Σειρά ασκήσεων 2 - Παράγωγοι (μέρος δεύτερο), Ολοκληρώματα

Νέα ημερομηνία παράδοσης : 9/12/2010

1. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ β) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ γ) $f(x) = x^2\sqrt{9-x^2}$ δ) $f(x) = x^{1/3}(x-4)$

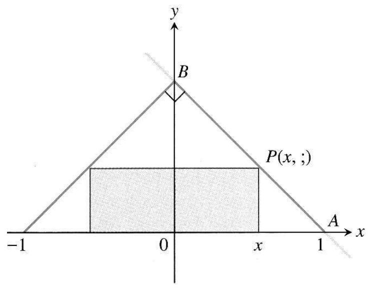
2. Έστω f διαφορίσιμη στο $[a,b]$ με $f(b) < f(a)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο $c \in [a,b]$ με $f'(c) < 0$.

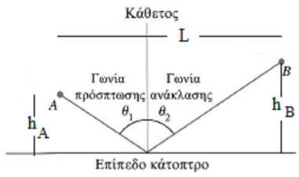
3. Να μελετηθούν οι συνάρτησεις

α) $f(x) = f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$ β) $f(x) = x\sqrt{8-x^2}, x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

(Να βρεθούν τα διαστήματα που είναι αύξουσα, φθίνουσα, να βρεθούν τα μέγιστα και ελάχιστα, να βρεθούν τα διαστήματα που στρέφει τα κοίλα άνω και κάτω, να βρεθούν τα σημεία καμπής και τέλος να σχεδιαστεί ποιοτικά η γραφική της παράσταση).

4. Να βρεθεί ελάχιστη περίμετρος ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει εμβαδό E.





5. Έστω το ορθογώνιο του σχήματος που είναι εγγεγραμένο σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους 2 μονάδων. Υπολογίστε το μέγιστο εμβαδό του παραλληλογράμμου. (υπόδειξη : γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία AB και εκφράστε τη συντεταγμένη του σημείου P συναρτήσει του x).

6. Στη διάλεξη είδαμε την αρχή του Fermat ότι το φώς δηλαδή επιλέγει τη διαδρομή που θα κάνει τον ελάχιστο χρόνο να φτάσει από το ένα σημείο στο άλλο. Να δείξετε με τη βοήθεια της αρχής του Fermat το νόμο της ανάκλασης. Ότι δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρήστε γνωστές τις αποστάσεις L, h_A, h_B.

7. Να βρεθεί το διαφορικό dy αν:

$$\text{α) } y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})} \qquad \text{β) } 2y^{3/2} + xy - x = 0.$$

8. Να βρεθεί η μεταβολή του όγκου της σφαίρας ($V = (4/3)\pi r^3$) για μια μικρή μεταβολή της ακτίνας dr.

9. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ κατά Taylor κοντά στο $x_0 = -4$ κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης.

10. Να υπολογιστεί το $1 - \left(\frac{1}{1.001}\right)^{2/3}$ κρατώντας όρους μέχρι τάξης 10^{-6}.

11. Λεπτός δακτύλιος ακτίνας R είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με γραμμική πυκνότητα λ. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος z από το επίπεδο του δακτυλίου είναι

$$E = -\frac{\lambda R z}{2(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Να δείξετε ότι για $z \ll R$, η ένταση μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος z.

12. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{α) } \int_0^{\pi/2} \sin(x/2)dx \quad \text{β) } \int_1^{27} \left(\frac{1}{x^2} - x^{-1/3} - \frac{1}{3}\right) dx \quad \text{γ) } \int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx \quad \text{δ) } \int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$$

$$\text{ε) } \int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx \quad \text{ζ) } \int_0^{3\pi/2} \sin^5\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx \quad \text{η) } \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x})}dx$$

$$\text{ϑ) } \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{(3+2\cos(x))^2}dx \quad \text{ι) } \int \frac{18\tan^2(x)\sec^2(x)}{(2+\tan^3(x))^2}dx \quad \text{κ) } \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x\cos^3(\sqrt{x})}}dx$$