Λύσεις σειράς ασκήσεων 2

1. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\text{δ) } f(x) = x^{1/3}(x-4)$$

$$f'(x) = (1/3)x^{-2/3}(x-4) + x^{1/3} = \frac{x-4+3x}{3x^{2/3}} = \frac{4x-4}{3x^{2/3}}$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

6. Στη διάλεξη είδαμε την αρχή του Fermat ότι το φώς δηλαδή επιλέγει τη διαδρομή που θα κάνει τον ελάχιστο χρόνο να φτάσει από το ένα σημείο στο άλλο. Να δείξετε με τη βοήθεια της αρχής του Fermat το νόμο της ανάκλασης. Ότι δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρήστε γνωστές τις αποστάσεις L, h_A, h_B.

Έστω η απόσταση x από το σημείο A, στο οποίο η δέσμη συναντά το επίπεδο. Προφανώς από το B απέχει $L-x$. Ο χρόνος που κάνει το φώς για να πάει από το A στο B είναι:

$$t = \frac{l_a}{c} + \frac{l_b}{c} = \frac{\sqrt{h_A^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}}{c},$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο μέσο μας. Εμείς θέλουμε να βρούμε το x για το οποίο ο χρόνος θα είναι ελάχιστος:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2c\sqrt{h_A^2 + x^2}} - \frac{2(L-x)}{2c\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{h_A^2 + x^2}} = \frac{L-x}{\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2.$$

Βρήκαμε το x για το οποίο θα έχουμε ακρότατο. Θα πρέπει να δείξουμε ότι αντιστοιχεί σε ελάχιστο:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{c\sqrt{h_A^2 + x^2}} - \frac{x^2}{c(h_A^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{c\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}} - \frac{(L-x)^2}{c(h_B^2 + (L-x)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{h_A^2 + x^2}}\left(1 - \frac{x^2}{h_A^2 + x^2}\right) + \frac{1}{c\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}}\left(1 - \frac{(L-x)^2}{h_B^2 + (L-x)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{h_A^2+x^2}}\frac{h_A^2}{h_A^2+x^2} + \frac{1}{c\sqrt{h_B^2+(L-x)^2}}\frac{h_B^2}{h_B^2+(L-x)^2} > 0.$$

Άρα ο χρόνος είναι ελάχιστος.

9. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ κατά Taylor κοντά στο $x_0 = -4$ κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης.

Το ανάπτυγμα κατά Taylor μιας συνάρτησης f γύρω από το x_0 είναι:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}.$$

Εδώ θα έχουμε:

$$f(x) = f(-4) + f'(-4)(x+4) + \frac{f''(-4)(x+4)^2}{2!},$$

με:

$$f(-4) = 5.$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow f'(-4) = -\frac{4}{5}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{x^2}{(x^2+9)^{3/2}} \Rightarrow f''(-4) = \frac{9}{125}.$$

Άρα:

$$f(x) = 5 - \frac{4}{5}(x+4) + \frac{9}{250}(x+4)^2.$$

10. Να υπολογιστεί το $1 - \left(\frac{1}{1.001}\right)^{2/3}$ κρατώντας όρους μέχρι τάξης 10^{-6}.

Έχουμε:

$$1 - \left(\frac{1}{1.001}\right)^{2/3} = 1 - \left(\frac{1}{1+0.001}\right)^{2/3}.$$

Θα θέσουμε τη μικρή ποσότητα 0.001 ως x και θα αναπτύξουμε τη συνάρτηση που προκύπτει κατά Taylor γύρω από το $x_0 = 0$:

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{2/3}.$$

Εδώ θα έχουμε:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + ...,$$

με:

$$f(0) = 0,$$
$$f'(x) = -\frac{2}{3}(1+x)^{-5/3} \Rightarrow f'(0) = -\frac{2}{3},$$
$$f''(x) = \frac{10}{9}(1+x)^{-8/3} \Rightarrow f''(0) = \frac{10}{9},$$
$$f'''(x) = -\frac{80}{27}(1+x)^{-11/3} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{80}{27}.$$

Άρα:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{80}{27}x^3 + ...$$

και

$$1 - \left(\frac{1}{1.001}\right)^{2/3} = -\frac{2}{3}10^{-3} + \frac{10}{9}10^{-6} + O(10^{-9})$$

11. Λεπτός δακτύλιος ακτίνας R είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με γραμμική πυκνότητα λ. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος z από το επίπεδο του δακτυλίου είναι

$$E = -\frac{\lambda R z}{2(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Να δείξετε ότι για $z \ll R$, η ένταση μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος z.

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης $E(z)$ για μικρά z. Άρα θα την αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το $z_0 = 0$:

$$E(z) = E(0) + E'(0)z + \frac{1}{2!}E''(0)z^2 + ...,$$

με:

$$E(0) = 0,$$
$$E'(z) = -\frac{\lambda R}{2(R^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3\lambda R z^2}{2(R^2+z^2)^{5/2}} \Rightarrow E'(0) = -\frac{\lambda}{2R^2},$$

Άρα:

$$E(z) = -\frac{\lambda z}{2R^2} + O(z^2).$$