υπόχωρος W είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Είναι φανερό ότι τα στοιχεία του W είναι όλα τα διανύσματα που είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$ και επειδή:

$$(c_1\vec{a}_1+\dots+c_p\vec{a}_p)+(d_1\vec{a}_1+\dots+d_p\vec{a}_p)=(c_1+d_1)\vec{a}_1+\dots+(c_p+d_p)\vec{a}_p\in W$$

$$d(c_1\vec{a}_1+\dots+c_p\vec{a}_p)=(dc_1)\vec{a}_1+\dots+(dc_p)\vec{a}_p\in W$$

το υποσύνολο αυτό είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Ισοδύναμα ο διανυσματικός υπόχωρος W ορίζεται και ως εξής:

Ορισμός 2.4. Θεωρείστε ένα σύστημα k **γραμμικών εξισώσεων** με n άγνωστους:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kn}x_n=b_n \end{array} \tag{2.1}$$

όπου $x_1,\dots,x_k$ είναι οι άγνωστοι και οι συντελεστές a_{ij}, b_i πραγματικοί αριθμοί. Σημειώστε ότι ο δείκτης i αναφέρεται, στην αρίθμηση της εξίσωσης στην οποία βρίσκεται το a_{ij}, ενώ ο δείκτης j αναφέρεται στον άγνωστο με τον οποίο πολλαπλασιάζεται. Αν οι σταθεροί όροι $b_i=0$ $(i=1,\dots,k)$ τότε το σύστημα ονομάζεται **ομογενές.**

Λύση του συστήματος λέγεται κάθε διάνυσμα $[d_1,\dots,d_n]\in V^n$ που επαληθεύει τις εξισώσεις του. Αν το σύστημα είναι ομογενές το σύνολο των λύσεων του ονομάζεται **χώρος λύσεων** του συστήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. Σε ένα γραμμικό σύστημα με k εξισώσεις και n άγνωστους το σύνολο των λύσεων του είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^n ακριβώς όταν το σύστημα είναι ομογενές.[3)]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του V^3 είναι διανυσματικοί υπόχωροι και βρείτε ένα σύνολο γεννητόρων σε κάθε υπόχωρο.

$A_1 = \{[a_1, a_2, a_3] : a_3 = 0\}$

$A_2 = \{[a_1, a_2, a_3] : a_1 + a_2 = a_3,\ a_2 - a_1 = 2c\ (c \neq 0)\}$

$A_3 = \{[a_1, a_2, a_3] : a_1 = a_2 = a_3\}$

$A_4 = \{[a_1, a_2, a_3] : a_1 = 1,\ a_2 = 0\}$

$A_5 = \{\vec{a} : \vec{a} = a[1,0,1] + b[0,-1,0] + c[1,1,1]\}$

$A_6 = \{\vec{a} : [1,-1,2] \cdot \vec{a} = 0\}$

$A_7 = \{\vec{a} : [1,-1,2] \cdot \vec{a} = 1\}$

$A_8 = \{\vec{a} : \|\vec{a}\| \geq 1\}$

$A_9 = \{\vec{a} : \|\vec{a}\| = 0\}$

2. Στην προηγούμενη άσκηση δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των υπόχωρων.

3. Βρείτε ένα σύνολο γεννητόρων του χώρου των λύσεων κάθε συστήματος και ερμηνεύστε γεωμετρικά τον υπόχωρο.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

4. Ποιές είναι οι κατηγορίες των υπόχωρων του V^3;

5. Αν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^n και $\vec{b}_i \in W$ $(i = 1, \ldots, q)$ δείξτε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών ανήκει στο W.

6. Αποδείξτε το Θεώρημα 2.1.[2)]

7. Αποδείξτε το Θεώρημα 2.2.[3)]

8. Δείξτε ότι ο χώρος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{array}{llll} x_1-x_2 & & & =0 \\ & x_2-x_3 & & =0 \\ & & x_3-x_4 & =0 \end{array}$$

γεννιέται από το διάνυσμα [1,1,1,1].

9. Θεωρείστε τους φορείς των διανυσμάτων [1,-1,2], [1,0,3] και [1,-2,1] του V^3. Δείξτε ότι οι ευθείες αυτές είναι συνεπίπεδες. Δείξτε ότι τα διανύσματα αυτά δεν είναι γεννήτορες του V^3. Δείξτε ότι οποιοδήποτε από τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

10. Δείξτε γεωμετρικά ότι αν τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$ και $\vec{c}$ του V^3 είναι συνεπίπεδα, τότε κάθε διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων.

§ 3. ΕΝΑ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Στα επόμενα είναι χρήσιμο το παρακάτω θεώρημα για τα ομογενή συστήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. Ένα γραμμικό ομογενές σύστημα με k εξισώσεις και n αγνώστους, τέτοιο ώστε $k < n$, έχει λύση διαφορετική από τη μηδενική.

Απόδειξη: Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kn}x_n=0 \end{array} \tag{3.1}$$

Η διαδικασία θα είναι να "μικραίνουμε" το σύστημα απαλείφοντας διαδοχικά το x_1, μετά το x_2 κ.ο.κ. Όταν $a_{11}=a_{21}=\dots=a_{k1}=0$, δεν έχει έννοια η απαλειφή του x_1 και τότε είναι φανερό ότι το διάνυσμα $[1,0,\dots,0]$ είναι μία μη μηδενική λύση του συστήματος. Αν όμως αυτό δε συμβαίνει, τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές του x_1 δεν είναι μηδέν, και έστω $a_{11}\neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος επί τον αριθμό a_{21}/a_{11} και αφαιρώντας την από τη δεύτερη απαλείφουμε το x_1 από τη δεύτερη εξίσωση. Όμοια, απαλείφοντας το x_1 και από τις υπόλοιπες εξισώσεις, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \boxed{\begin{array}{l} b_{22}x_2+\dots+b_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{k2}x_2+\dots+b_{kn}x_n=0 \end{array}} \end{array} \tag{3.2}$$

Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με το (3.1), γιατί αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση του (3.1), διαδοχικά με τους αριθμούς a_{21}/a_{11}, a_{31}/a_{11},... και την προσθέσουμε αντίστοιχα στη δεύτερη, τρίτη, ... εξίσωση προκύπτει το αρχικό σύστημα. Έτσι, αν $[d_2,\dots,d_n]$ είναι μη μηδενική λύση του υποσυστήματος του (3.2) που είναι στο πλαίσιο, αντικαθιστώντας αυτή στην πρώτη εξίσωση και λύνοντας για x_1, βρίσκουμε τη μη μηδενική λύση του (3.2), και κατά συνέπεια του (3.1),

$$\left[-(a_{12}d_2+\dots+a_{1n}d_n)/a_{11}, d_2,\dots,d_n\right]$$

Από την τελευταία υπόθεση είναι φανερό ότι θα πρέπει ν'αποδείξουμε την πρόταση για το υποσύστημα του (3.2), δηλαδή για ένα γραμμικό ομογενές σύστημα με k-1 εξισώσεις και n - 1 αγνώστους. Συνεχίζοντας τη διαδικασία απαλειφής για δεύτερη φορά, περιορίζουμε την απόδειξη του προβλήματος σε ένα σύστημα k-2 εξισώσεων με n-2 άγνωστους. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από k-1 βήματα απαλειφής θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα με μόνο μία εξίσωση και $n-k+1$ άγνωστους. Επειδή $k<n$, είναι $n-k+1 \geq 2$, δηλαδή η εξίσωση έχει δύο ή περισσότερους άγνωστους. Θα πρέπει λοιπόν ν'αποδείξουμε ότι αυτή η εξίσωση έχει λύση διαφορετική από τη μηδενική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Διαπιστώστε ότι δε καταλήγουμε πάντοτε σε μία εξίσωση που αναφέραμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

2. Συμπληρώστε στο τέλος την απόδειξη του θεωρήματος. Θα πρέπει να θεωρήσετε και την περίπτωση που ένας ή δύο από τους συντελεστές είναι μηδέν.

3. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο απαλειφής που αναφέρθηκε στην απόδειξη για να περιορίσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=0 \\ x_1+2x_2+2x_3&=0 \end{aligned} \qquad (*)$$

στο σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=0 \\ \boxed{\tfrac{1}{2}x_2+\tfrac{5}{2}x_3=0} \end{aligned} \qquad (**)$$

Βρείτε μία μη μηδενική λύση του "μικρότερου συστήματος" $\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3=0$ και απ'αυτή βρείτε μία λύση του συστήματος (**). Δείξτε ότι αυτή είναι λύση του συστήματος (*). Δείξτε ότι τα συστήματα (*) και (**) έχουν τον ίδιο χώρο λύσεων.

§ 4. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ, ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Ορισμός 4.1. Τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p \in V^n$ καλούνται **γραμμικά ανεξάρτητα** (ή απλά **ανεξάρτητα**), ακριβώς όταν ένα από αυτά δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αν αυτό δε συμβαίνει, τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ καλούνται **γραμμικά εξαρτημένα** (ή απλά **εξαρτημένα**). Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ είναι ανεξάρτητα, ακριβώς όταν το ένα από αυτά δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Επίσης, τρία διανύσματα του V^3 είναι ανεξάρτητα, ακριβώς όταν τα αντίστοιχα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα δεν είναι συνεπίπεδα. Ένα διάνυσμα είναι γραμμικά ανεξάρτητο, ακριβώς όταν είναι διαφορετικό από το μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. Τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p \in V^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ακριβώς όταν από κάθε σχέση:

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p=\vec{0}$$

προκύπτει $c_1=\ldots=c_p=0$.

Απόδειξη: Υποθέστε ότι τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα και ότι

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p=\vec{0} \tag{4.1}$$

Αν ο συντελεστής c_i είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε από την (4.1) έχουμε

$$\vec{a}_i=-1/c_i(c_1\vec{a}_1+\ldots+c_{i-1}\vec{a}_{i-1}+c_{i+1}\vec{a}_{i+1}+\ldots+c_p\vec{a}_p)$$

δηλαδή το διάνυσμα $\vec{a}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, άτοπο σύμφωνα με την υπόθεση. Έτσι, $c_1=\ldots=c_p=0$.

Αντίστροφα, υποθέστε ότι από την (4.1) προκύπτει ότι $c_i=0$ ($i=1,\ldots,p$). Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι εξαρτημένα, σύμφωνα με τον ορισμό, για κάποιο διάνυσμα $\vec{a}_i$ είναι:

$$\vec{a}_i=d_1\vec{a}_1+\ldots+d_{i-1}\vec{a}_{i-1}+d_{i+1}\vec{a}_{i+1}+\ldots+d_p\vec{a}_p.$$

Αλλά τότε από τη σχέση

$$d_1\vec{a}_1+\ldots+d_{i-1}\vec{a}_{i-1}+(-1)\vec{a}_i+d_{i+1}\vec{a}_{i+1}+\ldots+d_p\vec{a}_p=\vec{0}$$

έχουμε $c_i=-1$, που είναι άτοπο. Έτσι τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. ∎

Πόρισμα 4.2. Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι ανεξάρτητα και γεννήτορες του διανυσματικού υπόχωρου W του V^n και το διάνυσμα $b\notin W$ τότε τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$, $\vec{b}$ είναι ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Υποθέστε ότι

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p+d\vec{b}=\vec{0} \tag{4.2}$$

Αν είναι $d\neq 0$, τότε έχουμε:

$$\vec{b}=-1/d(c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p),$$

από την οποία έχουμε ότι $b\in W$, άτοπο. Έτσι, είναι $d=0$, και από την (4.2) προκύπτει:

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p=\vec{0}.$$

Επειδή, όμως, τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι ανεξάρτητα έχουμε $c_1=\ldots=c_p=0$. Με αυτόν τον τρόπο, αποδείχθηκε ότι οι συντελεστές στην (4.2) είναι όλοι μηδέν, και σύμφωνα με το θεώρημα (4.1), τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$, $\vec{b}$ είναι ανεξάρτητα. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3. Αν $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_p$ είναι γεννήτορες του διανυσματικού υπόχωρου W του V^n, τότε κάθε σύνολο ανεξάρτητων διανυσμάτων του W έχει το πολύ p διανύσματα.

Απόδειξη: Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_q$ ανήκουν στον υπόχωρο W, όπου $q>p$, θα δείξουμε ότι είναι εξαρτημένα. Γι' αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα 4.1, αρκεί να βρούμε συντελεστές $x_1,\dots,x_q$, όχι όλους μηδέν, έτσι ώστε

$$x_1\vec{a}_1+\dots+x_1\vec{a}_q=\vec{0}. \tag{4.3}$$

Επειδή, $\vec{a}_i \in W$ $(i=1,\dots,q)$ και τα διανύσματα $\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_p$ είναι γεννήτορες του W έχουμε:

$$\vec{a}_i=c_{1i}\vec{b}_1+c_{2i}\vec{b}_2+\dots+c_{pi}\vec{b}_p \quad (i=1,\dots,q) \tag{4.4}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (4.3), προκύπτει:

$$\begin{aligned}x_1\vec{a}_1+\dots+x_q\vec{a}_q=&(x_1c_{11}+x_2c_{12}+\dots+x_qc_{1q})\vec{b}_1\\&+(x_1c_{21}+x_2c_{22}+\dots+x_qc_{2q})\vec{b}_2+\dots\\&+(x_1c_{p1}+x_2c_{p2}+\dots+x_qc_{pq})\vec{b}_p=0.\end{aligned} \tag{4.5}$$

οπότε, αν στην (4.5) εξισώσουμε με το μηδέν τους συντελεστές των b_i, βρίσκουμε ότι $x_1,\dots,x_q$ είναι λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{ccc}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\dots+c_{1q}x_q&=&0\\ \vdots&&\vdots\\ c_{p1}x_1+c_{p2}x_2+\dots+c_{pq}x_q&=&0\end{array}$$

Σύμφωνα, όμως, με το θεώρημα (3.1), το σύστημα έχει λύση διαφορετική της $x_1=\dots=x_q=0$, αφού $p<q$.

Από το θεώρημα αυτό είναι φανερό ότι όλα τα σύνολα των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του W δεν έχουν περισσότερα από n διανύσματα αφού ο διανυσματικός χώρος V^n γεννιέται από n διανύσματα.

Ορισμός 4.2. Ο μεγαλύτερος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του W καλείται **διάσταση** του.

Ο χώρος V^n έχει διάσταση n (βλέπε άσκηση 10).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4. Αν ο διανυσματικός υπόχωρος W έχει διάσταση p, τότε κάθε σύνολο με p γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του W είναι γεννήτορες του.

Απόδειξη: Έστω $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του W. Αν αυτά δεν είναι γεννήτορες του W, θα υπάρχει ένα διάνυσμα b του W που δεν ανήκει στον υπόχωρο W_1 που γεννιέται από το $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$. Σύμφωνα, όμως, με το Πόρισμα 4.2 τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$, $\vec{b}$ είναι ανεξάρτητα και ανήκουν στο W. Άτοπο, διότι από την υπόθεση η διάσταση του W είναι p.■

Παρατήρηση: Απο το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε υπόχωρος W του V^n έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων. Για να βρούμε ένα τέτοιο σύνολο θα πρέπει να ορίσουμε ένα όσο το δυνατόν μεγαλύτερο σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων. Αυτό όμως δεν είναι πολύ εύκολο στις εφαρμογές και το πως αντιμετωπίζεται θ'αναφερθούμε στα επόμενα δύο εδάφια.

Ορισμός 4.3. Κάθε σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων γεννητόρων του διανυσματικού υπόχωρου $W(\subset V^n)$ καλείται **βάση**.

Από το θεώρημα 4.3 είναι φανερό ότι ο αριθμός των διανυσμάτων, σε μία βάση του W, είναι ίσος με την διάστασή του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.5. Αν $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V^n, τότε υπάρχουν κατάλληλα διανύσματα $\vec{a}_{p+1},\dots,\vec{a}_n$ του V^n, έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ είναι μία βάση του.[1)]

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$ είναι γεννήτορες του V^n. Όταν $p=n$, τα διανύσματα αυτά είναι μία βάση του. Αν όμως $p<n$, θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{a}_{p+1}\in V^n$, τέτοιο ώστε να μην ανήκει στο διανυ-

σματικό υπόχωρο του V^n που γεννιέται από τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$. Έτσι, σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2, τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p,\vec{a}_{p+1}$ είναι ανεξάρτητα.

Τώρα, αν $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p,\vec{a}_{p+1}$ είναι γεννήτορες του V^n, δηλαδή είναι $p+1=n$, το θεώρημα αποδείχθηκε. Αν όμως αυτό δεν συμβαίνει, θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{a}_{p+2}\in V^n$ ώστε να μην ανήκει στο διανυσματικό υπόχωρο του V^n που γεννούν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_{p+1}$. Όμοια συνεχίζουμε, θεωρώντας ένα κατάλληλο διάνυσμα κάθε φορά. Η διαδικασία τελειώνει μεχρι την εκλογή του $\vec{a}_n$, διότι τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και σύμφωνα με το θεώρημα 4.4 είναι γεννήτορες του V^n.∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.6. Αν $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ είναι γεννήτορες του διανυσματικού υπόχωρου W, τότε υπάρχει υποσύνολο του $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k\}$ που τα στοιχεία του σχηματίζουν μια βάση του W.

Απόδειξη: Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ είναι ανεξάρτητα, τότε όλα αυτά είναι μία βάση του W. Αν όμως είναι εξαρτημένα, θεωρούμε απ' αυτά το μεγαλύτερο σύνολο ανεξάρτητων διανυσμάτων, που χωρίς περιορισμό, έστω ότι είναι τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$. Τα διανύσματα αυτά είναι γενήτορες του διανυσματικού υπόχωρου W_1, που περιέχεται στο W, δηλαδή $W_1\subset W$.

Αλλά όμως $\vec{a}_{p+1}\in W_1$, γιατί διαφορετικά τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p,\vec{a}_{p+1}$, σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2, θα ήταν ανεξάρτητα. Όμοια, συμπεραίνουμε ότι και τα διανύσματα $\vec{a}_{p+2},\dots,\vec{a}_k\in W_1$. Έτσι, κάθε διάνυσμα που είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ ανήκει στο W_1, δηλαδή έχουμε $W\subset W_1$. Οπότε, $W=W_1$ και τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$ είναι μία βάση του W.∎

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι τα διανύσματα $[1,-1,1]$ και $[1,0,1]$ είναι ανεξάρτητα. Είναι αυτά γεννήτορες του V^3;

2. Αν $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ είναι ανεξάρτητα διανύσματα του V^4, εξετάστε αν αυτό συμβαίνει για τα διανύσματα $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$, $\vec{a}_2=3\vec{b}_1+3\vec{b}_2$ και $\vec{a}_3=2\vec{b}_1-5\vec{b}_2$.

3. Δείξτε ότι τα διανύσματα $[1,0,1,1,0]$, $[0,1,2,3,0]$ και $[0,0,0,0,1]$. είναι ανεξάρτητα και βρείτε άλλα δύο διανύσματα, τέτοια ώστε όλα μαζί να είναι μία βάση του V^5.

4. Δείξτε ότι τα διανύσματα $[1,3]$, $[-1,2]$ και $[7,6]$ δεν είναι ανεξάρτητα.

5. Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα $[a,b,c]\in V^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $[1,-1,2]$, $[1,1,0]$ και $[0,1,0]$.

6. Δείξτε ότι αν ένα σύνολο διανυσμάτων περιέχει μηδενικό διάνυσμα, τότε τα διανύσματα αυτά είναι εξαρτημένα.

7. Δείξτε ότι αν από ένα σύνολο ανεξάρτητων διανυσμάτων παραλείψετε μερικά διανύσματα, τα υπόλοιπα διανύσματα είναι ανεξάρτητα.[2)]

8. Αν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^n με διάσταση p, δείξτε ότι $0\le p\le n$ και αν $p=n$, τότε $W=V^n$.

9. Δείξτε ότι αν $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$ είναι μία βάση του W, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{b}\in W$ είναι:

$$\vec{b}=c_1\vec{a}_1+\dots+c_p\vec{a}_p$$

όπου οι αριθμοί $c_1,\dots,c_p$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι. (Οι αριθμοί $c_1,\dots,c_p$ λέγονται **συντεταγμένες** του $\vec{b}$ ως προς τη βάση $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p$).

10. Δείξτε ότι τα διανύσματα
$$\vec{e}_1=[1,0,\dots,0],\quad \vec{e}_2=[0,1,0,\dots,0],\ \dots,\quad \vdots \quad \vec{e}_n=[0,\dots,0,1]$$
είναι μία βάση του V^n και βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος

$\vec{a}=[a_1,\ldots,a_n]$ ως προς τη βάση αυτή. Η βάση αυτή καλείται **κανονική.**

11. Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ καλούνται **κάθετα** ή **ορθογώνια** ακριβώς όταν $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$. Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι κάθετα, δηλαδή $\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j=0$ $(i,j=1,\ldots,n;\ i\neq j)$, δείξτε ότι είναι ανεξάρτητα.

12. Αν $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ είναι διανύσματα του V^n, δείξτε ότι υπάρχουν κατάλληλοι αριθμοί c_1,d_1,d_2, τέτοιοι ώστε τα διανύσματα

$$\vec{b}_1=\vec{a}_1,$$
$$\vec{b}_2=\vec{a}_2+c_1\vec{b}_1,$$
$$\vec{b}_3=\vec{a}_3+d_1\vec{b}_1+d_2\vec{b}_2.$$

είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ είναι ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα διανύσματα $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ είναι ανεξάρτητα. Κατασκευάστε τα δύο σύνολα των διανυσμάτων, ώστε να είναι γεννήτορες του ίδιου υπόχωρου.

13. Αν ο διανυσματικός υπόχωρος $W(\subset V^4)$ έχει γεννήτορες τα διανύσματα $[1,1,-1,2]$, $[0,1,0,2]$ και $[1,1,0,1]$, βρείτε μία ορθογώνια βάση του.

14. Γενικεύστε την άσκηση 12, δηλαδή αν $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου $W(\subset V^n)$, τότε υπάρχει μία ορθογώνια βάση του. Η απόδειξη είναι γνωστή σαν **μέθοδος ορθογωνοποίησης Gram -Schmidt.**

15. Μία βάση καλείται **ορθοκανονική**, αν τα διανύσματα της είναι κάθετα και μοναδιαία. Δείξτε ότι κάθε διανυσματικός υπόχωρος $W(\subset V^n)$ έχει μία ορθοκανονική βάση.[3)] Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο στην άσκηση 13.

16. Αν $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι μία ορθοκανονική βάση του W και το διάνυσμα $\vec{b}\in W$, ποιές είναι οι συντεταγμένες του $\vec{b}$ ως προς τη βάση αυτή, και ποιός είναι ο τύπος της $\|\vec{b}\|$;

17. Δείξτε το θεώρημα 4.1 για $p=1$.

§ 5. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΩΝ

Μέχρι εδώ δεν έχουμε αναφέρει την τεχνική που θα βοηθήσει να εξετάσουμε, αν ένα σύνολο διανυσμάτων αποτελείται από ανεξάρτητα διανύσματα ή όχι, ούτε πως σ' ένα σύνολο εξαρτημένων διανυσμάτων θα βρούμε το μεγαλύτερο υποσύνολο ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Με άλλα λόγια, αν θεωρησουμε ένα υπόχωρο W του V^n που ορίζεται από ένα σύνολο γεννητόρων πώς θα βρούμε την διάσταση και μία βάση του; Στην §6 θα δούμε ότι ένας υπόχωρος W του V^n είναι χώρος λύσεων γραμμικού ομογενούς συστήματος και επιπλέον βρίσκεται κατά άλλο τρόπο η διάσταση και η βάση του.

Ορισμός 5.1. Όταν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}_1 = [a_{11},\ldots,a_{1n}],\ldots,\vec{a}_k=[a_{k1},\ldots,a_{kn}]$ διατάσσονται ορθογώνια

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

έτσι ώστε τα στοιχεία της i γραμμής να είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}_i$ $(i=1,\ldots,k)$, τότε το σχήμα αυτό καλείται **πίνακας**. Επειδή ο πίνακας (5.1) έχει k γραμμές και n στήλες, καλείται **τύπου** $k\times n$.[1)] Οι αριθμοί a_{ij} καλούνται **στοιχεία** του πίνακα.

Ο διανυσματικός υπόχωρος W με γεννήτορες τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k$ καλείται **χώρος γραμμών** του πίνακα και η διάστασή του καλείτα **βαθ-**

μός του πίνακα. Για παράδειγμα, αν ο βαθμός του πίνακα είναι $r \leq k$, τότε r γραμμές του πίνακα (5.1) είναι ανεξάρτητες. Μεταξύ των γραμμών ενός πίνακα ορίζονται οι εξής πράξεις:

Ορισμός 5.2. Σ'ένα πίνακα **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** καλούνται οι πράξεις:

I. Εναλλαγή δύο γραμών, για παράδειγμα οι γραμμές $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$.

II. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής επί έναν αριθμό $c \neq 0$, για παράδειγμα $c\vec{a}_i = \left[ca_{i1}, \ldots, ca_{in}\right]$.

III. Αντικατάσταση μίας γραμμής από το άθροισμα αυτής και του γινομένου μίας άλλης γραμμής επί τον αριθμό d, για παράδειγμα η γραμμή $\vec{a}_i$ αντικαθίσταται από την

$$\vec{a}_i + d\vec{a}_j = \left[a_{i1} + da_{j1}, \ldots, da_{in} + da_{jn}\right].$$

Με κάθε μία από τις πράξεις αυτές, αν εφαρμοσθεί σ' έναν πίνακα, προκύπτει ένας **νέος** πίνακας. Επίσης από το νέο πίνακα καταλήγουμε στον αρχικό με **αντίστροφους** στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Για να το επαληθεύσουμε, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η αντίστροφη πράξη της (I) είναι η ίδια στο νέο πίνακα, η αντίστροφη της (II) είναι ο πολλαπλασιασμός της ίδιας γραμμής του νέου πίνακα επί τον αριθμό $1/c$ και η αντίστροφη της (III) είναι η αντικατάσταση της ίδιας γραμμής του νέου πίνακα, από το άθροισμα αυτής και του γινομένου της άλλης γραμμής επί τον αριθμό $(-d)$.[2)]

Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών σ'έναν πίνακα βρίσκουμε ευκολότερα το βαθμό του, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. Αν ο πίνακας Β προκύπτει μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον πίνακα Α, τότε οι χώροι των γραμμών Α και Β είναι ίσοι.

Απόδειξη: Πρώτα θα πρέπει ν'αποδείξουμε ότι κάθε διάνυσμα του χώρου γραμμών του B ανήκει στο χώρο γραμμών του A. Επειδή όμως ο πίνακας A προκύπτει από το B μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, συμπεραίνουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι κάθε διάνυσμα του χώρου γραμμών του A ανήκει στο χώρο γραμμών του B και έτσι οι δύο χώροι είναι ακριβώς οι ίδιοι.

Ας είναι $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ τα διανύσματα με συντεταγμένες τα στοιχεία των γραμμών του πίνακα A. Αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A, όταν εφαρμόσουμε την πράξη (I), τα διανύσματα που ορίζονται από τις γραμμές του B είναι τα ίδια, μόνο που έχουν διαφορετική σειρά. Αν όμως ο πίνακας B προκύπτει από τον A μετά από την πράξη (II), οι γραμμές του νέου πίνακα είναι $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_{i-1},c\vec{a}_i,\vec{a}_{i+1},\dots,\vec{a}_k$ και τέλος αν προκύπτει μετά την πράξη (III), οι γραμμές του B είναι

$$\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_{i-1},\vec{a}_i+d\vec{a}_j,\vec{a}_{i+1},\dots,\vec{a}_k.$$

Έτσι, κάθε διάνυσμα του χώρου γραμμών του B, που είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του πίνακα B είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A, δηλαδή ανήκει στο χώρο γραμμών του A, και η πρόταση αποδείχθηκε. ∎

Μετά από αυτά, για να βρούμε μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου $W(\subset V^n)$ με γεννήτορες τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ σχηματίζουμε τον πίνακα A, του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα αυτά. Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών καταλήγουμε στον πίνακα B, ώστε τα διανύσματα με συντεταγμένες τα στοιχεία των γραμμών του να είναι σε κλιμακωτή μορφή.[3)] Οι μη μηδενικές γραμμές του B είναι μία βάση του χώρου γραμμών του και σύμφωνα με το θεώρημα 5.1 θα είναι μία βάση του χώρου γραμμών του πίνακα A.

Κλιμακωτή Μορφή Πίνακα: Χωρίς να θεωρείται περιορισμός, θ' αρχίσουμε από την πρώτη στήλη του πίνακα A και ας υποθέσουμε ότι είναι

$a_{11} \neq 0$. Αν όμως $a_{11}=0$ και κάποιο άλλο στοιχείο της στήλης είναι διαφορετικό από το μηδέν τότε το μεταφέρουμε στην επάνω αριστερή γωνία με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τύπου (I). Μετά πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή διαδοχικά επί

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{k1}}{a_{11}}$$

και προσθέτοντας αντίστοιχα στη δεύτερη, τρίτη, ... , τελευταία γραμμή (στοιχειώδεις μετασχηματισμοί τύπου (III)), προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Προχωρώντας, θεωρούμε τον υποπίνακα που σημειώνεται σε ορθογώνιο πλαίσιο και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία. Στην περίπτωση που όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης είναι μηδέν, τότε αρχίζουμε με τον σημειούμενο υποπίνακα:

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5.1. Για να βρούμε την κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

σύμφωνα με την προηγούμενη διαδικασία έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι από τον πίνακα A μετά από πεπερασμένου πλήθους στοιχειώδης μετασχηματισμούς, θα προκύψει ένας πίνακας που οι γραμμές του είναι **κλιμακωτής μορφής**. Για παράδειγμα, ο παρακάτω πίνακας είναι της μορφής αυτής:

$$\begin{bmatrix} \checkmark & & & & & & & \\ 0 & 0 & \checkmark & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \checkmark & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \checkmark & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \checkmark & \cdots \\ & \cdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

'Ολα τα στοιχεία που είναι κάτω από την τεθλασμένη γραμμή είναι μηδέν και όλα τα στοιχεία που σημειώνονται με ✓ καλούνται **γωνιακά** και είναι μη μηδενικά, γιατί αν κάποιο απ'αυτά ήταν μηδέν, η τεθλασμένη γραμμή θα ήταν διαφορετική, έτσι ώστε το στοιχείο αυτό να είναι κάτω από τη γραμμή.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εφαρμόσαμε μόνο στοιχειώδης μετασχηματισμούς γραμμών τύπου (I) και (III).

Απλοποιώντας ακόμη την κλιμακωτή μορφή του πίνακα με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τύπου (II), τα γωνιακά στοιχεία γίνονται ίσα με τον αριθμό 1 και μετά με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τύπου (III), μηδενίζουμε τα στοιχεία που είναι στην ίδια στήλη με τα γωνιακά στοιχεία και στις προηγούμενες γραμμές. Είναι φανερό ότι με τις πράξεις αυτές δεν μεταβάλλεται η τεθλασμένη γραμμή ούτε τα μηδενικά στοιχεία που είναι κάτω απ'αυτή. Ο πίνακας που προκύπτει καλείται **κανονική μορφή** του αρχικού πίνακα.[4]

Παράδειγμα 5.2. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στον τελευταίο πίνακα, στο παράδειγμα (5.1), έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2. Αν ο πίνακας B είναι σε κανονική μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι μία βάση του χώρου γραμμών του.

