ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι - 15/11/2011

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$\text{α) } a_n = \sqrt{5n+3}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \ , \quad \text{β) } b_n = \frac{n\cdot 3^n + 4^n}{6^n+1}.$$

$$\text{α) } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{5n+3}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) = \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{5n+3}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5n}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

$$\text{β) } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 3^n + 4^n}{6^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

Δεδομένου ότι: $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ όταν $a<1$ και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,$$

παίρνουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να υπολογιστούν τα $a, \ b$ ώστε

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2-ax+1}-2bx}{x+1} = 1.$$

β) Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης: $f(x) = \sin\left(x - e^{\sin(x^2)}\right)$.

γ) Να υπολογιστεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης: $f(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$.

α) Έστω
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - ax + 1} - 2bx}{x+1} \Rightarrow \sqrt{x^2 - ax + 1} - 2bx = f(x)(x+1).$$
Επομένως:
$$\lim_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2 - ax + 1} - 2bx\right) = \lim_{x\to -1} f(x)(x+1) = 1\cdot 0 = 0 \Rightarrow \sqrt{2+a} + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{a+2}}{2}.$$
Επίσης, το όριο της f θα πρέπει να είναι πεπερασμένο:
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2 - ax + 1} + x\sqrt{a+2}}{x+1} = \frac{0}{0}.$$
Εφαρμόζουμε τον κανόνα του l'Hospital και έχουμε:
$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{\frac{2x-a}{2\sqrt{x^2-ax+1}} + \sqrt{a+2}}{1} = -\frac{a+2}{2\sqrt{a+2}} + \sqrt{a+2} = \frac{\sqrt{a+2}}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -1.$$

β) Έχουμε:
$$f(x) = \sin\left(x - e^{\sin(x^2)}\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(x - e^{\sin(x^2)}\right)\cdot\left(x - e^{\sin(x^2)}\right)' =$$
$$\cos\left(x - e^{\sin(x^2)}\right)\left(1 - e^{\sin(x^2)}(\sin(x^2))'\right) = \cos\left(x - e^{\sin(x^2)}\right)\left(1 - e^{\sin(x^2)}2x\cos(x^2)\right).$$

γ) Έστω: $y = \arcsin(x) \Rightarrow x = \sin(y)$. Παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή και έχουμε:
$$1 = y'\cos(y) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ΘΕΜΑ 3

Ο κατασκευαστής ενός κινητού τηλεφώνου αναφέρει ότι η ισχύς του πομπού του τηλεφώνου για μικρές αποστάσεις x από αυτό δίνεται από τη σχέση: $I(x) = (1+x^2)^{-3/2}$. Να βρεθεί με τη βοήθεια αναπτύγματος Taylor η ισχύς της ακτινοβολίας που δέχεται κατά προσέγγιση ο εγκέφαλος ενός χρήστη του εν λόγω τηλεφώνου. Δίνεται ότι ο εγκέφαλος ενός χρήστη απέχει απόσταση $x = 0.001$ από το κινητό. Για το αποτέλεσμά σας κρατείστε όρους μέχρι δεύτερης τάξης.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, για να το υπολογίσουμε προσεγγιστικά την ισχύ κάνουμε το εξής: Έστω η συνάρτηση: $I(x) = (1 + x^2)^{-3/2}$. Ψάχνουμε τις τιμές τις για x κοντά στο μηδέν ($x = 0.001$). Άρα θα την αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το $x_0 = 0$:

$$I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{I^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} = I(0) + I'(0)x + \frac{1}{2}I''(0)x^2 + \frac{1}{3!}I'''(0)x^3 + ...$$

$I(0) = (1 + 0^2)^{-3/2} = 1$

$I'(x) = -\frac{3}{2}2x(1 + x^2)^{-5/2} \Rightarrow I'(0) = 0$

$I''(x) = -3(1 + x^2)^{-5/2} + 15x^2(1 + x^2)^{-7/2} \Rightarrow I''(0) = -3$

Αντικαθιστούμε όπου $x = 0.001 = 10^{-3}$ και έχουμε:

$$(1 + 0.001^2)^{-3/2} = I(10^{-3}) = I(0) + I'(0) \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}I''(0) \cdot (10^{-3})^2 + O((10^{-3})^3) =$$

$$= 1 - \tfrac{3 \cdot 10^{-6}}{2} + O(10^{-9})$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)\left(2 + \tan^2(x)\right)^2} dx.$$

β) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = \frac{1}{x^3+x}$ και του άξονα x στο διάστημα $1 \leq x \leq 2$.

γ) Να υπολογιστεί (αν συγκλίνει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

α) Θέτωντας $y = 2 + \tan^2(x)$, το διαφορικό γίνεται $dy = 2\tan(x)dx/\cos^2(x)$ και τα όρια ολοκλήρωσης είναι: $x = 0 \rightarrow y = 2$ και $x = \pi/4 \rightarrow y = 3$. Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)\left(2+\tan^2(x)\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}\right]_2^3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

β) Το εμβαδό του χωρίου δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_1^2 \frac{dx}{x^3+x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

Το ολοκλήρωμα είναι κλάσμα πολυωνύμων άρα θα σπάσουμε την έκφραση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και εξισώνουμε τους αριθμητές:

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A \Rightarrow A = 1 \quad , \; B = -A = -1, \quad \text{και} \quad C = 0$$

Επομένως:

$$E = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} = [\ln|x|]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x^2+1)'dx}{x^2+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$$

γ) Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει ρίζα στο $x = 1$ που είναι μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης. Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}.$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το:

$$I_b = \int_0^b \frac{dx}{x^2-1}.$$

Το ολοκλήρωμα είναι κλάσμα πολυωνύμων άρα θα σπάσουμε την έκφραση σε απλά κλάσματα. Ο παρανομαστής έχει ρίζες το 1 και το -1, άρα θα έχουμε:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και εξισώνουμε τους αριθμητές:

$$1 = (A + B)x + (A - B) \Rightarrow A = 1/2 \quad \text{και} \quad B = -1/2$$

Επομένως:

$$I_b = \int_0^b \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln |x-1| - \ln |x+1| \right]_0^b =$$

$$= \ln \sqrt{|b-1|} - \ln \sqrt{|b+1|}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$I = \lim_{b \to 1} I_b = \lim_{b \to 1} \left(\ln \sqrt{|b-1|} - \ln \sqrt{|b+1|} \right) = -\infty.$$

Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα αποκλίνει.

ΘΕΜΑ 5

Έστω μιγαδικός αριθμός z με $|z| = 1$ και $\arg(z) = \theta$. Να βρεθεί ο αριθμός $w = z^n + (1/z)^n$.

Ο μιγαδικός z μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως: $z = |z|e^{i \arg(z)} = e^{i\theta}$. Άρα: $w = z^n + (1/z)^n = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$. Αναπτύσσοντας το εκθετικό στην ισοδύναμή του μορφή, παίρνουμε:

$$w = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) = 2\cos(n\theta).$$