

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι - 30/6/2011**

**ΘΕΜΑ 1**

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$\alpha) a_n = \frac{n^5 + 2(3n)^3 + 2}{2n^5 + 5(n+2)^2 + 6}, \quad \beta) b_n = \left(\frac{n-2}{n+4}\right)^{n+4}. \quad \text{Δίνεται: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

[1.25 μονάδες]

**ΘΕΜΑ 2**

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}, \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

[1.5 μονάδες]

**ΘΕΜΑ 3**

α) Να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$$

β) Να υπολογιστούν τα  $a, b$  ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{για } x \leq \pi \\ ax + b, & \text{για } x > \pi \end{cases},$$

να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

[1.75 μονάδες]

#### ΘΕΜΑ 4

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση  $f(x) = \sin(\pi + 6x^2)$  κατά Taylor γύρω από το  $x_0 = 0$ , κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης.

[1.5 μονάδες]

#### ΘΕΜΑ 5

α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin(x) \cos(x)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2(x)}} dx.$$

β) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης  $y = \frac{x+4}{x^3+2x^2+x}$  και του άξονα  $x$  στο διάστημα  $1 \leq x \leq 2$ .

γ) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

[3 μονάδες]

#### ΘΕΜΑ 6

Έστω μιγαδικός αριθμός  $z$ . Ναδειχθεί ότι ο αριθμός  $w = z + (3/z)$  είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο  $z$  είναι πραγματικός ή  $|z| = \sqrt{3}$ .

[1 μονάδες]