**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

Μάθημα: **Διαφορικές Εξισώσεις**

Εξάμηνο: **3Ο**

Διδάσκων καθηγητής: **Δρ Αντώνης Αντωνίου**

e-mail: **ananton@phys.uoa.gr**

**Φυλλάδιο ασκήσεων 8**

**Ενδεικτικές λύσεις**

**Πρόβλημα 1:**

Μια σφαίρα εισέρχεται κατά τη χρονική στιγμή σε ένα υγρό μέσο και «φρενάρει», δηλαδή υφίσταται μια δύναμη ανάλογη της ταχύτητας , όπου λ ένας συντελεστής τριβής που εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

Να βρεθεί το βάθος στο οποίο θα εισχωρήσει η σφαίρα, αν είναι γνωστά η αρχική θέση της σφαίρας , η αρχική της ταχύτητα , ο συντελεστής τριβής και η μάζα της σφαίρας. Μπορούμε να δούμε πως μεταβάλλεται χρονικά η ταχύτητα της σφαίρας;

Υπόδειξη: Βρείτε την εξίσωση κίνησης (δηλαδή τη θέση της σφαίρας κάθε χρονική στιγμή ) και στη συνέχεια βρείτε το όριο του στο συν άπειρο.

**Λύση:**

Η διαφορική εξίσωση του Νεύτωνα είναι Στην περίπτωσή μας είναι . Άρα η εξίσωση γίνεται ή όπου Οι αρχικές συνθήκες της εξίσωσης είναι .Η παραπάνω εξίσωση είναι ομογενής 2ας τάξεως, επομένως η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι με ρίζες . Η γενική της λύση είναι

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω αρχικές συνθήκες βρίσκουμε και

Οπότε, τελικά έχουμε

Το μέγιστο βάθος που θα φθάσει η σφαίρα είναι το

αποτέλεσμα απόλυτα εύλογο, αφού μας λέει ότι το βάθος αυτό είναι ανάλογο της μάζας και της αρχικής ταχύτητας και αντιστρόφως ανάλογο του συντελεστή τριβής.

Για να βρούμε πως μεταβάλλεται χρονικά η ταχύτητα της σφαίρας παραγωγίζουμε τη γενική λύση και έχουμε

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα της σφαίρας ελαττώνεται εκθετικά.

**Πρόβλημα 2:**

Σώμα μάζας κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω σε ομογενές πεδίο βαρύτητας . Στο σώμα ασκείται δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας , όπου λ ο συντελεστής τριβής. Τη χρονική στιγμή το σώμα βρισκόταν στη θέση και είχε αρχική ταχύτητα .

Να βρεθούν η θέση και η ταχύτητα για κάθε χρονική στιγμή .

**Λύση:**

Η ολική δύναμη που εξασκείται στο σώμα είναι Οπότε η εξίσωση του Νεύτωνα γίνεται

όπου

Η εξίσωση αυτή είναι διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως. Η αντίστοιχη ομογενής είναι όπως του προβλήματος 1 και έχει γενική λύση

Η μερική λύση της είναι, σύμφωνα με τη θεωρία, , όπου Α προσδιοριστέα σταθερά. Οπότε

Η γενική λύση της είναι, σύμφωνα με τη θεωρία, γενική της ομογενούς συν τη μερική της γενικής και άρα θα έχουμε

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε και . Οπότε τελικά έχουμε

**Πρόβλημα 3:**

Εξετάστε τη χρονική συμπεριφορά της ταχύτητας στο πρόβλημα 1 για την περίπτωση που η δύναμη τριβής είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλ. . Υπήρξε κάποια χρονική στιγμή στο παρελθόν που το σώμα είχε άπειρη ταχύτητα; Πώς σχολιάζετε το γεγονός αυτό;

**Λύση:**

Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα, όπως στα προηγούμενα, βρίσκουμε όπου .

Η τελευταία είναι διαχωρίσιμη 1ης τάξεως και κατά τα γνωστά δίνει λύση .