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι οι μη μηδενικές γραμμές του B είναι γεννήτορες του χώρου γραμμών του. 'Ετσι, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Επειδή σε κάθε γραμμή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της είναι σε μία στήλη του B, που όλα τ'άλλα στοιχεία της είναι μηδέν, είναι φανερό ότι κάθε γραμμή δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. ■

Πόρισμα 5.3. Αν B είναι η κανονική μορφή του πίνακα A, τότε ο βαθμός του A ισούται με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του B.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Επαληθεύστε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τις κανονικές μορφές:

(a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Αν ο διανυσματικός υπόχωρος $W(\subset V^3)$, έχει γεννήτορες τα διανύσματα: $[1,-1,0]$, $[0,1,1]$, $[-1,2,1]$ και $[-1,3,2]$ βρείτε μία βάση του.
3. Όμοια, αν ο διανυσματικός υπόχωρος $W(\subset V^5)$ έχει γεννήτορες τα διανύσματα: $[2,4,5,0,3]$, $[1,3,3,-2,-1]$, $[-1,-1,-2,1,3]$, $[0,2,1,-1,0]$ και $[-2,0,-3,1,5]$.
4. Βρείτε μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου:

$$W=\{\vec{x}:\vec{x}=[a+b,b-2c,a-b+c,b,a-c,2a+c];a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

5. Όταν όλες οι γραμμές του πίνακα A, τύπου $k \times n$, γίνουν κατά την ίδια σειρά στήλες, προκύπτει ο πίνακας A^T, τύπου $n \times k$, που καλείται **ανάστροφος** του A. Για παράδειγμα, έστω οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο δεύτερος πίνακας είναι ο ανάστροφος του πρώτου και αντίστροφα.. Δείξτε ότι ο βαθμός του πίνακα A ισούται με το βαθμό του A^T και επαληθεύστε το εξαγόμενο αυτό με τους παραπάνω πίνακες.

6. Δείξτε το θεώρημα 5.2, όταν ο πίνακας B έχει κλιμακωτή μορφή.

7. Αν ο πίνακας B είναι η κλιμακωτή μορφή του πίνακα A, δείξτε ότι οι μη μηδενικές γραμμές του B αντιστοιχούν σε ανεξάρτητες γραμμές του A.

8. α. Από το σύνολο των γεννητόρων του υπόχωρου W στην άσκηση 2 βρείτε μία βάση του. Υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια υποσύνολα;

   β. Όμοια με τους γεννήτορες στην άσκηση 3.

   γ. Όμοια με τις γραμμές του πίνακα στο παράδειγμα 5.1.

§ 6. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ας είναι W ο χώρος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=0 \end{array} \tag{6.1}$$

Για να βρούμε όλες τις λύσεις της (6.1), εφαρμόζουμε τη γνωστή μέθοδο της "απαλειφής αγνώστων", πολλαπλασιάζοντας μερικές εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς και προσθέτοντας ή αφαιρώντας αυτές από κάθε άλλη. Για να μη γράφουμε κάθε φορά τις εξισώσεις του συστήματος και τους άγνωστους x_i, η διαδικασία απλουστεύεται, αν θεωρήσουμε τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

και βρούμε την κλιμακωτή μορφή του. Οι στοιχειώδης μετασχηματισμοί γραμμών αντιστοιχούν σε ανάλογες πράξεις μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος. Έτσι, κάθε λύση του συστήματος (6.1) επαληθεύει το ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί στο νέο πίνακα, γιατί οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί είναι αντιστρέψιμοι. Το συμπέρασμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1. Αν A και B είναι οι πίνακες των συντελεστών δύο ομογενών συστημάτων και ο πίνακας B προκύπτει από τον A μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, τότε τα συστήματα αυτά είναι ισοδύναμα.

Επίλυση του συστήματος. Είναι αξιοσημείωτο ότι αν ο πίνακας B είναι σε κλιμακωτή μορφή, εύκολα βρίσκουμε μία βάση του W. Για να γίνει η διαδικασία κατανοητή θ'αναφερθούμε σ'ένα παράδειγμα. Υποθέστε ότι η κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε το αντίστοιχο σύστημα των εξισώσεων είναι:

$$\begin{array}{|llll} x_2 & +2x_4 & -3x_6 & =0, \\ & x_3 - x_4 & +2x_6 & =0, \\ & & x_5 + x_6 & =0, \\ & & & x_7=0, \end{array} \qquad (6.2)$$

όπου οι άγνωστοι x_2, x_3, x_5 και x_7 αντιστοιχούν στα γωνιακά στοιχεία του πίνακα και παρουσιάζονται σε μία μόνο εξίσωση του συστήματος. Λύνοντας ως προς τους άγνωστους αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_4 + 3x_6, \\ x_3 &= x_4 - 2x_6, \\ x_5 &= -x_6, \\ x_7 &= 0, \end{aligned}$$

οπότε, η γενική μορφή των διανυσμάτων που επαληθεύουν το σύστημα (6.2) είναι:

$$\vec{x} = [x_1, -2x_4+3x_6, x_4-2x_6, x_4, -x_6, x_6, 0]. \qquad (6.3)$$

Για οποιεσδήποτε τιμές των x_1, x_4, x_6 βρίσκουμε μία λύση του συστήματος και αντίστροφα κάθε λύση του συστήματος προκύπτει από τον τύπο (6.3) για ειδικές τιμές των x_1, x_4 και x_6. Μετά απ᾽αυτά δικαιολογείται το διάνυσμα (6.3) να καλείται **γενική λύση** του ομογενούς συστήματος.

Από την (6.3) εύκολα βλέπουμε ότι

$$\vec{x} = x_1[1,0,0,0,0,0,0] + x_2[0,-2,1,1,0,0,0] + x_6[0,3,-2,0,-1,1,0]$$

και επειδή x_1, x_4, x_6 είναι αυθαίρετοι αριθμοί, αντικαθίστανται από τις παραμέτρους c_1, c_2 και c_3, δηλαδή

$$\vec{x} = c_1[1,0,0,0,0,0,0] + c_2[0,-2,1,1,0,0,0] + c_3[0,3,-2,0,-1,1,0]$$

Έτσι, η γενική λύση του συστήματος είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{r}_1=[1,0,0,0,0,0,0]$, $\vec{r}_2=[0,-2,1,1,0,0,0]$, $\vec{r}_3=[0,3,-2,0,-1,1,0]$. Επιπλέον, τα διανύσματα αυτά είναι ανεξάρτητα, γιατί καθένα έχει τον αριθμό 1 σε μία θέση που τα υπόλοιπα έχουν το 0. Αναλυτικότερα, το $\vec{r}_1$ έχει τον αριθμό 1 στην πρώτη θέση, το $\vec{r}_3$ στην τέταρτη θέση και το $\vec{r}_2$ στην έκτη θέση.

Οπότε, τα διανύσματα $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ είναι ανεξάρτητοι γεννήτορες του χώρου των λύσεων W, δηλαδή είναι μία βάση του.

Στο σύστημα (6.2) παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό 4 και υπάρχουν 7 άγνωστοι από τους οποίους οι 3 είναι αυθαίρετοι. Έτσι, λοιπόν, έχουμε:

$$\underset{7}{\text{αριθμός των αγνώστων}} - \underset{4}{\text{βαθμός του πίνακα}} = \underset{3}{\text{διάσταση του χώρου των λύσεων}}$$

Για τον προηγούμενο τύπο γενικά ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2. Σ'ένα γραμμικό ομογενές σύστημα με k εξισώσεις και n άγνωστους, αν ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό r, τότε η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι n-r.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών του συστήματος, που μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ανάγεται σε κλιμακωτή μορφή. Οι πράξεις αυτές, σύμφωνα με τα θεωρήματα 5.1 και 6.1, δεν μεταβάλλουν το βαθμό του πίνακα ούτε το χώρο των λύσεων του συστήματος. Έτσι, αρκεί να δείξουμε το θεώρημα, όταν ο πίνακας των συντελεστών είναι κλιμακωτής μορφής.[1)]

Παρατήρηση: Αν ένα ομογενές σύστημα έχει r ανεξάρτητες εξισώσεις με n άγνωστους τότε η γενική λύση του συστήματος έχει n - r αυθαίρετες σταθερές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μετασχηματίζοντας στην κλιμακωτή μορφή, βρείτε μία βάση για τους χώρους των λύσεων των συστημάτων:

(a)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-x_4&=0\\ x_1-x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2-2x_4&=0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1+2x_3-x_6&=0\\ x_2-5x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6&=0 \end{aligned}$$

2. Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+2x_4&=0\\ 3x_2-x_3+3x_4&=0\\ 2x_1-x_2-x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

3. Συμπληρώστε την απόδειξη του θεωρήματος 6.2.[1)]

4. Δείξτε ότι η γενική λύση του συστήματος (6.2) είναι γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων διανυσμάτων[1)]:

$$[1,0,0,0,0,0,0],\ [0,-2,1,1,0,0,0],\ [0,3,-2,0,-1,1,0]$$

και διαπιστώστε ότι η γραμμική της έκφραση δεν είναι μονοσήμαντη. Ειδικότερα, δείξτε ότι κάθε διάνυσμα της μορφής:

$$c_1[1,-4,2,2,0,0,0]+c_2[1,-1,1,-1,1,-1,0]+c_3[1,1,-1,1,-1,1,0]$$

είναι λύση του συστήματος και ότι κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής αυτής.

5. Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα της μορφής:

$$c_1[1,-2,1,1,0,0,0]+c_2[0,1,-1,1,-1,1,0]+c_3[-1,4,-3,1,-2,2,0]+c_4[1,-5,3,1,1,-1,0]$$

είναι λύση του συστήματος (6.2) και ότι κάθε λύση του συστήματος ισούται με ένα διάνυσμα της μορφής αυτής. Πώς εξηγείτε ότι εδώ παρουσιάζονται τέσσερες αυθαίρετες σταθερές;

6. Βρείτε δύο διαφορετικές γραμμικές εκφράσεις της γενικής λύσης του συστήματος στην άσκηση 2.

7. Αν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^n και

$$W^{\perp}=\{\ \vec{x}\in V^n:\vec{x}\cdot\vec{a}=0,\ \text{για κάθε}\ \ \vec{a}\in W\ \},$$

δείξτε ότι $W^{\perp}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V^n. Το σύνολο $W^{\perp}$ καλείται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του W.

8. Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι γεννήτορες του διανυσματικού υπόχωρου W και το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι κάθετο σε καθένα απ'αυτά, δείξτε ότι $\vec{a}\in W^{\perp}$.

9. Αν ο διανυσματικός υπόχωρος $W(\subset V^3)$ γεννιέται από το διάνυσμα $[1,-1,2]$, βρείτε μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$. Εξηγείστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

10. Βρείτε μια βάση στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανυσματικού υπόχωρου W στην άσκηση 2 της §5.

11. Όμοια του διανυσματικού υπόχωρου W στην άσκηση 3 της §5.

12. Όμοια του διανυσματικού υπόχωρου W στην άσκηση 4 της §5.

13. Όμοια των διανυσματικών υπόχωρων W στην παραπάνω άσκηση 1.

14. Αν A είναι ο πίνακας των συντελεστών ομογενούς γραμμικού συστήματος, δείξτε ότι ο χώρος των λύσεων αυτού είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών του A.

15. Αν ο διανυσματικός υπόχωρος $W(\subset V^n)$ έχει διάσταση p, βρείτε τη διάσταση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$.

16. Δείξτε ότι κάθε διανυσματικός υπόχωρος W του V^n, είναι χώρος λύσεων ισοδύναμων ομογενών γραμμικών συστημάτων.

§ 7. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θεωρείστε ένα σύστημα με k γραμμικές εξισώσεις και n άγνωστους. Ένα τέτοιο σύστημα είναι δυνατό να έχει μία λύση, να έχει άπειρες λύσεις και ακόμη να μην έχει λύση. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1-x_2+\ x_3&=1\\ x_1\qquad +2x_3&=0\\ 2x_1-x_2+3x_3&=2 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση αφού το άθροισμα των δύο πρώτων εξισώσεων είναι "ασυμβίβαστο" με την τρίτη εξίσωση. Η επίλυση των γραμμικών συστημάτων είναι το αντικείμενο στο εδάφιο αυτό.

Ας είναι $A=[a_{ij}]$ ένας πίνακας τύπου $k\times n$. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]\in V^n$ το "γινόμενο" $A\vec{x}$ παριστάνει το διάνυσμα

$$\vec{b}=[b_1,\ldots,b_k]\in V^k$$

που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \vdots\qquad\qquad &\ \ \vdots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n&=b_k. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Έτσι, κάθε πίνακας ορίζει μία απεικόνιση $f: V^n \to V^k$ που καλείται **γραμμική απεικόνιση ή γραμμικός μετασχηματισμός.** Κάθε τέτοια απεικόνιση έχει την εξής βασική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} &\text{I.}\quad A(\overrightarrow{x+y})=A\vec{x}+A\vec{y}\\ &\text{II.}\quad A(c\vec{x})=c(A\vec{x}) \end{aligned} \tag{7.2}$$

για κάθε $\vec{x},\vec{y}\in V^n$ και για κάθε αριθμό c. Πραγματικά, αν $A\vec{x}=b$ και $A\vec{y}=c$ τότε έχουμε:

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n=b_i, \quad a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n=c_i \quad (i=1,\ldots,k)$$

Προσθέτοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτει:

$$a_{i1}(x_1+y_1)+\ldots+a_{in}(x_n+y_n)=b_i+c_i, \quad (i=1,\ldots,k),$$

επαληθεύοντας έτσι ότι $A(\vec{x}+\vec{y})=\vec{b}+\vec{c}$. Όμοια, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με τον αριθμό d, έχουμε:

$$a_{i1}(dx_1)+\ldots+a_{in}(dx_n)=db_i, \quad (i=1,\ldots,k),$$

επαληθεύοντας ότι $A(d\vec{x})=d\vec{b}$.

Από την (7.1) παρατηρούμε ότι ο χώρος των λύσεων ομογενούς συστήματος είναι το σύνολο των διανυσμάτων που ικανοποιούν την $A\vec{x}=\vec{0}$.

Ορισμός 7.1. Για ένα πίνακα A το σύνολο

$$W=\{\vec{b}:\vec{b}=A\vec{x},\ \vec{x}\in V^n\}$$

καλείται **πεδιακός χώρος** του πίνακα A. Απλούστερα, ο πεδιακός χώρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{b}\in V^k$ για τα οποία το σύστημα (7.1) έχει λύση.

Αν τα διανύσματα $\vec{b},\vec{c}\in W$, τότε $A\vec{x}=\vec{b}$ και $A\vec{y}=\vec{c}$ για μερικά $\vec{x}$, $\vec{y}\in V^n$. Οπότε από την (7.2) συμπεραίνουμε ότι W είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Παράδειγμα 7.1. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1-x_2+\ x_3&=b_1\\ x_1\qquad +2x_3&=b_2\\ 2x_1-x_2+3x_3&=b_3 \end{aligned}$$

έχει λύση μόνο όταν $b_1+b_2=b_3$. Έτσι, ο πεδιακός χώρος του πίνακα των συντελεστών του συστήματος είναι:

$$W=\{[b_1,b_2,b_3]:b_3=b_1+b_2\}.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η διάσταση του W και ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών είναι 2. Αυτό όμως δεν είναι τυχαίο σύμφωνα με το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1. Ο βαθμός του πίνακα A είναι ίσος με τη διάσταση του πεδιακού χώρου του.

Απόδειξη: Ας είναι r ο βαθμός του πίνακα A και W_1 ο χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$, διάστασης p. Σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 είναι $p=n-r$. Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ είναι μία βάση του W_1, όπως είναι γνωστό (θεώρ.(4.5)), υπάρχουν $n-p(=r)$ κατάλληλα διανύσματα $\vec{a}_{p+1},\ldots,\vec{a}_n$ ώστε τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ να είναι μία βάση του V^n. Θέτοντας

$$\vec{d}_{p+1}=A\vec{a}_{p+1},\ldots,\vec{d}_n=A\vec{a}_n,$$

η πρόταση θα έχει δειχθεί, αν τα διανύσματα $\vec{d}_{p+1},\ldots,\vec{d}_n$ είναι μία βάση του πεδιακού χώρου του A.

Πρώτα θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{d}_{p+1},\ldots,\vec{d}_n$ είναι ανεξάρτητα. Αν είναι

$$c_{p+1}\vec{d}_{p+1}+\ldots+c_n\vec{d}_n=\vec{0},$$

από την (7.1) προκύπτει:

$$A(c_{p+1}\vec{a}_{p+1}+\ldots+c_n\vec{a}_n)=c_{p+1}\vec{d}_{p+1}+\ldots+c_n\vec{d}_n=0$$

Οπότε, το διάνυσμα $c_{p+1}\vec{a}_{p+1}+\ldots+c_n\vec{a}_n\in W_1$ και θα είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$, δηλαδή

$$-c_1\vec{a}_1-\ldots-c_p\vec{a}_p+c_{p+1}\vec{a}_{p+1}+\ldots+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$$

Επειδή όμως, $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ είναι μία βάση του V^n συμπεραίνουμε ότι $c_1=\ldots=$ $=c_n=0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα διανύσματα $\vec{d}_{p+1},\ldots,\vec{d}_n$ είναι γεννήτορες του W. Αν $\vec{b}\in W$, τότε $\vec{b}=A\vec{x}$ για κάποια $\vec{x}\in V^n$. Υπάρχουν, όμως, για το διάνυσμα $\vec{x}$ κατάλληλοι συντελεστές c_i, ώστε

$$\vec{x}=c_1\vec{a}_1+\ldots+c_n\vec{a}_n$$

Τότε

$$\vec{b}=A\vec{x}=c_1A\vec{a}_1+\ldots+c_nA\vec{a}_n$$

$$=c_{p+1}\vec{d}_{p+1}+\ldots+c_n\vec{d}_n$$

αφού $A\vec{a}_1=\ldots=A\vec{a}_p=\vec{0}$.■

Πόρισμα 7.2. Ας είναι ο πίνακας A, τύπου $k\times n$, βαθμού r.

I. Αν $r<k$, τότε υπάρχει διάνυσμα $\vec{b}\in V^k$, τέτοιο ώστε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ δεν έχει λύση.

II. Αν $r=k$, τότε το σύστημα έχει λύση για κάθε $\vec{b}$.

Απόδειξη: Η διάσταση του πεδιακού χώρου W του πίνακα A είναι r.

I. Όταν $r<k$, είναι φανερό ότι $W\subset V^k$. Έτσι για κάθε $\vec{b}\in V^k-W$ το αντίστοιχο σύστημα δεν έχει λύση.

II. Όταν $r=k$, τότε $W=V^k$ και κατά συνέπεια το σύστημα έχει λύση για κάθε $\vec{b}\in V^k$.■

Πόρισμα 7.3. Ο βαθμός κάθε πίνακα ισούται με το βαθμό του αναστρόφου του.

Απόδειξη: Ας είναι ο πίνακας A τύπου $k\times n$ και W ο πεδιακός χώρος του. Αν $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ είναι η κανονική βάση του V^n, θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $A\vec{e}_1,\ldots,A\vec{e}_n$ είναι γεννήτορες του W. Πραγματικά, αν $\vec{b}=A\vec{x}$ για κάποια $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]$, τότε έχουμε:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n \quad \text{και} \quad \vec{b}=x_1(A\vec{e}_1)+\ldots+x_n(A\vec{e}_n)$$

Από την (7.1), βρίσκουμε ότι το γινόμενο $A\vec{e}_1$ είναι το διάνυσμα με συντεταγμένες τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα A. Όμοια, το γινόμενο $A\vec{e}_2$ είναι το διάνυσμα που ορίζεται από τη δεύτερη στήλη του πίνακα A κ.ο.κ. Έτσι, $A\vec{e}_1,\ldots,A\vec{e}_n$ είναι γεννήτορες του χώρου γραμμών του ανάστροφου πίνακα A^T. Αλλά τα διανύσματα αυτά είναι και γεννήτορες του πεδιακού χώρου του A, που σύμφωνα με το θεώρημα 7.1, η διάσταση του ισούται με το βαθμό του πίνακα A.■

Άμεσο συμπέρασμα από το προηγούμενο πόρισμα είναι ότι, αν r γραμμές του πίνακα A είναι ανεξάρτητες, τότε ακριβώς r στήλες του είναι επίσης ανεξάρτητες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.4. Αν το διάνυσμα d επαληθεύει το σύστημα (7.3) και $y=c_1y_1+\ldots+c_py_p$ είναι η γενική λύση του "αντίστοιχου" ομογενούς

$$\begin{aligned} a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n&=0 \\ \vdots \qquad\qquad & \;\vdots \\ a_{k1}y_1+\ldots+a_{kn}y_n&=0 \end{aligned} \qquad (7.3)$$

τότε $\vec{x}=\vec{d}+\vec{y}$ είναι η γενική λύση του συστήματος αυτού.

Απόδειξη: Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι μία άλλη λύση του συστήματος (7.1) τότε $A(\vec{x}-\vec{d})=\vec{b}-\vec{b}=0$. Δηλαδή, το διάνυσμα $\vec{y}=\vec{x}-\vec{d}$, για κατάλληλες τιμές των $c_1,\ldots,c_p$, είναι λύση του **αντίστοιχου ομογενούς**

$$A\vec{y}=\vec{0}.$$

Αντίστροφα, αν το διάνυσμα $\vec{y}$ είναι η γενική λύση του συστήματος (7.3), τότε το διάνυσμα $\vec{d}+\vec{y}$ είναι λύση του συστήματος (7.1), αφού

$$A(\vec{d}+\vec{y})=A\vec{d}+A\vec{y}=\vec{b}.■$$

Από το θεώρημα (7.4) συμπεραίνουμε ότι για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα, θα πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν το σύστημα έχει λύση και σε καταφατική απάντηση να βρούμε μία λύση του συστήματος και τη γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς. Αυτά, όμως, μεταφέρονται συνολικά στην παρακάτω διαδικασία.

Η ιδέα, όπως στην παράγραφο 6, είναι η μέθοδος απαλειφής των αγνώστων. 'Ετσι, με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον **επαυξημένο** πίνακα

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του πίνακα και για τον ίδιο λόγο, όπως πριν, το σύστημα που αντιστοιχεί στο νέο πίνακα είναι ισοδύναμο του αρχικού.

Τότε άμεσα είναι δυνατόν να γνωρίζουμε, αν υπάρχει λύση του συστήματος και να βρίσκουμε τη γενική λύση του.

Παράδειγμα 7.2. Ας είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

η κλιμακωτή μορφή επαυξημένου πίνακα συστήματος με τρεις εξισώσεις και τέσσερες άγνωστους. Το ισοδύναμο σύστημα που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό είναι φανερό ότι δεν έχει λύση, διότι η τρίτη εξίσωση του συστήματος είναι

$$0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2.$$

Παράδειγμα 7.3. Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα με τέσσερες εξισώσεις και έξι άγνωστους, που ο επαυξημένος πίνακας έχει κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Όπως και στα ομογενή συστήματα, οι άγνωστοι x_1, x_2 και x_5 βρίσκονται μόνο σε μία εξίσωση του συστήματος. Έτσι, λοιπόν, αν λύσουμε ως προς τους άγνωστους αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5-3x_3-7x_4+3x_6, \\ x_2 &= \qquad\quad 4x_4-x_6, \\ x_5 &= -1 \qquad\qquad +3x_6, \end{aligned}$$

Οπότε, η γενική λύση είναι το διάνυσμα

$$\vec{x} = [\,5-3x_3-7x_4+2x_6, 4x_4-x_6, x_3, x_4, -1+3x_6, x_6\,]$$

Αναλυτικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{x} = [\,x_1, \ldots, x_6\,] = [\,5,0,0,0,-1,0\,] &+ c_1\,[\,-3,0,1,0,0,0\,] \\ &+ c_2\,[\,-7,4,0,1,0,0\,] \\ &+ c_3\,[\,2,-1,0,0,3,1\,] \end{aligned}$$

όπου x_3, x_4 και x_6 αντικαταστάθηκαν από τις παραμέτρους c_1, c_2 και c_3. Στη μορφή αυτή, είναι φανερό ότι η γενική λύση του γραμμικού συστήματος είναι το άθροισμα μίας "μερικής" λύσης του συστήματος και της γενικής λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι αν στην κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα υπάρχει κάποια γραμμή, που μόνο το τελευταίο στοιχείο b_i είναι μη μηδενικό, το σύστημα δεν έχει λύση, γιατί στη γραμμή αυτή αντιστοιχεί η εξίσωση:

$$0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=b_i$$

Αν όμως δεν υπάρχει τέτοια γραμμή, το σύστημα έχει λύση και βρίσκουμε τη γενική λύση λύνοντας ως προς τους άγνωστους που αντιστοιχούν στα γωνιακά στοιχεία του πίνακα.[1]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν τα συστήματα:

(a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=1\\ x_2-x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+2x_3\quad&=0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1-x_2-2x_3+3x_4&=2\\ x_1+3x_2+4x_3-x_4&=1\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=1 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3+x_4&=1\\ -3x_2+5x_3+2x_4&=3\\ 2x_1+x_2-3x_3\quad&=-1 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1-x_2+x_3&=2\\ 2x_1\quad+x_3&=-1\\ x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=1\\ x_1-x_2+x_3&=0\\ -x_1+2x_2+x_3&=-1\\ x_1+7x_2-3x_3&=2 \end{aligned}$$

2. Εξετάστε αν το διάνυσμα

$$\vec{x}=[1,4,-1,1,-1,0]+c_1[4,-4,1,-1,0,0]+c_2[-1,-1,1,0,3,1]+c_3[0,5,-3,1,-3,-1]$$

είναι η γενική λύση του συστήματος στο παράδειγμα 7.3.

3. Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\vec{x}=[0,3,0,1,2,1]+c_1[4,1,-2,0,-3,-1]+c_2[4,-4,1,-1,0,0]$$

είναι λύση του συστήματος (7.3). Είναι κάθε λύση του συστήματος ίση με ένα διάνυσμα της μορφής αυτής;

4. Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\vec{x}=[0,3,0,1,2,1]+c_1[4,-4,1,-1,0,0]$$
$$+c_2[0,5,-3,1,-3,-1]+c_3[4,6,-5,1,-6,-2]$$

επαληθεύουν το σύστημα (7.3). Είναι κάθε λύση του συστήματος ίση με ένα διάνυσμα της μορφής αυτής;

5. Βρείτε δύο διαφορετικές εκφράσεις της γενικής λύσης σε κάθε σύστημα στην άσκηση 1.

6. Βρείτε κατάλληλες τιμές των b_i, ώστε τα συστήματα

(a)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3+x_4&=b_1\\ x_2-x_3+2x_4&=b_2\\ x_1-x_2-x_3&=b_3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-2x_4&=b_1\\ x_1+x_2+\tfrac{3}{2}x_3-x_4&=b_2\\ -x_2-x_3+x_4&=b_3\\ 2x_1+x_3+3x_4&=b_4 \end{aligned}$$

να μην έχουν λύση.

7. Ας είναι στο σύστημα (7.1) $k=n$. Δείξτε:

   I. αν ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό n, τότε το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση.

   II. αν $b_i=0$ $(i=1,\dots,n)$ και ο βαθμός του πίνακα των συντελεστών είναι μικρότερος του n, τότε το σύστημα έχει απειρία λύσεων.

8. Δείξτε ότι το γραμμικό σύστημα (7.1) έχει λύση ακριβώς όταν ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα ισούται με τον βαθμό του πίνακα των συντελεστών.

9. Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις σταθερές b_i του συστήματος (a) στην άσκηση 6 ώστε να είναι συμβιβαστό. Όμοια για το σύστημα (b).

§ 8. ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Σε κάθε πίνακα A, τύπου $n \times n$, αντιστοιχεί ένας αριθμός που καλείται **ορίζουσα** του πίνακα A και θα την παριστάνουμε $\det A$ ή με το σύμβολο $|A|$. Η αντιστοιχεία αυτή έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Αν ο πίνακας A' προκύπτει από τον πίνακα A, μετά από εναλλαγή δύο γραμμών του τότε $\det A' = -\det A$.

(2) Αν ο πίνακας A' προκύπτει από τον πίνακα A, αφού πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μίας γραμμής επί τον αριθμό c, τότε $\det A' = c \det A$.

(3) Αν ο πίνακας A' προκύπτει από τον πίνακα A, όταν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή από το άθροισμα αυτής και του γινομένου της j-γραμμής επί τον αριθμό d, τότε $\det A' = \det A$.

(4) Αν όλα τα στοιχεία μίας γραμμής είναι ίσα με το μηδέν, τότε $\det A = 0$.

(5) Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

τότε $\det A = 1$. Ο πίνακας αυτός καλείται **μοναδιαίος** και παριστάνεται με το σύμβολο I.

Στο τέλος του εδαφίου αυτού δίνεται αναλυτικά η παράσταση της ορίζουσας ενός πίνακα, από την οποία αποδεικνύονται εύκολα οι παραπάνω ιδιότητες.

Ορισμός 8.1. Παραλείποντας μερικές γραμμές ή και στήλες από έναν πίνακα, ο πίνακας που ορίζεται από τα υπόλοιπα στοιχεία καλείται **υποπίνακας.**

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{είναι υποπίνακας του} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

στον οποίο σημειώνονται η γραμμή και οι στήλες που διαγράφονται. Ο πίνακας έχει συνολικά δεκαοχτώ υποπίνακες τύπου 2×2, τρεις τύπου 2×4 και δώδεκα τύπου 1×1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1. Οι γραμμές του πίνακα B, τύπου $p \times n$ είναι ανεξάρτητες, ακριβώς όταν υπάρχει υποπίνακας, τύπου $p \times p$, του οποίου η ορίζουσα είναι διαφορετική του μηδέν.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι γραμμές του πίνακα B είναι ανεξάρτητες και ο πίνακας B' είναι η κανονική μορφή του. Στον πίνακα B' δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές και επιπλέον τα γωνιακά του στοιχεία, που όλα ισούνται με τον αριθμό 1, βρίσκονται σε κάθε γραμμή του. Έτσι ο υποπίνακας C', τύπου $p \times p$, που προκύπτει, όταν παραλείψουμε τις στήλες του B που δεν περιέχουν γωνιακό στοιχείο, είναι μοναδιαίος και σύμφωνα με την ιδιότητα (6) έχουμε $\det C' = 1$.

Αν C είναι υποπίνακας του B αντίστοιχος του C', τότε από τις ιδιότητες (1), (2) και (3) συνάγεται

$$\det C = c \det C', \tag{8.1}$$

όπου $c \neq 0$. Οπότε, $\det C \neq 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο πίνακας B έχει υποπίνακα C, τύπου $p \times p$, τέτοιο ώστε $\det C \neq 0$, B' είναι η κανονική μορφή του B και C' είναι ο υποπίνακας του B' αντίστοιχος του C. Αν ο πίνακας B' έχει μηδενική γραμμή, τότε και ο C' θα έχει μηδενική γραμμή και θα έχουμε $\det C' = 0$. Αυτό όμως δεν συμβαίνει γιατί $\det C'$ είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του $\det C$. 'Ετσι

$$\text{βαθμός } B = p,$$

δηλαδή οι γραμμές του B είναι ανεξάρτητες.■

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2. Αν στον πίνακα A, τύπου $k \times n$, ο μεγαλύτερος υποπίνακας με ορίζουσα μη μηδενική είναι τύπου $p \times p$, τότε ο βαθμός του πίνακα A είναι p.

