Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Θα περιοριστούμε σε διανύσματα των οποίων τα στοιχεία προέρχονται από τον χώρο R και τον C, χωρίς καμία δυσκολία όμως μπορούν να αναχθούν σε οποιοδήποτε χώρο K

Το πρώτο διάνυσμα: Τέρματα που έχουν πέτυχει κάποιοι ποδοσφαιριστές

5, 4, 3, 2

αν θεωρήσουμε ότι αυτή η λίστα έχει όνομα t(έρματα) τότε τα στοιχεία της θα είναι τα t_1, t_2, t_3, t_4. Αντιστοίχιση?

Μια τέτοια λίστα ονομάζεται *διάνυσμα*

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

***Τα διανύσματα στην Φυσική*:**

- **Μονόμετρα μεγέθη: χρόνος, θερμοκρασία, μάζα (βάρος;) περιγράφονται από πραγματικούς αριθμούς και ονομάζονται *βαθμωτά (scalar)***

- **Διανύσματα: ταχύτητα, δύναμη για τα οποία απαιτείται μέτρο και διεύθυνση, φορά (αρχή ένα συγκεκριμένο σημείο και απεικόνιση τους με βέλη)**

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

***Τα διανύσματα στην Φυσική*:**

Το επίπεδο αναφέρεται ως R^2 (όλα τα διανύσματα είναι διατεταγμένες δυάδες) και ο χώρος R^3 (όλα τα διανύσματα είναι διατεταγμένες τριάδες).

Για αρχή των αξόνων το O(0,0,0) τότε κάθε διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή των αξόνων περιγράφεται με τις συντεταγμένες του τελικού του σημείου.

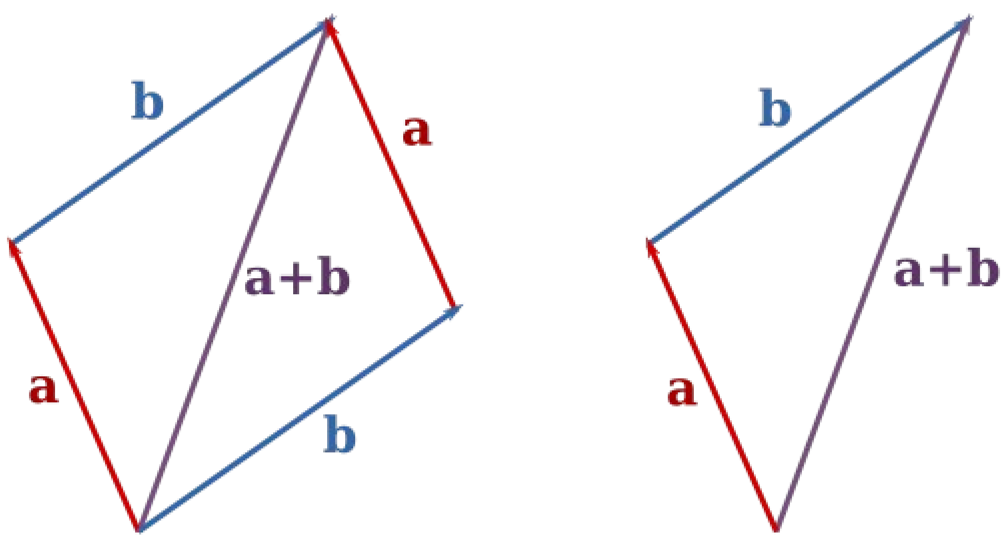
Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

***Τα διανύσματα στην Φυσική*:**

Δύο πράξεις εφαρμόζονται στην Φυσική α) πρόσθεση, και β) βαθμωτός πολλαπλασιασμός (scalar product)

α) Πρόσθεση: Εφαρμόζεται ο κανόνας του παραλληλογράμμου για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{b}$



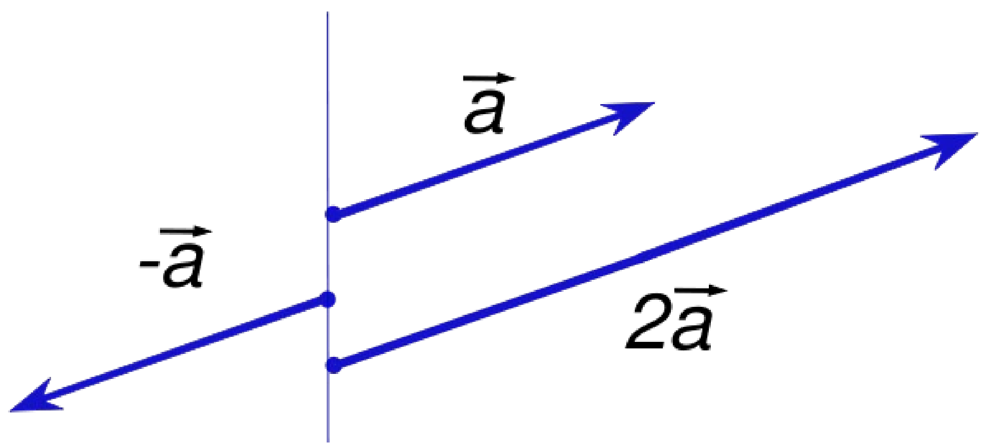
Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

