Λύσεις σειράς ασκήσεων 4

1. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{α)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα μηδενίζεται στο άνω όριο του ολοκληρώματος. Άρα ορίζουμε το:

$$I_b = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(b) - \arcsin(0).$$

Το ολοκλήρωμα είναι επομένως:

$$I = \lim_{b\to 1} I_b = \lim_{b\to 1} \arcsin(b) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{γ)}\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα μηδενίζεται στο μηδέν. Άρα ορίζουμε τα δύο ολοκληρώματα:

$$I_{b^+} = \int_{-1}^b \frac{dx}{x^{2/3}} \quad \text{και} \quad I_{b^-} = \int_b^1 \frac{dx}{x^{2/3}}.$$

$$I_{b^+} = \int_{-1}^b \frac{dx}{x^{2/3}} = \left[3x^{1/3}\right]_{-1}^b = 3b^{1/3} - 3(-1)^{1/3}$$

$$I_{b^-} = \int_b^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \left[3x^{1/3}\right]_b^1 = 3 - 3b^{1/3}$$

Το ολοκλήρωμα είναι επομένως:

$$I = \lim_{b\to 0}\left(I_{b^+} + I_{b^-}\right) = 3 - 3(-1)^{1/3}.$$

2. Να εξετάσετε χωρίς να τα υπολογίσετε αν τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν:

$$\text{α)}\ \int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}} dx$$

Έχουμε:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi - x}} < \frac{1}{\sqrt{\pi - x}} = g(x)$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της g ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I_b = \int_0^b \frac{1}{\sqrt{\pi - x}} dx = \left[-2\sqrt{\pi - x}\right]_0^b = -2\sqrt{\pi - b} + 2\sqrt{\pi}$$

Το ολοκλήρωμα της g είναι:

$$I = \lim_{b\to\pi} I_b = \lim_{b\to\pi} \left(-2\sqrt{\pi - b} + 2\sqrt{\pi}\right) = 2\sqrt{\pi}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα της g συγκλίνει, εφαρμόζωντας το κριτήριο της σύγκρισης, συγκλίνει και το ολοκλήρωμα που μας δίνεται.

$$\text{γ)} \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο της σύγκρισης παίρνοντας $g(x) = 1/\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/(\sqrt{x} - 1)}{1/\sqrt{x}} = 1$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της g ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I_b = \int_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_4^b = 2\sqrt{b} - 4.$$

Το ολοκλήρωμα της g θα είναι:

$$I = \lim b \to \infty I_b = \lim b \to \infty(2\sqrt{b} - 4) = \infty.$$

Επειδή το ολοκλήρωμα της g αποκλίνει, θα αποκλίνει και το ολοκλήρωμα που μας δίνεται.

3. Να βρεθεί το εμβαδό των χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες:

$$\text{β)}\ y = 2\sin x, \quad y = \sin(2x), \quad [0, \pi]$$

Το εμβαδό του χωρίου θα είναι:

$$I = \int_0^\pi (2\sin(x) - \sin(2x))\, dx = [-2\cos(x) + (1/2)\cos(2x)]_0^\pi = 4.$$

11. Έστω πλάκα με επιφανειακή κατανομή φορτίου $\sigma = x^2$. Αν η πλάκα έχει το σχήμα του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2/x^2$ και τον άξονα x με $1 \le x \le 2$, να βρεθεί το συνολικό φορτίο της.

Από τη στιγμή που η πλάκα δεν έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, θα πρέπει να τη χωρίσουμε σε απειροστές φέτες, κάθε μία από τις οποίες έχει σταθερή πυκνότητα. Έτσι χωρίζουμε την πλάκα σε φέτες παράλληλες στον άξονα y με πάχος dx και ύψος $y = 2/x^2$. Επομένως κάθε φέτα έχει εμβαδό $dA = ydx = (2/x^2)dx$. Το φορτίο θα δίνεται από:

$$q = \int \sigma dA = \int_1^2 \sigma y dx = \int_1^2 x^2 \frac{2}{x^2} dx = 2.$$

13. α) Να γραφτούν σε πολική μορφή οι μιγαδικοί: $1 - i$

$z = 1 - i \Rightarrow z = |z|e^{i\arg(z)}$ με $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\arg(z) = \arctan(-1/1) = -\pi/4$. Άρα: $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

β) Να βρείτε για ποιούς μιγαδικούς ισχύει: $|z - 1| = z$.

Έστω $z = x + iy$. Τότε:

$$|z - 1| = z \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + iy.$$

Άρα θα πρέπει:

$$y = 0 \text{ και } \sqrt{(x-1)^2} = x \Rightarrow |x - 1| = x \Rightarrow x = 1/2.$$

γ) Έστω ο μιγαδικός $z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο $w = z + (1/z)$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Έστω $z = x + iy$. Τότε:

$$w = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Ο w είναι πραγματικός αν:

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ή } x^2 + y^2 = 1. \Rightarrow z \in R \text{ ή } |z| = 1$$

14. α) Να δειχθεί ότι αν $z = e^{i\theta}$, τότε $z^n + (1/z^n) = 2\cos(n\theta)$.

$$z^n + z^{-n} = 1^n e^{in\theta} + 1^{-n} e^{-in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) = 2\cos(n\theta).$$

γ) Να λυθεί η: $z^3 = -i$.

Γράφουμε το $w = -i$ σε πολική μορφή: $|w| = 1$ και $\arg(w) = \arctan(-1)/0 = -\pi/2$. Άρα : $w = e^{-i\pi/2}$. Και τώρα λύνουμε την εξίσωση που θα έχει τρείς ρίζες:

$$z = |w|^{1/3} e^{i\arg(w)/3} = e^{-i\pi/6}.$$

$$z = |w|^{1/3} e^{i\arg(w)/3 + 2i\pi/3} = e^{i\pi/2}.$$

$$z = |w|^{1/3} e^{i\arg(w)/3 + 4i\pi/3} = e^{7i\pi/6}.$$