Επιβάλλοντας την αρχική συνθήκη παίρνουμε και άρα

Παρατηρούμε ότι , δηλαδή κατά τη χρονική στιγμή (το μείον σημαίνει παρελθόν) η ταχύτητα ήταν άπειρη.

**Σχόλιο:** Η φυσική σημασία του γεγονότος αυτού είναι η εξής: Μια κίνηση που διέπεται από την εξίσωση δε μπορεί παρά να ξεκίνησε από μια κατάσταση άπειρης ταχύτητας σε ένα πεπερασμένο χρόνο στο παρελθόν. Μπορούμε μάλιστα να προσδιορίσουμε αυτή τη στιγμή κατά την οποία συνέβη το «βίαιο αυτό γεγονός» με μετρήσεις που αφορούν την τωρινή κατάσταση του σώματος. Πρόκειται προφανώς για μια κινητή «ανωμαλία» που η θέση της καθορίζεται από τις «αρχικές συνθήκες» του προβλήματος. Από φυσική άποψη μιας τέτοιας ανωμαλίας στο πεπερασμένο παρελθόν δεν είναι τόσο δυσεξήγητη. Ο μη γραμμικός νόμος οδηγεί σε τόσο γρήγορη μείωση ταχύτητας (σε αντίθεση με τον αντίστοιχο γραμμικό του προβλήματος 1) ώστε είναι αδύνατον μια παρούσα κατάσταση πεπερασμένης ταχύτητας να έχει πίσω της ένα άπειρο παρελθόν. Ο μόνος τρόπος για να έχουμε βρεθεί σήμερα με μια μη μηδενική ταχύτητα- υφιστάμενοι καθ’ οδόν μια τόσο ισχυρή απόσβεση- είναι να έχουμε εκτοξευθεί πριν πεπερασμένο χρόνο με άπειρη ταχύτητα. Δεν είναι τυχαίο αν αυτή η περιγραφή φέρει στο νου μας την περίφημη «Μεγάλη Έκρηξη», τη λεγόμενη «αρχική ανωμαλία», που δημιούργησε το σημερινό διαστελλόμενο κόσμο μας. Πράγματι, το μαθηματικό μοντέλο ενός τέτοιου διαστελλόμενου Σύμπαντος, παρά την ασύγκριτα μεγαλύτερη πολυπλοκότητά του, έχει κάτι κοινό με το «τετριμμένο» τωρινό μας πρόβλημα. Προβλέπει υποχρεωτικά την ύπαρξη μιας κατάστασης απειρισμού των φυσικών μεγεθών του Σύμπαντος σε ένα πεπερασμένο χρόνο στο παρελθόν που εξαρτάται από την παρούσα ταχύτητα διαστολής και το ρυθμό επιβράδυνσής της. Αυτό μας δίνει μια ιδέα για τη μαθηματική αιτία αυτής της αρχικής ανωμαλίας. Είναι ο μη γραμμικός χαρακτήρας των εξισώσεων τουEinstein που διέπουν την κοσμική εξέλιξη.

**Πρόβλημα 4:** Εξετάστε τη χρονική συμπεριφορά της ταχύτητας στο πρόβλημα 2 αν στο σώμα ασκείται τριβή ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλ. .

**Υπόδειξη:** Όπως τα προηγούμενα

**Πρόβλημα 5.:** Η ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν υφίσταται μια δύναμη , ανάλογη με την απομάκρυνσή του από κάποιο ελκτικό κέντρο . Οι προϋποθέσεις για μια τέτοια κίνηση πραγματοποιούνται στο σύστημα «μάζας-ελατηρίου» όταν αυτό απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του και από εκεί αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί υπό την επίδραση μόνο των εσωτερικών δυνάμεων. Να βρεθεί και να μελετηθεί η εξίσωση κίνησης μιας τέτοιας ταλάντωσης αν και .

**Υπόδειξη:** Κλασικό πρόβλημα αρμονικής ταλάντωσης. Υπάρχει σε όλα τα βιβλία Φυσικής. Λύθηκε και κατά τη διάρκεια των μαθημάτων