Σειρά ασκήσεων 4 - Ολοκληρώματα, Μιγαδικοί

1. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{α) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{β) } \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{γ) } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}} \quad \text{δ) } \int_{-2}^0 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$$

2. Να εξετάσετε χωρίς να τα υπολογίσετε αν τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν:

$$\text{α) } \int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}}dx \quad \text{β) } \int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}dx \quad \text{γ) } \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1} \quad \text{δ) } \int_{e^e}^\infty \ln(\ln x)dx$$

3. Να βρεθεί το εμβαδό των χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες:

$$\text{α) } y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 0, \quad [0,3] \qquad \text{β) } y = 2\sin x, \quad y = \sin(2x), \quad [0,\pi]$$

$$\text{γ) } y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad [-\pi/4, \pi/4]$$

4. Να βρεθεί ο όγκος ενός κόλουρου κώνου με ύψος h και ακτίνες των βάσεων R_1 και R_2.

5. Έστω το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες x, y και την ευθεία $x + 2y = 2$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει εάν στρέψουμε το χωρίο γύρω από τον άξονα x.

6. Έστω το χωρίο που φράσεται άνωθεν από την ευθεία $y = \sqrt{2}$ κάτωθεν από την καμπύλη $y = \sec(x)\tan(x)$, εξ αριστερών από τον άξονα y και το x να ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει εάν στρέψουμε το χωρίο γύρω από την ευθεία $y = \sqrt{2}$.

7. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης α) $x = y^{3/2}/3 - y^{1/2}$, με $1 \leq y \leq 3$ και β) $x = \cos(t)$, $y = t + \sin(t)$ με $0 \leq t \leq \pi$.

8. Η ταχύτητα ενός σώματος δίνεται συναρτήσει του χρόνου ως: $U = \sin(t)\cos(t)$. Να υπολογιστεί το διάστημα που διένυσε το σώμα, αν αρχικά ήταν στη θέση $x = 0$.

9. Ένα σώμα μάζας m έλκεται με δύναμη μέτρου k/x^2. Αν το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία από τη θέση $x = b$ και καταλήγει στη θέση $x = a$ να βρεθεί το έργο που καταναλώθηκε.

10. Έστω πλάκα με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ. Αν η πλάκα έχει το σχήμα του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $y = x^2 - 3$ και $y = -2x^2$, να βρεθεί το συνολικό φορτίο της.

11. Έστω πλάκα με επιφανειακή κατανομή φορτίου $\sigma = x^2$. Αν η πλάκα έχει το σχήμα του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2/x^2$ και τον άξονα x με $1 \leq x \leq 2$, να βρεθεί το συνολικό φορτίο της.

12. α) Να γίνουν οι πράξεις: $(2+4i)+(7+i)$, $(8+9i)-(7+8i)$, $(2+4i)\cdot(7+i)$, $(2+4i)/(7+i)$
β) Να βρεθούν τα x και y ώστε: $(3-2i)(2x-iy) = 2(2x-iy)+2i-1$.

13. α) Να γραφτούν σε πολική μορφή οι μιγαδικοί: $1-i$, $1+i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-i$
β) Να βρείτε για ποιους μιγαδικούς ισχύει: $|z-1| = z$.
γ) Έστω ο μιγαδικός $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο $w = z + (1/z)$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

14. α) Να δειχθεί ότι αν $z = re^{i\theta}$, τότε $z^n + (1/z^n) = 2\cos(n\theta)$.
β) Να λυθεί η: $z^5 = 1$.
γ) Να λυθεί η: $z^3 = -i$.
δ) Να λυθεί η: $z^4 = 16e^{i4\pi/3}$.