Απόδειξη: Ας είναι r ο βαθμός του πίνακα A, και B υποπίνακας του A, τύπου $r \times n$, τέτοιος ώστε οι γραμμές του είναι ανεξάρτητες. Σύμφωνα με το θεώρημα 8.1, υπάρχει υποπίνακας του B, τύπου $r \times r$, με ορίζουσα μη μηδενική.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος τέτοιος υποπίνακας. Ας υποθέσουμε ότι C είναι υποπίνακας του A, τύπου $m \times m$ ώστε $m > r$ και $\det C \neq 0$. Από το θεώρημα (8.1) οι γραμμές του υποπίνακα B_1 του A, τύπου $m \times n$, που ορίζεται από τις γραμμές του C, είναι ανεξάρτητες. Οπότε, η διάσταση του χώρου γραμμών του A πρέπει να είναι τουλάχιστον m. 'Ατοπο, αφού ο βαθμός του A είναι r.■

Πόρισμα 8.3. Κάθε πίνακας A, τύπου $n \times n$, έχει βαθμό n ακριβώς όταν $\det A \neq 0$.

Ορισμός Ορίζουσας Πίνακα. Ας είναι $j_1, j_2, \ldots, j_k$ μία μετάθεση των φυσικών αριθμών $1, 2, \ldots, k$. Για κάθε αριθμό j_i στη διάταξη αυτή μετράμε το πλήθος των στοιχείων που είναι μικρότεροι και μετά απ'αυτόν. Ο αριθμός αυτός καλείται **αριθμός παραβάσεων** του j_i. Αν σημειώσουμε τον αριθμό αυτό για κάθε ακέραιο j_i στην διάταξη και τους προσθέσουμε το άθροισμα καλείται **συνολικός αριθμός παραβάσεων** που αντιστοιχεί στη μετάθεση αυτή. Αν ο αριθμός είναι άρτιος (περιττός), η μετάθεση καλείται **άρτια (περιττή)**.

Για παράδειγμα, ας είναι η μετάθεση των φυσικών αριθμών από 1 μέχρι 6:

$$2,\ 5,\ 1,\ 3,\ 6,\ 4.$$

Αν μετρήσουμε τις παραβάσεις, θα βρούμε για τον αριθμό 2 μία παράβαση, για το 5 τρεις παραβάσεις, για τους 1 και 3 καμμία παράβαση, για το 6 μία παράβαση και για το 4 καμμία παράβαση. Το άθροισμα των παραβάσεων είναι 5, οπότε η μετάθεση αυτή είναι περιττή.

Ονομάζουμε **πρόσημο** μίας μετάθεσης το +1 ή το -1, όταν είναι άρτια ή περιττή αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4. Αν εναλλάξουμε δύο στοιχεία μίας μετάθεσης, τότε η μετάθεση που προκύπτει είναι ετερόσημη της αρχικής.

Απόδειξη:[1] Έστω ότι τα στοιχεία j_i, j_{i+1} της μετάθεσης

$$j_1, \ldots, j_i, j_{i+1}, \ldots, j_k$$

εναλλάσσονται, τότε έχουμε τη νέα μετάθεση

$$j_1, \ldots, j_{i+1}, j_i, \ldots, j_k \tag{8.2}$$

Είναι φανερό ότι το πλήθος των παραβάσεων των αριθμών $j_1, \ldots, j_{i-1}$, $j_{i+2}, \ldots, j_k$ και στις δύο μεταθέσεις είναι το ίδιο. Οπότε θα πρέπει να συγκρίνουμε στις μεταθέσεις αυτές τις παραβάσεις των αριθμών j_i, j_{i+1}.

Αν $j_i < j_{i+1}$, ο αριθμός των παραβάσεων του j_i και στις δύο μεταθέσεις είναι ο ίδιος ενώ οι παραβάσεις του j_{i+1} στην (8.2) είναι κατά μία περισσότερες εκείνων στην αρχική. Έτσι οι συνολικοί αριθμοί των παραβάσεων στις δύο μεταθέσεις διαφέρουν κατά 1.

Όμοια, αν $j_i > j_{i+1}$, τότε οι παραβάσεις του j_i στην (8.2) είναι κατά μία λιγότερες εκείνων που υπάρχουν στην αρχική και ο αριθμός των παραβάσεων του j_{i+1} και στις δύο μεταθέσεις είναι ο ίδιος. Έτσι έχουμε και πάλι ότι οι συνολικοί αριθμοί των παραβάσεων διαφέρουν κατά 1.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η μετάθεση (8.2) είναι ετερόσημη της αρχικής.■

Παράδειγμα: Αν εναλλάξουμε το δεύτερο και τρίτο στοιχείο στην μετάθεση στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε 2,1,**5**,3,6,4 στην οποία ο συνολικός αριθμός των παραβάσεων είναι 4, δηλαδή η μετάθεση είναι άρτια.

Ορισμός 8.2. Έστω ο τετραγωνικός πίνακας, τύπου $k \times k$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Από κάθε γραμμή του και κάθε στήλη του εκλέγουμε ένα στοιχείο και σημειώνουμε το γινόμενο αυτών

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{kj_k} \tag{8.3}$$

με πρόσημο ± σύμφωνα με το πρόσημο της μετάθεσης $j_1, \ldots, j_k$ αν είναι άρτια ή περιττή αντίστοιχα. (Σημειώστε ότι εκλέγουμε τα στοιχεία από την 1η,...,k-στή γραμμή και μετά υπολογίζουμε το πρόσημο της μετάθεσης των δεικτών στήλης).

Αν προσθέσουμε όλα τα **δυνατά** προσημασμένα γινόμενα, το άθροισμα αυτών καλείται **ορίζουσα** του πίνακα A και σημειώνεται det A ή |A|.[2)]

Παρατήρηση: Εφαρμόζοντας τον ορισμό 8.2 για ένα πίνακα τύπου 2×2 έχουμε:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

και για ένα πίνακα τύπου 3×3:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Από τον ορισμό 8.2 αμέσως αποδεικνύονται οι ιδιότητες (2), (4) και (5).

Πραγματικά, αν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή, τότε κάθε όρος στο ανάπτυγμα της det A έχει έναν παράγοντα ίσο με το μηδέν. Οπότε, $\det A = 0$.

Όμοια, αν ο πίνακας A είναι μοναδιαίος στον τύπο (8.3), κάθε όρος έχει έναν παράγοντα ίσο με το μηδέν εκτός από τον όρο

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{kk} = 1\ldots 1 = 1.$$

Έτσι, $\det A = 1$.

Τέλος, για την ιδιότητα (2), αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής επί c ο γενικός όρος στο ανάπτυγμα της det A' είναι

$$\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots(ca_{ij_i})\ldots a_{kj_k}.$$

Οπότε, $\det A' = c \det A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5. Αν ο πίνακας A' προκύπτει από τον πίνακα A μετά από εναλλαγή δύο γραμμών του τότε det A'=-det A.[3)]

Απόδειξη: Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση που οι εναλλασσόμενες γραμμές είναι διαδοχικές, η i-στη και ή (i+1)-στη. Κάθε όρος στο ανάπτυγμα της det A' παρουσιάζεται και στο ανάπτυγμα της det A, αφού τα στοιχεία λαμβάνονται από κάθε γραμμή και στήλη κάνοντας όλες τις **δυνατές εκλογές.** Απομένει να διερευνήσουμε μόνο το πρόσημο κάθε όρου και στα δύο αναπτύγματα.

Έστω $a_{1j_1}\ldots a_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\ldots a_{kj_k}$ είναι ένας όρος στο ανάπτυγμα της det A. Ο αντίστοιχος όρος στο ανάπτυγμα της det A' έχει τους ίδιους παράγοντες αλλά έχουν **διαφορετική διάταξη.** Για να βρούμε το πρόσημο του όρου αυτού θα πρέπει να τους διατάξουμε με την σειρά των γραμμών που επιλέχθηκαν και μετά να υπολογίσουμε το πρόσημο της μετάθεσης των δεικτών στήλης. Έτσι στο ανάπτυγμα της det A' ο όρος αυτός παρουσιάζεται σαν

$$a_{1j_1}\ldots a_{i+1,j_{i+1}}a_{ij_i}\ldots a_{kj_k}$$

Η μετάθεση των δεικτών στήλης παραμένει η ίδια εκτός από τα στοιχεία j_i και j_{i+1} που έχουν εναλλαχθεί. Από το θεώρημα 8.4 αυτό σημαίνει ότι ο όρος αυτός παρουσιάζεται στα αναπτύγματα των det A, det A' με αντίθετα πρόσημα. Επειδή όμως αυτό συμβαίνει για κάθε όρο του αναπτύγματος det A', έχουμε det A' = - det A.

Ας θεωρήσουμε τώρα την γενική περίπτωση όπου ο πίνακας A' προκύπτει από εναλλαγή των γραμμών i και j. Έστω $i<j$ και σημειώνουμε

$$\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_i,\ldots,\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_k$$

τις γραμμές του A. Ο πίνακας A' προκύπτει μετά από εναλλαγές διαδοχικών γραμμών ως εξής: πρώτα εναλλάσσουμε τις $\vec{a}_i$ και $\vec{a}_{i+1}$, μετά εναλλάσσουμε τις $\vec{a}_i$ και $\vec{a}_{i+2}$ κ.ο.κ., μέχρι η γραμμή $\vec{a}_i$ μεταφερθεί πριν από την

a_j. Το πλήθος των εναλλαγών αυτών είναι $j-i-1$. Μετά εναλλάσσουμε τις γραμμές a_i και $\vec{a}_j$ και στη συνέχεια την $\vec{a}_j$ διαδοχικά με τις a_{j-1}, $\vec{a}_{j-2},\ldots,\vec{a}_{i+1}$. Το σύνολο των εναλλαγών αυτών είναι $(j-i-1)+1$. Μετά τις εναλλαγές αυτές προκύπτει ο πίνακας A'. Επειδή η διαδικασία αυτή απαιτεί $2(j-i-1)+1$ εναλλαγές διαδοχικών γραμμών, η ορίζουσα αλλάζει σημείο περιττού πλήθους φορές, οπότε $\det A' = -\det A$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.6. Αν ο πίνακας A' προκύπτει από τον πίνακα A, όταν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή από το άθροισμα αυτής και το γινόμενο της m γραμμής επί τον αριθμό d, τότε

$$\det A' = \det A.$$

Απόδειξη: Ο γενικός όρος στο ανάπτυγμα της $\det A$ είναι

$$\pm a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{ij_i} \ldots a_{kj_k}$$

Ο αντίστοιχος όρος στο ανάπτυγμα της $\det A'$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τον παράγοντα a_{ij_i} με τον όρο $(a_{ij_i}+da_{mj_i})$. Έτσι, έχουμε

$$\pm a_{ij_1} \ldots (a_{ij_i}+da_{mj_i}) \ldots a_{kj_k} =$$

$$=(\pm a_{1j_1} \ldots a_{ij_i} \ldots a_{kj_k})+(\pm a_{1j_1} \ldots (da_{mj_i}) \ldots a_{kj_k})$$

Από αυτή συμπεραίνουμε ότι

$$\det A' = \det A + \det B,$$

όπου ο πίνακας B προκύπτει από τον A όταν αντικαταστήσουμε την i γραμμή του με την m. Επειδή ο B έχει δύο γραμμές ίδιες, εναλλάσσοντας αυτές προκύπτει ο πίνακας B'(=B). Έτσι, $\det B = \det B'$. Όμως, από το θεώρημα 8.5 έχουμε $\det B = -\det B'$ και κατά συνέπεια $\det B = 0$. ■

Υπολογισμός Ορίζουσας. Από τις ιδιότητες (1), (2) και (3) είναι φανερό ότι για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα, θα πρέπει με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών να βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του πίνακα και ταυτόχρονα να σημειώνουμε τις αλλαγές γραμμών. Έτσι, όταν ο πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή και μία τουλάχιστον γραμμή του είναι μηδενική τότε η ορίζουσα ισούται με μηδέν. Διαφορετικά, ο πίνακας θα είναι **τριγωνικής μορφής**

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}$$

Στην ειδική αυτή περίπτωση από τον Ορισμό 8.2 προκύπτει:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.7. $\det B = b_{11}b_{22}\ldots b_{kk}$.

Παράδειγμα 8.1. Ας υπολογίσουμε μία ορίζουσα με τη μέθοδο αυτή.

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{7} \end{bmatrix} = -19.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο των μεταθέσεων:

   (a) 2,4,1,3 (b) 5,4,3,2,1 (c) 7,6,5,3,4,1,2.

2. Εφαρμόστε το θεώρημα 8.2 για να βρείτε το βαθμό του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Να υπολογισθούν οι ορίζουσες:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. Γράψτε το ανάπτυγμα ορίζουσας ενός πίνακα τύπου 4×4.

5. Αν οι αριθμοί $a_1, \dots, a_k$ είναι διακεκριμένοι, δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{k-1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 1 & a_k & a_k^2 & \dots & a_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

είναι μη μηδενική. (Υποδ. Δείξτε ότι οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες).

6. Στο σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$, ας είναι ο πίνακας A τύπου $n\times n$.

   (a) Αν $\det A \neq 0$, τί συμπεραίνετε για τη γενική λύση του συστήματος;

   (b) Αν $\det A \neq 0$ και $\vec{b}=0$, τί συμπεραίνετε για τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος;

   (c) Αν $\det A = 0$, τί συμπεραίνετε για τη γενική λύση;

   (d) Αν $\det A = 0$ και $\vec{b}=0$, τί συμπεραίνετε για τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος;

7. Αποδείξτε το θεώρημα 8.7.

§ 9. ΧΩΡΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θεωρούμε το σύνολο F των πραγματικών συναρτήσεων $f(x)$ που είναι ορισμένες στο διάστημα $a \leq x \leq b$. Ορίζοντας

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (cf)(x)=cf(x)$$

επαληθεύουμε εύκολα ότι με τις πράξεις αυτές το σύνολο F είναι διανυσματικός χώρος. Στο σύνολο F το μηδενικό διάνυσμα είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x)=0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Το σύνολο C των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του F, αφού το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και το ίδιο για το γινόμενο συνεχούς συνάρτησης επί ένα αριθμό c. Οι συναρτήσεις $f_1(x),\dots,f_p(x)$ του διανυσματικού χώρου F καλούνται **γραμμικά ανεξάρτητες**, ακριβώς όταν για κάθε $x \in [a,b]$ από τον τύπο

$$c_1f_1(x)+\dots+c_pf_p(x)=0 \Longrightarrow c_1=\dots=c_p=0$$

Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις x και ημ x που ορίζονται στο διάστημα $[0,1]$ είναι ανεξάρτητες, γιατί από την εξίσωση $c_1x + c_2\,\text{ημ}\,x = 0$ για ειδικές τιμές του x έχουμε:

$$c_1\,\frac{\pi}{6} + c_2\ \text{συν}\ \frac{\pi}{6} = 0$$

$$c_1\,\frac{\pi}{4} + c_2\ \text{συν}\ \frac{\pi}{4} = 0$$

Το σύστημα αυτό έχει τη μοναδική λύση $c_1 = c_2 = 0$.

Στο σύνολο F το εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle$ των συναρτήσεων f και g ορίζεται από τον τύπο:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

όταν το γινόμενο $f(x)g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι φανερό ότι στο διανυσματικό υπόχωρο C το $\langle f,g\rangle$ είναι πάντοτε ορισμένο. Επίσης χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος, επαληθεύουμε αμέσως τις ιδιότητες (9)-(12) στο εδάφιο 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι αν $f \in C$ και $\langle f,f\rangle = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

2. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $1, x, e^x$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[0,1]$.

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $1, x, x^2$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$.

4. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $1, x, x^2, \ldots, x^n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$.

5. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $1, e^x, e^{2x}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$.

6. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις ημ x, συν x, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$.

7. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $1, x-1, x^2-1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$.

8. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $1, x^2-1, x^2+1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$.