***Τα διανύσματα στην Φυσική*:**

Δύο πράξεις εφαρμόζονται στην Φυσική α) πρόσθεση, και β) βαθμωτός πολλαπλασιασμός (scalar product)

β) Πολλαπλασιασμός: Το γινόμενο $k\vec{a}$ λαμβάνεται πολ/ντας το μέτρο του διαν. με το k και διατηρώντας την ίδια κατεύθυνση για k>0 ή την αντίθετη για k<0. Για συνιστώσες (a_1,a_2,a_3) το νέο διάνυσμα θα είναι (ka_1,ka_2,ka_3).



Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Το σύνολο όλων των n-αδων πραγματικών αριθμών, R^n, ονομάζεται n-χώρος. Μια συγκεκριμένη n-άδα στον R^n

$$\vec{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

ονομάζεται *σημείο ή διάνυσμα.* Οι αριθμοί στην παρένθεση ονομάζονται *συνιστώσες*.

Δύο διανύσματα είναι ίσα όταν έχουν τόν ίδιο αριθμό συνιστωσών και οι αντίστοιχες συνιστώσες είναι ίσες π.χ (1,2,3) και (3,2,1), ομάδα1-ομάδα2. Το διάνυσμα O(0,0,...,0) του οποίου όλες οι καταχωρίσεις είναι 0 καλείτε μηδενικό διάνυσμα.

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) (2,3), (3,4,5), (6,7,8,9), (9,5,6,4,2) (0,0,0,0) σε ποιους χώρους ανήκουν?

2) Για ποια x,y,z τα διανύσματα (x+y, y, z-3)=(4,3,2) είναι ίσα?

3) Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιαστεί το (4,3,2) για να είναι ίσο με το (1,3/4,1/2)?

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Τα διανύσματα μπορούν να γραφούν και σαν στήλες:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \; x_2 \; \dots \; x_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Πρόσθεση διανυσμάτων

Έστω τα $\vec{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n), \vec{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$

το άθροισμα τους λαμβάνεται αν προσθέσω τις αντίστοιχες συνιστώσες τους:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)$$

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Το βαθμωτό γινόμενο (scalar product) ή γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού k με διάνυσμα λαμβάνεται πολ/ντας με τον αριθμό τις συνιστώσες του διανύσματος:

$$k\vec{u}=(k u_1, k u_2, \ldots, k u_n)$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των πράξεων είναι και αυτά διανύσματα του R^n

Ως αρνητικό ενός διανύσματος και αντίστοιχα η αφαίρεση διανυσμάτων ορίζονται στον R^n ως

$$-\vec{u}=(-1)\vec{u}, \vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1, u_2-v_2, \dots, u_n-v_n)$$

Για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{o}, \vec{p}$, του R^n και οι αριθμοι k_1, k_2, k_3, k_4 του R ο πολ/μος αριθμού με διάνυσμα και η, στη συνέχει πρόσθεση, των διανυσμάτων, δίνει τον γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{o}, \vec{p}$,

$$\vec{V}=k_1\vec{u}+k_2\vec{v}+k_3\vec{o}+k_4\vec{p}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) $\vec{u}=(1,2,3),\vec{v}=(4,5,6).\ Ορίστε\ \ τα\ \ \vec{u}+\vec{v}\ ,\vec{v}+\vec{u}\ ,\vec{u}-\vec{v}\ ,\vec{v}-\vec{u}\ ,$

$$0\,\vec{u}\,,2\,\vec{u}+3\,\vec{v}$$

2) Ορίστε τις ίδιες πράξεις για τα $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Για οποιαδήποτε διανύσματα στον R^n ισχύει

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \qquad k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$$

$$\vec{u}+0=\vec{u} \qquad (k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$$

$$\vec{u}+(-\vec{u})=0 \qquad (kk')\vec{u}=k(k'\vec{u})$$

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \qquad 1\vec{u}=\vec{u}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα του R^n ισχύει

$$\vec{u}=(u_{1,}\, u_{2,} \ldots , u_n), \vec{v}=(v_{1,}\, v_{2,} \ldots , v_n)$$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι το

$$\vec{u}\,\vec{v}=u_1 v_1+u_2 v_2+\ldots+u_n v_n$$

Αριθμός ή διάνυσμα;

Τα διανύσματα αυτά λέγονται ορθογώνια (ή κάθετα) όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Για οποιαδήποτε διανύσματα στον R^n ισχύει

$$(\vec{u}+\vec{v})\vec{w}=\vec{u}\,\vec{w}+\vec{v}\,\vec{w}$$

$$(k\,\vec{u})\,\vec{v}=k(\vec{u}\,\vec{v})$$

$$\vec{u}\,\vec{v}=\vec{v}\,\vec{u}$$

$$\vec{u}\,\vec{u}\geq 0,\quad \vec{u}\,\vec{u}=0\; \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \ \alpha\nu\, \vec{u}=O$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Έστω τα (1,-2,3), (4,5,-1), (2,7,4). Να εξεταστούν ως προς την ορθογωνικότητά τους;

2) Ομοίως τα $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

3)Ποια η τιμή του k ώστε τα (1,2,3,4) και (6,k,-8,2) είναι ορθόγωνια?

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Η νόρμα (norm) ή το μήκος ή το μέτρο ενός διανύσματος:

Η νόρμα ενός διανύσματος στον χώρο R^n συμβολίζεται $\|\vec{u}\|$ **και ορίζεται ως η μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του** $\vec{u}\,\vec{u}$

Για το διάνυσμα $\vec{u}=(u_{1,} u_{2,} \ldots , u_n)$ **είναι:**

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\,\vec{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}$$

Δλδ η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συνιστωσών του $\vec{u}$

Ένα διάνυσμα ονομάζεται μοναδιαίο εάν $\|\vec{u}\|=1$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Για οποιοδήποτε μη-μηδενικό διάνυσμα του R^n το διάνυσμα

$$\hat{u} = \frac{1}{\left\| \vec{u} \right\|} \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\left\| \vec{u} \right\|}$$

Είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{u}$. Η διαδικασία εύρεσης του $\hat{u}$ ονομάζεται κανονικοποίηση του $\vec{u}$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το μέτρο των

$$\vec{u}=(1,2,3),\vec{v}=(4,5,6).\,Ορίστε\ τα\quad \vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{u},\vec{u}-\vec{v},\vec{v}-\vec{u},$$

$$0\vec{u},2\vec{u}+3\vec{v}$$

2) Ομοίως των $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Ποιο απο το παρακάτω είναι το μοναδιαίο διάνυσμα;

$$\vec{u} = (1, -3, 4, 2), \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

2) Να γίνει η κανονικοποίηση των παραπάνω

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Θεώρημα Schwarz: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}\,,\vec{v}$ στον χώρο R^n, ισχύει $\left\|\vec{u}\,\vec{v}\right\| < \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|$

Απόδειξη: Για κάθε πραγματικό αριθμό k ισχύει

$$0 \leq (t\,\vec{u}+\vec{v})(t\,\vec{u}+v) = t^2(\vec{u}\,\vec{u}) + 2\mathrm{t}\,(\vec{u}\,\vec{v}) + (\vec{v}\,\vec{v}) =$$

$$= \left\|u\right\|^2 t^2 + 2\,(\vec{u}\,\vec{v}) + \left\|v\right\|^2.\ Av\left\|u\right\|^2 = a\,, 2\,(\vec{u}\,\vec{v}) = b\,, c = \left\|v\right\|^2$$

Δλδ για καθε t $at^2 + bt + c \geq 0$.Τότε το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει 2 πραγμ. ρίζες, δλδ $0 \geq \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ή $4\alpha\gamma \geq \beta^2$. Με αντικατάσταση προκύπτει η ανισότητα.

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Θεώρημα Minkowski: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ στον χώρο R^n, ισχύει $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|<\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=(\vec{u}+\vec{v})+2(\vec{u}+\vec{u})+(\vec{v}+\vec{v})\leq\left\|\vec{u}\right\|^2+2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|^2=$$

$$=(\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|)^2, \delta\lambda\delta\ \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\leq\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Απόσταση, Γωνία και Προβολή διανυσμάτων στον R^n

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ **στον χώρο R^n, ισχύει ότι η απόστασή τους είναι**

$$d(\vec{u}\,\vec{v}) = \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots (u_n - v_n)^2}$$

Η γωνία θ μεταξύ τους (προυπόθεση: μη-μηδενικά) ορίζεται ως

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|}$$

και από την ανισότητα Schwarz ισχύει: $$-1 \leq \cos\theta = \frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|} \leq 1$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Απόσταση, Γωνία και Προβολή διανυσμάτων στον R^n

Και αν $\vec{u}\,\vec{v}=0$ τότε θ=90° . Να δειχτεί η σχέση του με τον ορισμό της ορθογωνικότητας.

Η προβολή ενός διανύσματος $\vec{u}$ πάνω σε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ συμβολίζεται με

$$proj(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\vec{v}$$

Διανύσματα στους R^n, C^n, διανύσματα στο χώρο

Εισαγωγή

Διανύσματα στον R^n

Παραδείγματα

1) Να βρεθεί η απόσταση, η γωνία και η προβολή των

$$\vec{u}=(1,2,3),\ \vec{v}=(4,5,6).$$

2) Ομοίως των

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$