**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

Μάθημα: **Διαφορικές Εξισώσεις**

Εξάμηνο: **3Ο**

Διδάσκων καθηγητής: **Δρ Αντώνης Αντωνίου**

e-mail: **ananton@phys.uoa.gr**

**Φυλλάδιο ασκήσεων 9**

**Γενικές ασκήσεις στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και**

**ενδεικτικές λύσεις μερικών από αυτές**

1. **Συμπλήρωμα Θεωρίας: Μείωση κατά μια τάξη της ομογενούς εξίσωσης 2ας τάξεως**

Δίνεται η γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Αν μια ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης δείξτε ότι ο μετασχηματισμός οδηγεί σε μια πρωτοτάξια εξίσωση.

**Λύση:** Είναι και οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση παίρνουμε

και αφού μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωση , οπότε θα έχουμε .

Θέτοντας έχουμε τελικά που είναι γραμμική ομογενής εξίσωση 1ης τάξης.

1. Δείξτε ότι η μείωση αυτή επιτυγχάνεται και με την παρουσία μη ομογενούς όρου

**Λύση:** Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι

 και για παίρνουμε

 που είναι γραμμική εξίσωση 1ης τάξεως.

**Παρατήρηση:** Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως επιπλέον μέθοδος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

1. Μια καμπύλη του επιπέδου με εξίσωση , όπου η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν η κλίση σε κάθε σημείο της ισούται με το άθροισμα των συντεταγμένων της, να βρεθεί η καμπύλη .

**Λύση:** Αφού η κλίση σε κάθε σημείο της ισούται με το άθροισμα των συντεταγμένων της θα έχουμε και αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι .

 (γραμμική 1ης τάξης). Η αντίστοιχη ομογενής είναι και έχει μερική λύση , οπότε, σύμφωνα με τη θεωρία, γενική λύση της εξίσωσης δίνεται από την . Από την αρχική συνθήκη βρίσκουμε και άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι .

1. α) Να βρεθούν τα Α και Β ώστε η συνάρτηση να είναι μερική λύση της εξίσωσης .

β) Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών με .

**Λύση:** α) Η δοθείσα εξίσωση είναι γενική ομογενής 2ας τάξεως. Αφού η είναι μερική λύση της εξίσωσης σημαίνει ότι την ικανοποιεί. Θέτοντας επομένως στην εξίσωση στη θέση του την και εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων βρίσκουμε .

β) Υπολογίζοντας τα Α και Β έχουμε βρει μια μερική λύση της δοθείσας γραμμικής εξίσωσης, την . Η αντίστοιχη ομογενής έχει χαρακτηριστική εξίσωση που έχει διπλή ρίζα τη και γενική λύση , και άρα, σύμφωνα με τη θεωρία η γενική λύση της δοθείσας θα είναι . Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε και άρα η τελική λύση είναι .

1. α) Να μετασχηματισθεί η εξίσωση y’+y=0 με την αντικατάσταση και νε βρεθεί η γενική λύση της.

β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση να λυθεί η Δ.Ε.

1. α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση .

Υπενθυμίζεται ότι και

β) Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. .

1. α) Αν η συνάρτηση είναι συνεχής και να αποδειχθεί ότι .

β) Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών .

**Λύση:** α) . Θέτουμε και έχουμε . Παραγωγίζοντας παίρνουμε , και ξαναπαραγωγίζοντας έχουμε Επομένως που είναι αυτή που θέλουμε να αποδείξουμε, με .

β) Γραμμική 2ας τάξεως. Λύνεται κατά τα γνωστά. Σαν μερική λύση πάρτε την , απ’ όπου προκύπτει Α=-1

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ικανοποιεί τη Δ.Ε. . Στη συνέχεια, λύνοντας την παραπάνω Δ.Ε., να βρεθεί η συνάρτηση .
2. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση με τέτοια ώστε .

**Λύση:** Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση παίρνουμε: . Η τελευταία είναι γραμμική ομογενής 2ας τάξεως με χαρακτηριστική εξίσωση . Η γενική λύση αυτής είναι η Το πρόβλημα τώρα είναι να υπολογίσουμε τις σταθερές.

Από την παίρνουμε . Αλλά . Αλλά από τη δοθείσα σχέση, για έχουμε . Έχουμε επομένως το σύστημα και . Από το σύστημα αυτό παίρνουμε και άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι .

1. Να προσδιορισθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση .
2. Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. .
3. Σώμα μάζας αφήνεται να πέσει προς τα κάτω σε ομογενές βαρυτικό πεδίο βαρύτητας με ταχύτητα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας και συντελεστή τριβής (δηλ. ). Να μελετηθεί η χρονική συμπεριφορά της ταχύτητάς του . Δίνεται ότι και .
4. Ένα σώμα μάζας απωθείται από την αρχή με μια δύναμη ανάλογη από την απόστασή του από αυτήν (δηλ. , k σταθερά), ενώ ταυτόχρονα υφίσταται μια δύναμη τριβής ανάλογη με την ταχύτητα (δηλ. , λ ο συντελεστής τριβής). Που θα βρίσκεται το σώμα ύστερα από χρόνο αν η αρχική του θέση και η ταχύτητα είχαν τις τιμές και ; Θα καταφέρει η απωστική δύναμη να υπερνικήσει τις τριβές και να «σπρώξει» το σώμα μέχρι το άπειρο; Συζητείστε ποιοτικά την απάντησή σας.
5. Να λυθεί η Δ.Ε. .

**Λύση:** Είναι . Επίσης

. Άρα η δοθείσα εξίσωση είναι πλήρης, οπότε η γενική λύση της της θα δοθεί από το σύστημα

Από την πρώτη, ολοκληρώνοντας, παίρνουμε .

Η είναι η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία, αφού η συνάρτηση είναι δύο μεταβλητών και η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x, η σταθερά ολοκλήρωσης περιέχει γενικώς y.

Από τη δεύτερη έχουμε διαδοχικά

Άρα

1. Ένας εθνικός δρυμός μπορεί να θρέψει έναν πληθυσμό το πολύ 100 ελαφιών. Προς το παρόν στο δρυμό ζουν 10 ελάφια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των ελαφιών , t σε έτη, περιγράφεται μέσω της εξίσωσης , όπου . Πότε θα φθάσει ο πληθυσμός των ελαφιών τα 50 άτομα; (Δίνεται ).

**Λύση:** Η δοθείσα Δ.Ε. γίνεται η οποία είναι Bernoulli για . Θέτουμε και έχουμε και η νέα εξίσωση ως προς u είναι η .

Η τελευταία είναι γραμμική πρώτης τάξεως και κατά γνωστά δίνει λύση .

Άρα . Το c προσδιορίζεται από το ότι από την οποία βρίσκουμε και άρα .

Αναζητούμε t τέτοιο ώστε απ’ όπου βρίσκουμε χρόνια.

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση . Να βρεθεί η συνάρτηση αυτή.

**Λύση:** Παραγωγίζουμε και έχουμε: Από τη δοθείσα παίρνουμε , οπότε

 από την οποία παίρνουμε και άρα . Από τη δοθείσα όμως παίρνουμε για οπότε και άρα .

1. Να βρεθεί η καμπύλη της οποίας το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ αυτής, των αξόνων και της καθέτου στον άξονα από το σημείο της , να είναι ίσο με , όπου a, b σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

**Λύση:** Το εμβαδόν του χωρίου που αναφέρεται στην άσκηση είναι το και σύμφωνα με αυτήν είναι και παραγωγίζοντας παίρνουμε

Η τελευταία είναι γραμμική 1ης τάξης. Η αντίστοιχη ομογενής είναι για την οποία έχουμε

 .

Η γενική λύση, σύμφωνα με τη θεωρία, είναι

, όπου . Η σταθερά c υπολογίζεται, θέτοντας στη δοθείσα σχέση τη συνάρτηση που βρήκαμε, δηλαδή και βρίσκουμε . Άρα, τελικά .

1. Μια καμπύλη διέρχεται από τα σημεία και . Το τυχόν σημείο της έχει συντεταγμένες τα σημεία και . Αν το εμβαδόν του χωρίου είναι τριπλάσιο του εμβαδού του χωρίου να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης .

**Λύση:** Κάνοντας ένα απλό σχήμα βλέπουμε ότι:

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη καταλήγουμε στην εξίσωση

από την οποία βρίσκουμε

.

Αφού έχουμε , οπότε η καμπύλη έχει τελικά εξίσωση

.