9. Οι συναρτήσεις f και g καλούνται **ορθογώνιες** ακριβώς όταν $\langle f,g\rangle = 0$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1,\ \text{συν}\,x,\ \text{ημ}\,x,\ \text{συν}\,2x,\ \text{ημ}\,2x,\ \ldots,\ \text{συν}\,nx,\ \text{ημ}\,nx,$$

είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0,2\pi]$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = a_0 + a_1\,\text{συν}\,x + b_1\,\text{ημ}\,x$ ορισμένη στο διάστημα $[0,2\pi]$. Πολλαπλασιάστε επί 1, συν x και ημ x για να βρείτε τους τύπους που ορίζονται οι συντελεστές a_0, a_1 και b_1.

11. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1,\ \text{συν}\,x,\ \text{ημ}\,x,\ \text{συν}\,2x,\ \text{ημ}\,2x,\ \ldots,\ \text{συν}\,nx,\ \text{ημ}\,nx$$

είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στο διάστημα $[0,2\pi]$.

12. Στο διάστημα $[0,2\pi]$, αν

$$f(x) = a_0 + a_1\,\text{συν}\,x + b_1\,\text{ημ}\,x + \ldots + a_n\,\text{συν}\,nx + b_n\,\text{ημ}\,nx$$

να υπολογισθούν οι συντελεστές $a_0,\ldots,b_n$. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται **συντελεστές Fourier**.

13. Έστω ότι οι συναρτήσεις

$$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$$

είναι ένα ορθογώνιο σύνολο στο διάστημα $[a,b]$. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x),$$

βρείτε τους τύπους για τους συντελεστές $c_0,\ldots,c_n$. Οι αριθμοί που ορίζονται από τους τύπους αυτούς καλούνται συντελεστές Fourier ως προς το ορθογώνιο σύνολο $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$.

14. Να υπολογισθούν οι αριθμοί c_0,d_0,d_1 έτσι ώστε τα πολυώνυμα P_0, P_1 και P_2 που ορίζονται από τους τύπους

$$P_0(x)=1,$$

$$P_1(x)=x+c_0P_0(x),$$

$$P_2(x)=x^2+d_0P_0(x)+d_1P_1(x),$$

να είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$. Συγκρίνετε με την άσκηση 12 της §4.

15. Γενικεύστε την άσκηση 14 για να δείξετε ότι υπάρχουν συναρτήσεις

$$P_0(x),P_1(x),\ldots,P_n(x)$$

ορθογώνιες στο διάστημα $[-1,1]$, όπου $P_i(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού i, για $i=0,1,\ldots,n$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές σαν **πολυώνυμα Lagendre**.

16. Δείξτε ότι αν οι αριθμοί $a_1,\ldots,a_k$ είναι διακεκριμένοι, τότε οι συναρτήσεις

$$e^{a_1x},\ldots,e^{a_kx}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[a,b]$ και $\langle e^{a_ix},e^{a_jx}\rangle\neq 0$ για κάθε $i\neq j$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στο σημείο αυτό θ' αναφέρουμε ορισμένα συμπληρωματικά θέματα για να ολοκληρώσουμε ή αποσαφηνίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας.

1.1. Το διάνυσμα $(-1)\vec{a}$ το συμβολίζουμε $-\vec{a}$ και καλείται **αντίθετο** του $\vec{a}$.

1.2. Στον εποπτικό χώρο το σύνολο $\Delta_1(\Delta_2)$ των διανυσμάτων των παραλλήλων προς μία σταθερή ευθεία (επίπεδο) είναι διανυσματικός χώρος.

1.3. Αν τα διανύσματα $\vec{a}=[a_1,\ldots,a_n]$, $\vec{b}=[b_1,\ldots,b_n]$ είναι του μιγαδικού χώρου C^n, τότε το εσωτερικό γινόμενο τους ορίζεται από τον τύπο

$$a\cdot b=a_1\overline{b}_1+\ldots+a_n\overline{b}_n$$

και αντί της ιδιότητας (9), έχουμε $a\cdot b=\overline{b\cdot a}$.

1.4. Επίσης ισχύει:

$$-(c\vec{a})=(-c)\vec{a}=c(-\vec{a})$$

Απόδειξη:

$$\vec{0}=0\vec{a}=[c+(-c)]\vec{a}=c\vec{a}+(-c)\vec{a} \Rightarrow -(c\vec{a})=(-c)\vec{a}$$

$$\vec{0}=c\vec{0}=c[\vec{a}+(-\vec{a})]=c\vec{a}+c(-\vec{a}) \Rightarrow -(c\vec{a})=c(-\vec{a})$$

2.1. Οι συνθήκες του ορισμού (2.1) είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη:

Για κάθε διάνυσμα $\vec{a},\vec{b}\in W$ και για κάθε πραγματικούς αριθμούς k,c το διάνυσμα $k\vec{a}+c\vec{b}\in W$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη αυτή. Τότε για $k=c=1$ προκύπτει η συνθήκη (I) και για $k=1$, $c=0$ προκύπτει η συνθήκη (II).

Αντίστροφα, από την (II) έχουμε $k\vec{a}\in W$ και $c\vec{b}\in W$ και από την (I) προκύπτει πλέον $k\vec{a}+c\vec{b}\in W$. ■

2.2. Απόδειξη του θεωρήματος 2.1. Τα διανύσματα

$$\vec{\varepsilon}_1=[1,0,\dots,0],\ \vec{\varepsilon}_2=[0,1,0,\dots,0],\dots,\ \vec{\varepsilon}_n=[0,\dots,0,1]$$

του V^n είναι γεννήτορες του, αφού για κάθε διάνυσμα $\vec{a}\in V^n$ είναι

$$[a_1,a_2,\dots,a_n]=a_1\vec{\varepsilon}_1+a_2\vec{\varepsilon}_2+\dots+a_n\vec{\varepsilon}_n.$$

2.3. Απόδειξη του θεωρήματος 2.2. Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι ομογενές και τα διανύσματα

$$\vec{\xi}=[\xi_1,\dots,\xi_n],\qquad \vec{\eta}=[\eta_1,\dots,\eta_n]$$

είναι δύο λύσεις του. Επειδή

$$\left.\begin{aligned}a_{i1}\xi_1+\dots+a_{in}\xi_n=0\\ a_{i1}\eta_1+\dots+a_{in}\eta_n=0\end{aligned}\right\}\quad (i=1,\dots,k)$$

έχουμε

$$a_{i1}(\xi_1+\eta_1)+\dots+a_{in}(\xi_n+\eta_n)=0\qquad (i=1,\dots,k)$$

και

$$a_{i1}(c\xi_1)+\dots+a_{in}(c\xi_n)=0\qquad (i=1,\dots,k)$$

Έτσι, αποδείχθηκε ότι τα διανύσματα $\xi+\eta$ και $\lambda\xi$ είναι λύσεις του συστήματος και κατά συνέπεια ο χώρος των λύσεων είναι διανυσματικός υπόχωρος. Αντίστροφα, αν το σύστημα δεν είναι ομογενές και $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ είναι λύσεις του, από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_{i1}\xi_1+\ldots+a_{in}\xi_n&=b_i \\ & & (i=1,\ldots,k) \\ a_{i1}\eta_1+\ldots+a_{in}\eta_n&=b_i \end{aligned}$$

έχουμε

$$a_{i1}(\xi_1+\eta_1)+\ldots+a_{in}(\xi_n+\eta_n)=2b_i \qquad (i=1,\ldots,k)$$

Αφού το διάνυσμα $\vec{\xi}+\vec{\eta}$ δεν είναι λύση του συστήματος (2.1) το σύνολο των λύσεων δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος. ■

4.1. Μία άλλη διατύπωση του Θεωρήματος (4.5) είναι:

> "Αν $\vec{\varepsilon}_1,\ldots,\vec{\varepsilon}_n$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου V^n και $\vec{\eta}_1,\ldots,\vec{\eta}_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματά του, τότε μπορούμε ν'αντικαταστήσουμε $\vec{p}$ κατάλληλα διανύσματα από τη βάση με τα $\vec{\eta}_1,\ldots,\vec{\eta}_p$ ώστε το νέο σύνολο να είναι βάση του V^n."

4.2. Ισοδύναμη διατύπωση:

> "Αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_\mu$ είναι εξαρτημένα, τότε τα διανύσματα κάθε συνόλου που τα περιέχει είναι εξαρτημένα."

Απόδειξη: Ας είναι τα διανύσματα

$$\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_\mu,\vec{a}_{\mu+1},\ldots,\vec{a}_p$$

Επειδή, τα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_\mu$ είναι εξαρτημένα, υπάρχουν κατάλληλοι αριθμοί c_i, όχι όλοι μηδέν, έτσι ώστε

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_\mu\vec{a}_\mu=0.$$

Αλλά η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_\mu\vec{a}_\mu+0\vec{a}_{\mu+1}+\ldots+0\vec{a}_p=0$$

Οπότε, τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ σύμφωνα με το θεώρημα (4.1) είναι εξαρτημένα.■

4.3. Σημειώστε την παρακάτω πρόταση:

"Αν W είναι p-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του V^n, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\vec{\varepsilon}_1,\ldots,\vec{\varepsilon}_n$ του V^n, τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1,\ldots,\vec{\varepsilon}_p$ να είναι ορθοκανονική βάση τους W."

5.1. Ορισμοί:

α. Όταν $k=1$, ο πίνακας καλείται **γραμμή** καί όταν $n=1$, καλείται **στήλη**.

β. Όταν $k=n$, ο πίνακας καλείται **τετραγωνικός**.

γ. Τα στοιχεία του πίνακα με τον ίδιο δείκτη γραμμής και στήλης καλούνται **διαγώνια**.

δ. Όταν ένας τετραγωνικός πίνακας έχει όλα τα στοιχεία του πλην των διαγωνίων ίσα με το μηδέν, καλείται **διαγώνιος** π.χ. ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ε. Δύο πίνακες είναι **ίσοι**, ακριβώς όταν είναι του ίδιου τύπου και τα στοιχεία τους με τον ίδιο δείκτη γραμμής και στήλης είναι ίσα.

5.2. Σ'ένα πίνακα ορίζονται κατά τον ίδιο τρόπο οι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών**.

5.3. Τα διανύσματα $\vec{a}_i = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$ $(i=1,\ldots,k)$ είναι σε **κλιμακωτή μορφή**, ακριβώς όταν για τις πρώτες μη μηδενικές συντεταγμένες $a_{is}, a_{i+1,t}$ των διανυσμάτων $\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots)$ είναι $s<t$.

Για παράδειγμα, τα διανύσματα

$$[1,0,0,-3],\ [0,0,1,2],\ [0,0,0,1]$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή, αλλά αυτό δε συμβαίνει για τα διανύσματα

$$[1,0,-1],\ [-1,2,0],\ [0,-1,1].$$

5.4. Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών σ' έναν πίνακα, βρίσκουμε την κλιμακωτή ή κανονική μορφή του κατά στήλες.

6.1. Έστω

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdot & & \cdot & & \cdot & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdot & & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & & a'_{rr} & & \ldots & a'_{rn} \\ 0 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & 0 \\ 0 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος σε κλιμακωτή μορφή. Είναι φανερό ότι οι r πρώτες στήλες $\vec{\zeta}_1,\ldots,\vec{\zeta}_r$ του πίνακα (6.4) είναι ανεξάρτητες. Επειδή ο βαθμός του πίνακα είναι r, από την άσκηση 5 στο εδάφιο 5 και το θεώρημα 4.2 προκύπτει ότι οι στήλες

$$\vec{\zeta}_{r+1},\ldots,\vec{\zeta}_n$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\zeta}_1,\ldots,\vec{\zeta}_r$. Οπότε, υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές, όχι όλοι μηδέν, ώστε:

$$\mu_{\sigma 1}\vec{\zeta}_1+\ldots+\mu_{\sigma r}\vec{\zeta}_r+\mu_\sigma\vec{\zeta}_\sigma=0 \quad (\sigma=r+1,\ldots,n)$$

Απ'αυτή συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα:

$$\vec{y}_{r+1}=\left[\mu_{r+1,1},\ldots,\mu_{r+1,r},\mu_{r+1},0,\ldots,0\right]$$

$$\vec{y}_{r+2}=\left[\mu_{r+2,1},\ldots,\mu_{r+2,r},0,\mu_{r+2},0,\ldots,0\right]$$

$$\vdots$$

$$\vec{y}_n \;=\; \mu_{n,1},\ldots,\mu_{n,r},0,\ldots,0,\mu_n$$

ανήκουν στο χώρο των λύσεων W του συστήματος. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτά τα $n-r$ διανύσματα είναι μία βάση του W.

Πραγματικά, τα διανύσματα αυτά είναι ανεξάρτητα, γιατί από τον τύπο

$$c_{r+1}y_{r+1}+\ldots+c_ny_n=0$$

έχουμε $c_{r+1}\mu_{r+1}=\ldots=c_n\mu_n=0$. Αλλά $\mu_{r+1},\ldots,\mu_n$ είναι διαφορετικά από το μηδέν και τότε, $c_{r+1}=\ldots=c_n=0$.

Επίσης είναι γεννήτορες του χώρου των λύσεων, γιατί αν

$$\vec{x}=\left[x_1,\ldots,x_n\right]$$

είναι λύση του συστήματος, τότε και το διάνυσμα

$$\vec{u}=\left[u_1,\ldots,\vec{u}_n\right]=\vec{x}-\frac{x_{r+1}}{\mu_{r+1}}\vec{y}_{r+1}-\ldots-\frac{x_n}{\mu_n}\vec{y}_n \qquad (6.5)$$

είναι λύση του, δηλαδή έχουμε:

$$u_1\vec{\zeta}_1+\ldots+u_n\vec{\zeta}_n=0.$$

Από την (6.5), μετά από πράξεις στο 2ο μέλος, προκύπτει

$$u_{r+1}=\ldots=u_n=0$$

και κατά συνέπεια από τον τελευταίο τύπο, επειδή $\vec{\zeta}_1,\dots,\vec{\zeta}_r$ είναι ανεξάρτητα, θα είναι $u_1=\dots=u_r=0$, δηλαδή $u=0$.

Έτσι το τυχαίο διάνυσμα x του χώρου των λύσεων του συστήματος είναι της μορφής:

$$\vec{x}=\frac{x_{r+1}}{\mu_{r+1}}\vec{y}_{r+1}+\dots+\frac{x_n}{\mu_n}\vec{y}_n$$

και η πρόταση αποδείχθηκε.■

7.1. Γενικά ισχύει η πρόταση:

> "Αν στο σύστημα (7.3) ο κοινός βαθμός του πίνακα των συντελεστών και του επαυξημένου πίνακα είναι r, τότε η γενική λύση του συστήματος έχει n − r αυθαίρετες παραμέτρους."

8.1. Στη μετάθεση

$$j_1,\dots,j_\rho,\dots,j_\sigma,\dots,j_k,$$

αν εναλλάξουμε τα στοιχεία j_ρ, j_σ, προκύπτει η μετάθεση

$$j_1,\dots,j_\sigma,\dots,j_\rho,\dots,j_k.$$

Η νέα μετάθεση προκύπτει επίσης μετά από $2(\rho-\sigma)-1$ διαδοχικές εναλλαγές των αριθμών

$$j_\rho, j_{\rho+1},\dots,j_\sigma.$$

Επειδή ο αριθμός των διαδοχικών εναλλαγών είναι περιττός, αρκεί να δείξουμε την πρόταση στην περίπτωση που τα εναλλασσόμενα στοιχεία είναι διαδοχικά.

8.2. Μία άλλη διατύπωση του Ορισμού 8.2 είναι η εξής:

> **Ορίζουσα** του πίνακα $A=\left[a_{ij}\right]$, τύπου $k\times k$, καλείται η παράσταση

$$P = \sum_{j_1\ldots j_k} \varepsilon_{j_1\ldots j_k} a_{1j_1}\ldots a_{kj_k},$$

όπου $\varepsilon_{j_1\ldots j_k}$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης $j_1,\ldots,j_k$ και η άθροιση εκτείνεται σ'όλες τις k! μεταθέσεις.

