**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

Μάθημα: **Διαφορικές Εξισώσεις**

Εξάμηνο: **3Ο**

Διδάσκων καθηγητής: **Δρ Αντώνης Αντωνίου**

e-mail: **ananton@phys.uoa.gr**

**Φυλλάδιο ασκήσεων 9**

**Γενικές ασκήσεις στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.)**

1. **Συμπλήρωμα Θεωρίας: Μείωση κατά μια τάξη της ομογενούς εξίσωσης 2ας τάξεως**

Δίνεται η γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Αν μια ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης δείξτε ότι ο μετασχηματισμός οδηγεί σε μια πρωτοτάξια εξίσωση.

**Λύση:** Είναι και οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση παίρνουμε

και αφού μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωση , οπότε θα έχουμε .

Θέτοντας έχουμε τελικά που είναι γραμμική ομογενής εξίσωση 1ης τάξης.

1. Δείξτε ότι η μείωση αυτή επιτυγχάνεται και με την παρουσία μη ομογενούς όρου

**Λύση:** Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι

και για παίρνουμε

που είναι γραμμική εξίσωση 1ης τάξεως.

**Παρατήρηση:** Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως επιπλέον μέθοδος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

1. Μια καμπύλη του επιπέδου με εξίσωση , όπου η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν η κλίση σε κάθε σημείο της ισούται με το άθροισμα των συντεταγμένων της, να βρεθεί η καμπύλη .
2. α) Να βρεθούν τα Α και Β ώστε η συνάρτηση να είναι μερική λύση της εξίσωσης .

β) Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών με .

1. α) Να μετασχηματισθεί η εξίσωση y’+y=0 με την αντικατάσταση και νε βρεθεί η γενική λύση της.

β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση να λυθεί η Δ.Ε.

1. α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση .

Υπενθυμίζεται ότι και

β) Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. .

1. α) Αν η συνάρτηση είναι συνεχής και να αποδειχθεί ότι .

β) Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών .

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ικανοποιεί τη Δ.Ε. . Στη συνέχεια, λύνοντας την παραπάνω Δ.Ε., να βρεθεί η συνάρτηση .
2. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση με τέτοια ώστε .
3. Να προσδιορισθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση .
4. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. .
5. Σώμα μάζας αφήνεται να πέσει προς τα κάτω σε ομογενές βαρυτικό πεδίο βαρύτητας με ταχύτητα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας και συντελεστή τριβής (δηλ. ). Να μελετηθεί η χρονική συμπεριφορά της ταχύτητάς του . Δίνεται ότι και .
6. Ένα σώμα μάζας απωθείται από την αρχή με μια δύναμη ανάλογη από την απόστασή του από αυτήν (δηλ. , k σταθερά), ενώ ταυτόχρονα υφίσταται μια δύναμη τριβής ανάλογη με την ταχύτητα (δηλ. , λ ο συντελεστής τριβής). Που θα βρίσκεται το σώμα ύστερα από χρόνο αν η αρχική του θέση και η ταχύτητα είχαν τις τιμές και ; Θα καταφέρει η απωστική δύναμη να υπερνικήσει τις τριβές και να «σπρώξει» το σώμα μέχρι το άπειρο; Συζητείστε ποιοτικά την απάντησή σας.
7. Να λυθεί η Δ.Ε. .
8. Ένας εθνικός δρυμός μπορεί να θρέψει έναν πληθυσμό το πολύ 100 ελαφιών. Προς το παρόν στο δρυμό ζουν 10 ελάφια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των ελαφιών , t σε έτη, περιγράφεται μέσω της εξίσωσης , όπου . Πότε θα φθάσει ο πληθυσμός των ελαφιών τα 50 άτομα; (Δίνεται ).
9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση . Να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.
10. Να βρεθεί η καμπύλη της οποίας το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ αυτής, των αξόνων και της καθέτου στον άξονα από το σημείο της , να είναι ίσο με , όπου a, b σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.
11. Μια καμπύλη διέρχεται από τα σημεία και . Το τυχόν σημείο της έχει συντεταγμένες τα σημεία και . Αν το εμβαδόν του χωρίου είναι τριπλάσιο του εμβαδού του χωρίου να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης .