**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

Μάθημα: **Διαφορικές Εξισώσεις**

Εξάμηνο: **3Ο**

Διδάσκων καθηγητής: **Δρ Αντώνης Αντωνίου**

e-mail: **ananton@phys.uoa.gr**

**Φυλλάδιο ασκήσεων 10**

**Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε.). Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών**

**Ενδεικτικές λύσεις**

1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $u\left(x,t\right)=f\left(x-ct\right)+g(x+ct)$, όπου $f\left(x\right), g(x)$ τυχούσες συναρτήσεις, είναι πάντοτε λύση της κυματικής εξίσωσης (σε μια διάσταση)

$$u\_{xx}-\frac{1}{c^{2}}u\_{tt}=0$$

Ποιο είναι το φυσικό νόημα των δύο όρων του 2ου μέλους;

**Λύση:** $u\_{x}=\frac{∂u\left(x,t\right)}{∂x}$ και $u\_{xx}=\frac{∂}{∂x}(\frac{∂u\left(x,t\right)}{∂x})$. Εφαρμόζοντες αυτές και για τη μεταβλητή t και με παραγωγίσεις καταλήγουμε στη ζητούμενη. Στην $u\left(x,t\right)=f\left(x-ct\right)+g(x+ct)$ ο πρώτος όρος $f\left(x-ct\right)$ παριστάνει μια κυματομορφή που κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα και ο δεύτερος όρος $g(x+ct)$ μια άλλη κυμετομορφή που κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση.

1. Δίνονται οι παρακάτω Μ.Δ.Ε.:

α) $u\_{tt}=u\_{xxx}$

β) $yu\_{xx}+xu\_{yy}=0$

γ) $u\_{tt}=u\_{xt}+u$

δ) $tu\_{tt}=u\_{t}+u\_{xx}$

ε) $xu\_{t}=u\_{xx}$

στ) $xu\_{t}=u\_{xx}+u\_{tt}$

Για ποιες από αυτές είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών και ποιες οι συνήθεις Δ.Ε. που προκύπτουν σε κάθε περίπτωση;

**Λύση:** Θα εξετάσουμε σε κάθε περίπτωση αν η ζητούμενη συνάρτηση $u(x,t)$, όταν τη γράψουμε στη μορφή $u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T(t)$ καταλήγει σε συνήθεις Δ.Ε. ως προς $x$ και ως προς $t$.

α) $u\_{tt}=u\_{xxx}$. Γράφουμε τη ζητούμενη συνάρτηση στη μορφή

$$u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T(t)$$

Οπότε $u\_{tt}=X\left(x\right)\ddot{T}\left(t\right) και u\_{xxx}=X^{'''}\left(x\right)T(t) $.

Η δοθείσα εξίσωση γίνεται $X\left(x\right)\ddot{T}\left(t\right)=X^{'''}\left(x\right)T(t) $.

Διαιρούμε με $XT≡u$ και έχουμε

$$\frac{X\ddot{T}}{XT}=\frac{X^{'''}T}{XT} ή \frac{\ddot{Τ}}{Τ}=\frac{Χ^{'''}}{Χ}$$

Έχουμε δύο συναρτήσεις ασχέτων μεταβλητών (η πρώτη ως t και η δεύτερη ως προς x) οι οποίες είναι ίσες για όλα τα t και όλα τα x. Είναι προφανές ότι αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι συναρτήσεις αυτές είναι ίσες με μια σταθερά λ.

Άρα $\frac{\ddot{Τ}}{Τ}=λ και \frac{ X^{'''}}{X}=λ$ οπότε

$$\ddot{Τ}-λΤ=0 και X^{'''}-λΧ=0$$

που είναι συνήθεις Δ.Ε. ως προς t και ως προς x αντίστοιχα.

β) Ομοίως, ναι

γ) $u\_{tt}=u\_{xt}+u$

Γράφουμε τη ζητούμενη συνάρτηση στη μορφή

$$u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T(t)$$

οπότε $u\_{tt}=X\left(x\right)\ddot{T}\left(t\right)$ και $u\_{x}=\frac{∂u}{∂x}=X^{'}T και u\_{xt}=\frac{∂}{∂t}\left(\frac{∂u}{∂x}\right)=X'\dot{T}$

Η δοθείσα εξίσωση γίνεται $X\ddot{T}=X^{'}\dot{T}+XT$ και διαιρώντας με $XT≡u$

παίρνουμε $\frac{\ddot{Τ}}{Τ}=\frac{X'\dot{T}}{ΧΤ}+1$ από την οποία δεν καταλήγουμε σε συνήθεις Δ.Ε. ως προς t και ως προς x.

δ) Ναι

ε) Ναι

στ) Όχι