ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι - 4/2/2011

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$\text{α) } a_n = \frac{3\cdot 5^n + 2\cdot 5^{2n}}{5^n + 4\cdot 5^{2n+1}} \;, \quad \text{β) } b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$\text{α) } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 5^n + 2\cdot 5^{2n}}{5^n + 4\cdot 5^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{2n}\left(3\cdot 5^{-n} + 2\right)}{5^{2n}\left(5^{-n} + 4\cdot 5\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 5^{-n} + 2}{5^{-n} + 20} = \frac{1}{10}$$

$$\text{β) } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $f(x) = \left(5 + 3\cos^3(x^2)\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1/2)\left(5 + 3\cos^3(x^2)\right)^{-1/2}\left(5 + 3\cos^3(x^2)\right)' = \\
&= (1/2)\left(5 + 3\cos^3(x^2)\right)^{-1/2} 9\cos^2(x^2)\left(\cos(x^2)\right)' = \\
&= (1/2)\left(5 + 3\cos^3(x^2)\right)^{-1/2} 9\cos^2(x^2)\left(-\sin(x^2)\right)(x^2)' = \\
&= -9x\left(5 + 3\cos^3(x^2)\right)^{-1/2}\cos^2(x^2)\sin(x^2).
\end{aligned}$$

β) Να βρεθεί η εφαπτομένη στην καμπύλη $y\sin\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{2}{\pi} - xy$ στο σημείο $(x,y) = (0, 2/\pi)$.

Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την παράγωγο. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη λαμβάνοντας υπόψη ότι $y = y(x)$:

$$\left(y\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)' = \left(\frac{2}{\pi} - xy\right)' \Rightarrow y'\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\cos\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)' = -y - xy' \Rightarrow$$

$$y' \sin\left(\frac{1}{y}\right) - y\cos\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}y' = -y - xy' \Rightarrow y'\left[\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right) + x\right] = -y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-y}{\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right) + x} = \frac{-2/\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0} = -\frac{2}{\pi}$$

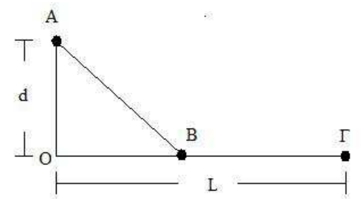
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \Rightarrow y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω ότι θέλετε να μεταδόσετε ένα σήμα από τον πομπό Α στο δέκτη Γ του σχήματος, με τη βοήθεια αναμεταδότη Β. Το ηλεκτρομαγνητικό σήμα ταξιδεύει με ταχύτητα v από τον Α στον Β και με ταχύτητα $2v$ από τον Β στο Γ. Αν η απόσταση ΟΑ είναι d και η απόσταση ΟΓ είναι L, να βρεθεί σε ποιά θέση επάνω στην ευθεία ΟΓ πρέπει να τοποθετηθεί ο αναμεταδότης Β για να φτάσει το σήμα στον Γ στο μικρότερο δυνατό χρόνο.

[2 μονάδες]



Έστω ότι τοποθετούμε το Β σε απόσταση x από το Ο. Δηλαδή $OB = x$. Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή, ο χρόνος που κάνει να διανύσει την απόσταση ΑΒ είναι: $t_{AB} = AB/v$, ενώ ο χρόνος που κάνει να διανύσει την απόσταση ΒΓ είναι: $t_{\mathrm{B\Gamma}} = \mathrm{B\Gamma}/(2v)$. Από το σχήμα έχουμε: $AB = \sqrt{x^2 + d^2}$ και $\mathrm{B\Gamma} = L - x$. Άρα ο ολικός χρόνος που κάνει να φτάσει το σήμα στο Γ είναι :

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v} + \frac{L - x}{2v}$$

Ψάχνουμε το x το οποίο θα μας κάνει το χρόνο ελάχιστο. Βρίσκουμε πρώτα τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$t' = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + d^2}} - \frac{1}{2v} = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + d^2} \Rightarrow 3x^2 = d^2 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το ακρότατο είναι ελάχιστο:

$$t'' = \frac{1}{v\sqrt{x^2+d^2}} - \frac{x^2}{v(x^2+d^2)^{3/2}} = \frac{x^2+d^2-x^2}{v(x^2+d^2)^{3/2}} = \frac{d^2}{v(x^2+d^2)^{3/2}} > 0.$$

Άρα ο χρόνος είναι ελάχιστος όταν: $x = d/\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Να υπολογιστεί το : $\sqrt{12+1.999^2}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-8}.

Έχουμε: $\sqrt{12+1.999^2} = \sqrt{12+(2-0.001)^2}$. Για να το υπολογίσουμε προσεγγιστικά κάνουμε το εξής: Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{12+(2-x)^2}$. Ψάχνουμε τις τιμές τις για x κοντά στο μηδέν. Άρα θα την αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + ...$$

$f(0) = \sqrt{12+(2-0)^2} = 4$

$f'(x) = -\frac{2-x}{\sqrt{12+(2-x)^2}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{12+(2-x)^2}} - \frac{(2-x)^2}{(12+(2-x)^2)^{3/2}} \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

Αντικαθιστούμε όπου $x = 0.001 = 10^{-3}$ και έχουμε:

$$\sqrt{12+(2-0.001)^2} = f(10^{-3}) = f(0) + f'(0)\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}f''(0)\cdot(10^{-3})^2 + O((10^{-3})^3) =$$

$$= 4 - \frac{10^{-3}}{2} + \frac{3\cdot 10^{-6}}{32} + O(10^{-9})$$

Το σφάλμα που κάνουμε είναι τάξης 10^{-9} δηλαδή μικρότερο του 10^{-8}, άρα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε και άλλο όρο στο ανάπτυγμα Taylor .

ΘΕΜΑ 5

α) Να δειχθεί ότι:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(3+2\sin(x))^2}dx = \frac{1}{15}.$$

Θέτωντας $y = 3 + 2\sin(x)$, το διαφορικό γίνεται $dy = 2\cos(x)dx$ και τα όρια ολοκλήρωσης είναι: $x = 0 \to y = 3$ και $x = \pi/2 \to y = 5$. Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(3 + 2\sin(x))^2} dx = \int_3^5 \frac{dy}{2y^2} dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}\right]_3^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}.$$

β) Με βάση την απάντηση στο α), να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών

$$y = \frac{\cos(x)}{(3 + 2\sin(x))^2} \quad \text{και} \quad y = \frac{3x - 2}{(x + 2)^2}$$

στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi/2$.

Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των δύο καμπυλών δίνεται από το ολοκλήρωμα της διαφοράς τους:

$$E = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos(x)}{(3 + 2\sin(x))^2} - \frac{3x - 2}{(x + 2)^2} \right) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(3 + 2\sin(x))^2} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{3x - 2}{(x + 2)^2} dx$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα από το α) είναι 1/15, άρα αρκεί να υπολογίσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα. Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι κλάσμα πολυωνύμων άρα θα σπάσουμε την έκφραση σε απλά κλάσματα. Ο παρανομαστής έχει διπλή ρίζα το -2, άρα θα έχουμε:

$$\frac{3x - 2}{(x + 2)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2} = \frac{A(x + 2) + B}{(x + 2)^2}.$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές:

$$3x - 2 = Ax + (2A + B) \Rightarrow A = 3 \quad \text{και} \quad B = -8$$

Επομένως:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3x - 2}{(x + 2)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{x + 2} - \frac{8}{(x + 2)^2} \right) dx = [3\ln|x + 2|]_0^{\pi/2} + \left[\frac{8}{x + 2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 3\ln\left(\tfrac{\pi+4}{2}\right) - 3\ln(2) + \tfrac{16}{\pi+4} - 4$$

Και το εμβαδό θα είναι:

$$E = \frac{1}{15} - \left[3\ln\left(\frac{\pi + 4}{4}\right) + \frac{16}{\pi + 4} - 4\right]$$

γ) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Για να υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα, υπολογίζουμε πρώτα το:

$$I_b = \int_{b}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Το ολοκλήρωμα είναι κλάσμα πολυωνύμων άρα θα σπάσουμε την έκφραση σε απλά κλάσματα. Ο παρανομαστής έχει ρίζες το 1 και το 2, άρα θα έχουμε:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές:

$$1 = (A+B)x - (2A+B) \Rightarrow A+B = 0 \quad \text{και} \quad 2A+B = -1 \Rightarrow A = -1 \quad \text{και} \quad B = 1$$

Επομένως:

$$I_b = \int_{b}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_{b}^{-2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x-1| \right]_b^{-2} =$$

$$= \ln(4) - \ln(3) + \ln|b-2| - \ln|b-1|$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$I = \lim_{b\to-\infty} I_b = \lim_{b\to-\infty} \left(\ln(4) - \ln(3) + \ln|b-2| - \ln|b-1| \right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \lim_{b\to-\infty} \left(\ln|b-2| - \ln|b-1| \right).$$

Το όριο είναι της μορφής $\infty - \infty$. Για να το υπολογίσουμε κάνουμε το εξής:

$$\lim_{b\to-\infty} \left(\ln|b-2| - \ln|b-1| \right) = \lim_{b\to-\infty} \ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| = \ln|\lim_{b\to-\infty} \frac{b-2}{b-1}| = \ln(1) = 0.$$

Άρα:

$$I = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

ΘΕΜΑ 6

α) Να δειχθεί ότι: $2+2i = \sqrt{8}e^{i\pi/4}$.

$z = 2+2i = |z|e^{i\arg(z)}$, όπου: $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$ και $\arg(z) = \arctan(2/2) = \pi/4$. Άρα: $2+2i = \sqrt{8}e^{i\pi/4}$.

β) Με βάση την απάντηση στο α), να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 2+2i$.

Έχουμε: $z^3 = 2+2i = \sqrt{8}e^{i\pi/4}$. Οι ρίζες της $z^n = w$ είναι οι: $z = |w|^{1/n}e^{i\arg(w)/n+2i\kappa\pi/n}$.

Άρα εδώ θα έχουμε τις ρίζες να είναι οι:

$z = 8^{1/6}e^{i\pi/12}$

$z = 8^{1/6}e^{i\pi/12+2i\pi/3}$

$z = 8^{1/6}e^{i\pi/12+4i\pi/3}$