Αν

$$Q = \sum_{i_1\ldots i_k} \varepsilon_{i_1\ldots i_k} a_{i_1 1}\ldots a_{i_k k}$$

αποδεικνύεται ότι $P=Q$. Οπότε, στον προηγούμενο ορισμό μπορούμε να θεωρήσουμε το άθροισμα Q αντί του P.

Πρόταση. Οι ορίζουσες των πινάκων A και του αναστρόφου του A^T είναι ίσες.

Απόδειξη: Αν $A=\left[a_{ik}\right]$ και $A^T=\left[b_{ik}\right]$, από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα (§5 άσκηση 5) έχουμε $b_{ik}=a_{ki}$. Οπότε,

$$\det A^T = \sum_{j_1\ldots j_k} \varepsilon_{j_1\ldots j_k} b_{1j_1}\ldots b_{kj_k},$$

$$= \sum_{j_1\ldots j_k} \varepsilon_{j_1\ldots j_k} a_{j_1 1}\ldots a_{j_k k} = \det A. \blacksquare$$

8.3. Μία άλλη απόδειξη του θεωρήματος 8.5 είναι η εξής:

Ας εναλλάξουμε τις γραμμές $\left[a_{\rho 1},\ldots,a_{\rho k}\right]$ και $\left[a_{\sigma 1},\ldots,a_{\sigma k}\right]$ στον πίνακα A, τότε μεταξύ των στοιχείων a_{ik}, b_{ik} των πινάκων A, A' αντίστοιχα είναι:

$$b_{ik}=a_{ik} \qquad (i\neq\rho,\sigma)$$

$$b_{\rho k}=a_{\sigma k}, \qquad b_{\sigma k}=a_{\rho k}.$$

Έτσι, από τον τύπο (8.3) προκύπτει:

$$\det B = \sum_{j_1\ldots j_k} \varepsilon_{j_1\ldots j_\rho\ldots j_\sigma\ldots j_k} b_{1j_1}\ldots b_{\rho j_\rho}\ldots b_{\sigma j_\sigma}\ldots b_{kj_k}$$

$$= \sum_{j_1\ldots j_k} \varepsilon_{j_1\ldots j_\rho\ldots j_\sigma\ldots j_k} a_{1j_1}\ldots a_{\sigma j_\rho}\ldots a_{\rho j_\sigma}\ldots a_{kj_k}$$

$$= - \sum_{j_1\ldots j_k} \varepsilon_{j_1\ldots j_\sigma\ldots j_\rho\ldots j_k} a_{1j_1}\ldots a_{\rho j_\sigma}\ldots a_{\sigma j_\rho}\ldots a_{kj_k}$$

$$= - \det A. \blacksquare$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

§ 1

1. (a) $[9,1,3,-1]$, (b) $[a+b,b,b,b]$, (c) 2, (d) a
2. V^1: ευθεία, V^2: επίπεδο.
3. Η (7) και (5) ταυτίζονται με τις (10) και (11) αντίστοιχα. Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος.
4. Για παράδειγμα στο πρώτο μέλος της (6) η πρόσθεση σημειώνεται μεταξύ των αριθμών c, d και στο δεύτερο μέλος μεταξύ των διανυσμάτων.
5. Στο V^3 είναι $|\vec{a}| = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}$ και παριστάνει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με αρχή το 0 και πέρας το σημείο (a_1,a_2,a_3).
6. Ψευδείς: b, f, g, j, l.

   Με περιορισμούς: e, όταν $a \neq 0$

   m, όταν $c > 0$ και αποδείχνεται όπως η (n).

   Υποδείξεις για τις αληθείς:

   a. $0+1=1 \Rightarrow (0+1)\vec{a}=1\vec{a} \Rightarrow 0\cdot\vec{a}+\vec{a}=\vec{a} \Rightarrow (0\cdot\vec{a}+\vec{a})+(-1)\vec{a}$

   $=\vec{a}+(-1)\vec{a} \Rightarrow 0\cdot\vec{a}+\left[\vec{a}+(-1)\vec{a}\right]=0 \Rightarrow 0\cdot\vec{a}+0=0 \Rightarrow 0\cdot a=0.$

   c. $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a} \Rightarrow c(\vec{0}+\vec{a})=c\cdot\vec{a} \Rightarrow c\vec{0}+c\vec{a}=ca \Rightarrow c\vec{0}=\vec{0}$

   d. Από το αξίωμα (4) είναι $b=(-1)a$. Επιπλέον αν υπάρχει διάνυσμα $\vec{b}_1$ ώστε $\vec{a}+\vec{b}_1=\vec{0}$ τότε

   $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}_1 \Rightarrow (-1)\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=(-1)\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b}_1) \Rightarrow \left[(-1)\vec{a}+\vec{a}\right]+b$

   $=\left[(-1)\vec{a}+\vec{a}\right]+\vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b}=\vec{b}_1.$

   e. Αρκεί να δείξουμε ότι $c\vec{a}=\vec{0} \Rightarrow c=0$ ή $\vec{a}=\vec{0}$.

Πραγματικά, αν $c \neq 0$, τότε υπάρχει το c^{-1} και έχουμε:

$\vec{a}=1\vec{a}=(c^{-1}c)\vec{a}=c^{-1}(c\vec{a})=c^{-1}0=0.$

Αν είναι $a \neq \vec{0}$, τότε $c=0$, γιατί αν ήταν $c \neq 0$, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε $\vec{a}=\vec{0}$, άτοπο.

h. $(c\vec{a})(d\vec{b})=c\left[\vec{a}\cdot(d\vec{b})\right]=c\left[(d\vec{b})\cdot\vec{a}\right]=(cd)(\vec{b}\cdot\vec{a})$

$=(cd)(a\cdot b)$

i. $\vec{0}\cdot\vec{a}=0a_1+0a_2+\ldots+0a_\nu=0$

k. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

n. $|c\vec{a}|=\sqrt{(c\vec{a})\cdot(c\vec{a})}=\sqrt{c^2(\vec{a}\cdot\vec{a})}=|c|\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=|c|\,|a|$

o. Από τον ορισμό $\|a\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+\ldots+a_\nu^2}>0$

p. $\|\vec{0}\|=\sqrt{\vec{0}\cdot\vec{0}}=0$

q. $|(1/|\vec{a}|)\vec{a}|=(1/|\vec{a}|)|\vec{a}|=1$

7. Από τον τύπο:

$$0 \leq |c\vec{a}\pm d\vec{b}|^2=c^2\vec{a}^2+d^2\vec{b}^2\pm 2cd\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

για $c=1/|\vec{a}|$ και $d=1/|\vec{b}|$ έχουμε:

$$0 \leq 1 \pm \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

8. Αν $\vec{a}=\left[a_1,a_2,\ldots,a_\nu\right]$, $\vec{b}=\left[b_1,b_2,\ldots,b_\nu\right]$ έχουμε:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \iff (a_1b_1+\ldots+a_\nu b_\nu)^2$$

$$(a_1^2+\ldots+a_\nu^2)(b_1^2+\ldots+b_\nu^2) \iff (a_1b_2-a_2b_1)^2+\ldots$$

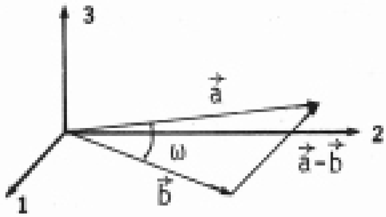
$$+(a_1b_\nu-b_1a_\nu)^2+(a_2b_3-b_2a_3)^2+\ldots+(a_{\nu-1}b_\nu-b_{\nu-1}a_\nu)^2$$

$$=0 \iff \frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_\nu}{b_\nu},$$

δηλαδή, όταν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι συγγραμικά.

9. Ας είναι $\vec{a},\vec{b}$ V^3. Παριστάνοντας το διάνυσμα $\vec{a}-\vec{b}$ με το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο

$$(b_1, b_2, b_3)$$



και πέρας το σημείο

$$(a_1, a_2, a_3),$$

(βλέπε σχήμα), από το νόμο του συνημιτόνου έχουμε:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \text{ συν } \omega; \quad 0 \leq \omega \leq \pi$$

Επειδή όμως

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$= 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

προκύπτει

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \text{ συν } \omega$$

ή

$$\omega = \text{τοξ συν } \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

Έτσι, από τη σχέση $|\text{συν}\,\omega| \leq 1$, επιβεβαιώνεται η ανισότητα Cauchy--Schwarz και γενικεύεται αμέσως ο νόμος του συνημιτόνου για διανύσματα του V^n.

10. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy - Schwarz έχουμε:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} \leq \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}|$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

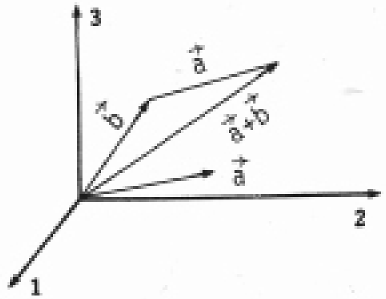
Από την απόδειξη αυτή είναι φανερό ότι

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

ακριβώς όταν $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$. Τότε, σύμφωνα με την άσκηση 8, τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά.

Θέτοντας $\vec{b}=c\vec{a}$, έχουμε $0\leq\vec{a}\cdot\vec{b}=c(\vec{a}\cdot\vec{a})$. Έτσι, αν $\vec{a}\neq 0$, προκύπτει $c\geq 0$, δηλαδή η ισότητα ισχύει όταν a, b είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.

11.



Η ανισότητα στην προηγούμενη άσκηση εκφράζει τη γνωστή γεωμετρική ιδιότητα ότι το μήκος μίας πλευράς τριγώνου είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων πλευρών.

§ 2

1. Δεν είναι διανυσματικοί υπόχωροι τα σύνολα: A_2, A_4, A_7, A_8

   Γεννήτορες του A_1: [1,0,0], [0,1,0]

   Γεννήτορες του A_3: [1,1,1]

   Γεννήτορες του A_5: [1,0,1], [0,-1,0], [1,1,1]

   Γεννήτορες του A_6: [1,1,0], [-2,0,1]

   Γεννήτορες του A_9: [0,0,0]

2. Ο διανυσματικός υπόχωρος A_1 είναι το επίπεδο ΟΧΥ. Ο διανυσματικός υπόχωρος A_3 είναι η ευθεία που περνά από το Ο και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα [1,1,1]. Ο διανυσματικός υπόχωρος A_5 είναι το επίπεδο που ορίζεται από τη διχοτόμο της γωνίας ΧΟΖ και τον άξονα ΟΨ. Ο διανυσματικός υπόχωρος A_6 είναι το επίπεδο που περνά από το Ο και είναι κάθετο στο φορέα του διανύσματος [1,-1,2] και $A_9=\{0\}$.

3. (a) $[-2,-1,1]$, (b) $[2,1,3]$, (c) $[0,0,0]$,

(d) $[-1,1,0]$, $[-1,0,1]$

4. Το σημείο {0}, κάθε ευθεία που περνά από το 0, κάθε επίπεδο που περνά από το 0 και ο ίδιος ο χώρος.

5. Αν $\vec{\eta}_1,\dots,\vec{\eta}_s$ είναι γεννήτορες του W, τότε υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές τέτοιοι ώστε:

$$\vec{b}_i = c_{i_1}\vec{\eta}_1 + \dots + c_{i_s}\vec{\eta}_s \qquad (i=1,\dots,q).$$

Οπότε,

$$k_1\vec{b}_1+\dots+k_q\vec{b}_q=(k_1c_{11}+k_2c_{21}+\dots+k_qc_{q1})\vec{\eta}_1+\dots$$
$$+(k_1c_{1s}+k_2c_{2s}+\dots+k_qc_{qs})\vec{\eta}_s \in W$$

8. Από το ομογενές γραμμικό σύστημα έχουμε $x_1=x_2=x_3=x_4$. Έτσι, για κάθε διάνυσμα x είναι:

$$[x_1,x_2,x_3,x_4] = x_1\,[1,1,1,1].$$

9. $$[1,-2,1]=2[1,-1,2]-[1,0,3].$$

§ 3

2. Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n&=0\\ b_{22}x_2+b_{23}x_3+\dots+b_{2n}x_n&=0\\ c_{33}x_3+\dots+c_{3n}x_n&=0\\ &\vdots\\ \boxed{d_{kk}x_k+\dots+d_{kn}x_n=0}& \end{aligned}$$

μετά από k-1 βήματα απαλειφής του συστήματος (3.1). Αν $d_{kk}, d_{k,k+1} \neq 0$, το μη μηδενικό διάνυσμα

$$\left[-\frac{d_{k,k+1}}{d_{kk}}, 1, 0, \dots, 0\right]$$

επαληθεύει την τελευταία εξίσωση του συστήματος. Αντικαθιστώντας αυτό το διάνυσμα στις προηγούμενες εξισώσεις του συστήματος και λύνοντας ως προς $x_{k-1}, \dots, x_2, x_1$ βρίσκουμε μία μη μηδενική λύση του ισοδυνάμου συστήματος (3.1).

3. Το διάνυσμα $[-5, 1]$ είναι λύση του μικρότερου συστήματος και το διάνυσμα $[8, -5, 1]$ είναι μία λύση του αρχικού.

§ 4

1. Τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά, οπότε είναι ανεξάρτητα. Επίσης, αν εφαρμόσετε το θεώρημα 4.1, καταλήγετε $c_1 = c_2 = 0$. Τα δύο διανύσματα είναι γεννήτορες διανυσματικού υπόχωρου του V^3. Ποιός είναι;

2. Είναι εξαρτημένα και $\vec{a}_2 = 7\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3$.

3. Εφαρμόστε το θεώρημα 4.1, $[1, 0, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0, 0]$.

5. $[a, b, c] = \frac{c}{2}[1, -1, 2] + \left(a - \frac{c}{2}\right)[1, 1, 0] + (b + c - a)[0, 1, 0]$.

8. Από το θεώρημα 4.3 και τον ορισμό της διάστασης προκύπτει $p \leq n$. Αν $p = n$, τότε κάθε βάση του W είναι και βάση του V^n δηλαδή $W = V^n$.

9. Αν $\vec{b} = c_1\vec{a}_1 + \dots + c_p\vec{a}_p$ και $\vec{b} = \mu_1\vec{a}_1 + \dots + \mu_p\vec{a}_p$, τότε

$$(c_1-\mu_1)\vec{a}_1+\ldots+(c_p-\mu_p)\vec{a}_p=0$$

και επειδή $a_1,\ldots,a_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε:

$$c_i=\mu_i \qquad (i=1,\ldots,p).$$

10. Τα διανύσματα $\vec{e}_i$ είναι ανεξάρτητα (θεώρημα 4.1) και γεννήτορες του V^n, γιατί για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ είναι

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+\ldots+a_n\vec{e}_n.$$

Οι συντελεστές $a_1,a_2,\ldots,a_n$ είναι οι συντεταγμένες του $\vec{a}$.

11. Ας είναι

$$c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p=0.$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με το διάνυσμα $\vec{a}_i (1\le i\le p)$, έχουμε

$$c_1\vec{a}_1\cdot\vec{a}_i+\ldots+c_i\vec{a}_i\cdot\vec{a}_i+\ldots+c_p\vec{a}_p\cdot\vec{a}_i=0$$

και επειδή τα διανύσματα είναι κάθετα, προκύπτει

$$c_i\vec{a}\cdot\vec{a}_i=0 \Rightarrow c_i=0$$

διότι $\vec{a}_i\neq 0$.

