## Φύλλο του Καρτέσιου (Descartes Folium)

Σε απάντηση ερώτησης συναδέλφου σας, σας παραθέτω μερικά στοιχεία για την καμπύλη

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

τις οποίας την εφαπτόμενη σε κάποιο σημείο υπολογίσαμε μέσα στην τάξη.

### Ιστορία

Ο Fermat με τη βοήθεια αυτού που ονομάζουμε σήμερα 'Απειροστικό λογισμό', βρήκε μια μέθοδο να υπολογίζει εφαπτόμενες σε καμπύλες, όπως κάναμε και εμείς σε μια από τις διαλέξεις. Ο Descartes αφού διάβασε για τον τρόπο του, τον προκάλεσε σε ένα από τους συνήθεις τους καβγάδες να υπολογίσει την εφαπτόμενη στην καμπύλη

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

που ονομάζουμε σήμερα φύλλο του Καρτέσιου. Μιας και ο ίδιος ο Descartes δεν μπορούσε να βρεί λύση σε αυτό το πρόβλημα, πίστεψε ότι και ο Fermat θα αποτύχει. Ο Fermat βεβαίως υπολόγισε με μεγάλη ευκολία την εφαπτόμενη και έτσι 'κέρδισε' αυτό τον καβγά.

### Αναπαράσταση

Μπορούμε να υπολογίσουμε την $y = f(x)$ γράφοντας την καμπύλη ως ένα πολυώνυμο του $y$ και βρίσκοντας τις ρίζες του πολυωνύμου τρίτης τάξης με τη βοήθεια του μετασχηματισμού του Tschirnhouse και τη μέθοδο του Cartan. Οι λεπτομέρειες φεύγουν από το σκοπό του μαθήματος και για αυτό θα τις παραλείψουμε. Οι τρείς ρίζες για το πολυώνυμο

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

είναι:

$$y = A + B, \quad y = -\frac{A+B}{2} \pm \frac{A-B}{2\sqrt{-3}},$$

όπου

$$A = \left( -\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - a^3x^3} \right)^{1/3},$$

$$B = -\left( \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - a^3x^3} \right)^{1/3}.$$

Εναλλακτικός τρόπος για να τη σχεδιάσουμε είναι να γράψουμε την καμπύλη αυτή σε παραμετρική μορφή και να υπολογίσουμε τα σημεία της καμπύλης ως εξής: Έστω ότι $y = px$. Τότε έχουμε:

$$x^3 + y^3 = 3axy \leftrightarrow x^3 + p^3x^3 - 3apx^2 = 0 \leftrightarrow x^2(x + p^3x - 3ap) = 0 \leftrightarrow x = \frac{3ap}{1+p^3},$$

από την οποία προκύπτει και η

$$y = \frac{3ap^2}{1+p^3}.$$

Η καμπύλη είναι τώρα σε παραμετρική μορφή και μπορούμε δίνοντας τιμές στο $p$, μπορούμε να υπολογίζουμε τα $x$, $y$ και να τη σχεδιάσουμε.