12. Αφού b_1, b_2 είναι κάθετα, έχουμε

$$0=\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2=\vec{b}_1\cdot\vec{a}_2+c_1\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1 \Rightarrow c_1=-\vec{b}_1\cdot\vec{a}_2/\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1$$

Όμοια, επειδή το διάνυσμα $\vec{b}_3$ είναι ορθογώνιο με τα $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, έχουμε

$$0=\vec{b}_1\cdot\vec{b}_3=\vec{b}_1\cdot\vec{a}_3+d_1\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1+d_2\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 \Rightarrow d_1=-\vec{b}_1\cdot\vec{a}_3/\vec{b}_1\cdot\vec{b}_1$$

$$0=\vec{b}_2\cdot\vec{b}_3=\vec{b}_2\cdot\vec{a}_3+d_1\vec{b}_2\cdot\vec{b}_1+d_2\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2 \Rightarrow d_2=-\vec{b}_2\cdot\vec{a}_3/\vec{b}_2\cdot\vec{b}_2$$

13. Τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. Χρησιμοποιώντας τους τύπους στην άσκηση 12 έχουμε:

$$c_1=-5/7,\quad d_1=-4/7,\quad d_2=-1/10$$

και

$$b_2=1/7\,[-5,2,5,4],\qquad \vec{b}_3=\vec{a}_3-4/7\vec{b}_1-1/10\vec{b}_2.$$

14. Θέτοντας $\vec{b}_k=\vec{a}_k+c_1\vec{b}_1+c_2\vec{b}_2+\ldots+c_{k-1}\vec{b}_{k-1}$, από τις συνθήκες καθετότητας

$$\vec{b}_i\cdot\vec{b}_k=0\qquad (i,k=1,\ldots,p,\quad i\neq k),$$

προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\vec{b}_i\cdot\vec{a}_k+c_i\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i=0\qquad (i=1,\ldots,k-1).$$

Οπότε,

$$c_i=-\vec{b}_i\cdot\vec{a}_k/\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i.$$

15. Αν $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_p$ μία βάση του W, με τη μέθοδο Gram-Schmidt βρίσκουμε μία ορθογώνια βάση. Διαιρώντας κάθε διάνυσμα της ορθογώνιας βάσης με τη νορμ αυτού έχουμε κατασκευάσει μία ορθοκανονική βάση.

16. Αν $\vec{b}=c_1\vec{a}_1+\ldots+c_p\vec{a}_p$ τότε $c_i=\vec{b}\cdot\vec{a}_i$ και

$$|\vec{b}|=(c_1^2+\ldots+c_p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

17. Από την άσκηση 6ε της § 1 είναι γνωστό ότι $c\vec{a}=0 \Rightarrow c=0$ ή $\vec{a}=0$. Το μηδενικό διάνυσμα είναι εξαρτημένο. Έτσι για

$$\vec{a}\neq 0 \Rightarrow c=0.$$

§ 5

1. Η κανονική μορφή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}\quad \text{είναι}\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Οπότε, η διάσταση του χώρου γραμμών είναι 2 και τα διανύσματα

$$[1,0,1], \quad [0,1,1]$$

είναι βάση του.

3. Ο πίνακας με γραμμές τα δοθέντα διανύσματα έχει κανονική μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

'Ετσι η διάσταση του χώρου γραμμών είναι 4 και οι τέσσερες πρώτες μη μηδενικές γραμμές είναι βάση του.

4. Ο διανυσματικός υπόχωρος W έχει γεννήτορες τα διανύσματα

$$[1,0,1,0,1,2], \quad [1,1,-1,1,0,0] \quad \text{και} \quad [0,-2,1,0,-1,1].$$

Επιπλέον τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα εφόσον η κανονική μορφή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ είναι: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Σύμφωνα με την παρατήρηση (5.3), αν K είναι η κανονική μορφή του πίνακα A, τότε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών τύπου (III) μηδενίζουμε τα στοιχεία που είναι στις ίδιες γραμμές με τα γωνιακά στοιχεία και δεξιά τους. Οπότε, μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών τύπου (I), προκύπτει ο πίνακας της μορφής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ακριβώς ο ίδιος πίνακας προκύπτει με αντίστοιχους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών και γραμμών στον πίνακα A^T. Έτσι οι βαθμοί των πινάκων A και A' είναι ίσοι. Εφαρμόζοντας, τα προηγούμενα στους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

θα έχουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και επομένως οι βαθμοί των πινάκων A και A^T είναι 2.

6. Αρκεί να δείξουμε ότι αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ είναι σε κλιμακωτή μορφή τότε είναι ανεξάρτητα. Πραγματικά, αν

$$\vec{a}_1 = [\,0,\dots,0,a_{1p},\dots,a_{1n}\,],$$

όπου $a_{1p} \neq 0$, τότε από την εξίσωση $c_1\vec{a}_1+\ldots+c_k\vec{a}_k=0$, επειδή η p-στή συντεταγμένη των $\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ είναι 0, έχουμε

$$c_1 a_{1p}=0.$$

Έτσι είναι $c_1=0$. Όμοια αν $\vec{a}_2=\left[0,\ldots,0,a_{2\mu},\ldots,a_{2n}\right]$ $(\mu > p)$ από την ίδια εξίσωση, επειδή

$$a_{3\mu}=\ldots=a_{k\mu}=0,$$

προκύπτει

$$c_2 a_{2\mu}=0.$$

Αλλά $a_{2\mu} \neq 0$, οπότε $c_2=0$. Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε $c_2=\ldots=c_k=0$.

7. Παρατηρήστε ότι αν η μ-στή γραμμή του Β είναι μηδενική, τότε αυτή προκύπτει από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τύπου (III) και επιπλέον η μ-στή γραμμή του Α είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του Α που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές γραμμές του Β. Για παράδειγμα, στην άσκηση 2, τα διανύσματα $[1,-1,0]$, $[0,1,1]$ είναι μία βάση του W, όπως και τα τέσσερα πρώτα διανύσματα στην άσκηση 3.

§ 6

1. a. $\vec{x}=c\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},1\right]$

   b. $\vec{x}=c_1[-12,5,6,1,0,0]+c_2[-2,0,1,0,1,0]+c_3[-3,0,2,0,0,1]$

2. $x=c_1[2,1,3,0]+c_2[1,0,3,1]$.

5. $[1,-2,1,1,0,0,0]+[-1,4,-3,1,-2,2,0]=2[0,1,-1,1,-1,1,0]$.

9. Αν $\vec{a}=[a_1,a_2,a_3]\in V^3$ τότε $W^{\perp}=\{a\in V^3 : a_1-a_2+2a_3=0\}$

   Έτσι για κάθε $a\in W^{\perp}$ έχουμε $\vec{a}=c_1[1,1,0]+c_2[-2,0,1]$. Επειδή τα διανύσματα $[1,1,0]$ και $[-2,0,1]$ είναι γεννήτορες του $W^{\perp}$ και ανεξάρτητα, αποτελούν μία βάση του.

Ο υπόχωρος $W^{\perp}$ είναι το επίπεδο που περνά από το 0 και είναι κάθετο στο δοθέν διάνυσμα.

10. Είναι $W_{\perp}=\{[a_1,a_2,a_3]\in V^3 : a_1+a_3=0,\ a_2+a_3=0\}$ και με γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι το διάνυσμα $[-1,-1,1]$ είναι βάση του.

11. $\left[-\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0,\ 0\right]$

12. $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0,0\right]$, $[0,-1,-1,0,1,0]$, $[-1,0,-1,0,0,1]$.

13. a. $[-2,1,0,0]$, $\left[-\frac{5}{2},0,1,0\right]$, $\left[-\frac{3}{2},0,0,1\right]$.

b. $[1,0,0,12,2,3]$, $[0,1,0,-5,0,0]$, $[0,0,1,-6,-1,2]$.

15. Αν $\vec{a}_i=[a_{i1},\dots,a_{in}]$ $(i=1,\dots,p)$ είναι μία βάση του W, τότε

$$W^{\perp}=\{x\in V^n : a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n=0 \quad (i=1,\dots,p)\}.$$

Επειδή στο ομογενές σύστημα

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1+\dots+a_{pn}x_n=0 \end{array}$$

ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό p, σύμφωνα με το θεώρημα 6.2, έχει n - p ανεξάρτητες λύσεις. Οπότε, η διάσταση του $W^{\perp}$ είναι n-p.

§ 7

1. a. $[-1,1,1,0]+c[-2,0,1,1]$, b. Δεν έχει λύση.

c. $[0,-1,0,0]+c_1\left[\frac{2}{3},\frac{5}{3},1,0\right]+c_2\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,1\right]$

d. Δεν έχει λύση

e. $\left[\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right]$.

2. Το διάνυσμα $[1,4,-1,1,-1,0]$ είναι μερική λύση του συστήματος και τα διανύσματα

$$[4,-4,1,-1,0,0],\ [-1,-1,0,3,1],\ [0,5,-3,1,-3,-1]$$

είναι ανεξάρτητα και επαληθεύουν το αντίστοιχο ομογενές.

6. a. Για κάθε b_1,b_2,b_3 το σύστημα έχει λύση.

b. Για κάθε b_1,b_2,b_3,b_4 το σύστημα έχει λύση.

7. I. Επειδή ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό n, οι στήλες του

$$\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$$

είναι ανεξάρτητες και επιπλέον ο επαυξημένος πίνακας τύπου $n\times(n+1)$ έχει βαθμό n.

Οπότε, από το θεώρημα 7.4, το σύστημα έχει λύση. Η λύση αυτή είναι μοναδική, διότι, αν υποθέσουμε το αντίθετο, από τις εξισώσεις

$$A\vec{x}_1=\vec{b},\quad A\vec{x}_2=\vec{b}$$

προκύπτει

$$A(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=\vec{b}-\vec{b}=0.$$

Θέτοντας $\vec{x}_1-\vec{x}_2=\left[y_1,\ldots,y_n\right]$, από την τελευταία εξίσωση έχουμε:

$$y_1\vec{a}_1+\ldots+y_n\vec{a}_n=0$$

$$y_1=\ldots=y_n=0$$

δηλαδή $x_1=x_2$.

II. Εφαρμόστε το θεώρημα 6.2.

8. Ας είναι r ο κοινός βαθμός των δύο πινάκων. Υποθέτοντας, χωρίς να είναι περιορισμός, ότι οι στήλες $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_r$ του πίνακα A είναι ανεξάρτητες, από τον επαυξημένο πίνακα έχουμε:

$$\vec{b}=c_1\vec{a}_1+\ldots+c_r\vec{a}_r.$$

Οπότε, το διάνυσμα $\vec{x}=\left[c_1,\ldots,c_r,0,\ldots,0\right]$ επαληθεύει το σύστημα (7.1). Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα

$$\vec{x}=\left[x_1,\ldots,x_n\right]$$

είναι λύση του συστήματος (7.1). Τότε, από την εξίσωση

$$\vec{b}=x_1\vec{a}_1+\ldots+x_n\vec{a}_n$$

συνάγεται ότι το διάνυσμα b ανήκει στο χώρο γραμμών του A^T και επομένως οι βαθμοί των δύο πινάκων είναι ίσοι.

9. Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση.

§ 8

1. **a.** 3 παραβάσεις, (-1), **b.** 10 παραβάσεις, (+1),

c. 19 παραβάσεις, (-1).

2. Όλες οι ορίζουσες τύπου 3×3 είναι μηδέν.

3. **a.** 3, **b.** 65.

5. Επαγωγικά έχουμε

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} = a_2-a_1.$$

Ας είναι

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots a_1^{k-2} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 1 & a_{k-1} & \dots a_{k-1}^{k-1} \end{bmatrix} = \prod_{i,j=1}^{k-1} (a_i - a_j)$$

Η ορίζουσα

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^{k-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1 & a_k & \dots & a_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

είναι πολυώνυμο βαθμού k-1 και οι αριθμοί $a_2,\dots,a_k$ είναι ρίζες του. Οπότε

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^{k-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 1 & a_k & \dots & a_k^{k-1} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a_2 \dots a_2^{k-2} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 & a_k \dots a_k^{k-2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times (x-a_2)\dots(x-a_k)$$

Έτσι έχουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα που δόθηκε είναι

$$\prod_{\substack{i,j=2 \\ i<j}}^{k} (a_i - a_j)(a_1 - a_2)\dots(a_1 - a_k),$$

που είναι διάφορη του μηδενός, εφόσον $a_i \neq a_j$, $(i,j=1,\dots,k)$.

6. a. Το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

   b. Το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση.

   c. Αν έχει λύση (θεώρ. (7.4)), τότε έχει $n-r$ παραμετρική απειρία λύσεων, όπου r είναι ο βαθμός του πίνακα A.

   d. Έχει πάντοτε λύση διάφορη της μηδενικής και η γενική λύση έχει $n-r$ παραμέτρους, όπου r είναι ο βαθμός του πίνακα A.

§ 9

1. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και στον τύπο

$$\langle f,f\rangle=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι όχι αρνητική, από την $\langle f,f\rangle = 0$ συμπεραίνουμε ότι $f^2(x)=0$, για κάθε $x\in[a,b]$. Οπότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

2. Αντικαθιστώντας στη σχέση $c_1+c_2x+c_3e^x=0$ με $x=2,\ 1,\ \frac{1}{2}$, βρίσκουμε $c_1=c_2=c_3=0$.

3. Αν $c_1+c_2x+c_3x^2=0$ για κάθε $x\in[a,b]$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$c_2+2c_3x=0 \quad \text{και} \quad c_3x=0$$

για κάθε $x\in[a,b]$. Οπότε $c_1=c_2=c_3=0$.

4. Όμοια παραγωγίζουμε την παράσταση $c_1+c_2x+\ldots+c_{n+1}x^n=0$ n φορές.

5. Παραγωγίζοντας τη σχέση $c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}=0$ δύο φορές, συμπεραίνουμε ότι $c_1=c_2=c_3=0$.

6. Παραγωγίζοντας τη σχέση $c_1\,\text{ημ}\,x + c_2\,\text{συν}\,x=0$ έχουμε:

$$c_1\,\text{συν}\,x - c_2\,\text{ημ}\,x = 0$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Οπότε, $c_1=c_2=0$.

7. Από τη σχέση $c_1+c_2(x-1)+c_3(x^2-1)=0$ προκύπτει

$$(c_1-c_2-c_3)+c_2x+c_3x^2=0$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Επειδή όμως οι συναρτήσεις 1, x, x^2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έχουμε: $c_1-c_2-c_3=0$, $c_2=c_3=0$. Οπότε

$$c_1=c_2=c_3=0.$$

8. Δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γιατί $2\cdot 1+(x^2-1)-(x^2+1)=0$, για κάθε $x \in [a,b]$.

9. Επαληθεύστε ότι:

$$\int_0^{2\pi} \text{ημ}\, kx\ \text{ημ}\, cx\, dx = 0 \quad \text{όταν} \quad k \neq c$$

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\, kx\ \text{συν}\, cx\, dx = 0 \quad \text{όταν} \quad k \neq c$$

και

$$\int_0^{2\pi} \text{ημ}\, kx\ \text{συν}\, cx\, dx = 0$$

12.

$$a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\ \text{συν}\, kx\, dx}{\int_0^{2\pi} \text{συν}^2\, kx\, dx}, \quad b_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\ \text{ημ}\, kx\, dx}{\int_0^{2\pi} \text{ημ}^2\, kx\, dx}$$

14. $c_0=1$, $d_0=-\frac{2}{3}$, $d_1=0$.

16. Παραγωγίζοντας $(k-1)$ φορές τη σχέση

$$c_1e^{a_1x}+\ldots+c_ke^{a_kx}=0,$$

προκύπτει το σύστημα $A\vec{c}=0$, όπου

$$A=\begin{bmatrix} e^{a_1x} & \cdots & e^{a_kx} \\ a_1e^{a_1x} & & a_ke^{a_kx} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{k-1}e^{a_1x} & \cdots & a_k^{k-1}e^{a_kx} \end{bmatrix}$$

Από την άσκηση 5 της § 8 έχουμε:

$$\det A=e^{(a_1+\ldots+a_k)x}\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}(a_i-a_j)$$

Οπότε το σύστημα δεν έχει λύση διαφορετική από τη μηδενική, δηλαδή $c_1=\ldots=c_k=0$. Επίσης έχουμε

$$\langle e^{a_ix},e^{a_jx}\rangle=\int_a^b e^{(a_i+a_j)}dx=\frac{1}{a_i+a_j}\left[e^{(a_i+a_j)b}-e^{(a_i+a_j)a}\right]\neq 0.$$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