K03 - Λογική Σχεδίαση
Δεύτερο Εξάμηνο Φοίτησης

Δυαδικά Συστήματα

Γεώργιος Χ. Αλεξανδρόπουλος
Λέκτορας Π.Δ. 407/80
e-mail: alexandg@uop.gr
URL: http://users.iit.demokritos.gr/~alexandg

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών

Περιεχόμενα

Ψηφιακά Συστήματα

- Ο ψηφιακός Η/Υ χρησιμοποιεί διακριτά στοιχεία πληροφορίας
- Η πληροφορία παριστάνεται σε δυαδική μορφή χρησιμοποιώντας το δυαδικό σύστημα αρίθμησης και δυαδικούς κώδικες
- Η επεξεργασία στον Η/Υ διεξάγεται με τα δυαδικά λογικά στοιχεία που χρησιμοποιούν δυαδικά σήματα
- Η αποθήκευση δεδομένων λαμβάνει χώρα σε δυαδικά στοιχεία αποθήκευσης

Βασικά εργαλεία της λογικής σχεδίασης:

- Δυαδικοί αριθμοί
- Δυαδικοί κώδικες
- Άλγεβρα Boole

Αναπαράσταση Αριθμού

Αριθμός με υποδιαστολή και βάση συστήματος αρίθμησης β:

$$(\alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0 . \alpha_{-1} \cdots \alpha_{-j+1} \alpha_{-j})_\beta$$

- $i + j + 1$ συντελεστές α_n
  όπου το $n = i, i-1, \cdots, 1, 0, -1 \cdots, -j+1, -j$
- $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$

Παραδείγματα Συστημάτων Αρίθμησης:

- 2-δικό (BIN): $\beta = 2$ και $\alpha_n \in \{0, 1\}$
- 8-δικό (OCT): $\beta = 8$ και $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$
- 10-δικό (DEC): $\beta = 10$ και $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$
- 16-δικό (HEX): $\beta = 16$ και $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Μετατροπή στο 10-δικό Σύστημα

Στο β-δικό σύστημα αρίθμησης:

$$(\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1\alpha_0.\alpha_{-1}\cdots\alpha_{-j+1}\alpha_{-j})_\beta$$

Στο 10-δικό σύστημα αρίθμησης:

$$\big(\alpha_i\beta^i+\alpha_{i-1}\beta^{i-1}+\cdots+\alpha_1\beta^1+\alpha_0\beta^0 \\ +\alpha_{-1}\beta^{-1}+\cdots+\alpha_{-j+1}\beta^{-j+1}+\alpha_{-j}\beta^{-j}\big)_{10}$$

Παραδείγματα:

- $(132.52)_{10}=1\,\mathrm{x}\,10^2+3\,\mathrm{x}\,10^1+2\,\mathrm{x}\,10^0+5\,\mathrm{x}\,10^{-1}+2\,\mathrm{x}\,10^{-2}$
- $(110.01)_2=\big(1\,\mathrm{x}\,2^2+1\,\mathrm{x}\,2^1+0\,\mathrm{x}\,2^0+0\,\mathrm{x}\,2^{-1}+1\,\mathrm{x}\,2^{-2}\big)_{10}=(5.25)_{10}$
- $(27.1)_8=\big(2\,\mathrm{x}\,8^1+7\,\mathrm{x}\,8^0+1\,\mathrm{x}\,8^{-1}\big)_{10}=(23.125)_{10}$
- $(A5F)_{16}=\big(10\,\mathrm{x}\,16^2+5\,\mathrm{x}\,16^1+15\,\mathrm{x}\,16^0\big)_{10}=(2655)_{10}$

Μετατροπή από το 10-δικό στο β-δικό

Χωριστή μετατροπή του ακεραίου και κλασματικού μέρους του $(x.y)_{10}$:

- Ακέραιο μέρος $(\alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)_\beta$:
  - Διαδοχικές διαιρέσεις με την προς μετατροπή βάση β μέχρι το πήλικο να μηδενιστεί
  - Υπόλοιπο 1ης διαίρεσης $\rightarrow \alpha_0$, Υπόλοιπο 2ης διαίρεσης $\rightarrow \alpha_1$, ..., Υπόλοιπο τελευταίας (έστω i-οστής) διαίρεσης $\rightarrow \alpha_i$
- Κλασματικό μέρος $(0.\alpha_{-1} \cdots \alpha_{-j+1} \alpha_{-j})_\beta$:
  - Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με την προς μετατροπή βάση β μέχρι το γινόμενο να είναι ακέραιος αριθμός
  - Ακέραιο μέρος 1ου πολ/σμού $\rightarrow \alpha_{-1}$, Ακέραιο μέρος 2ου πολ/σμού $\rightarrow \alpha_{-2}$, ..., Ακέραιο μέρος τελευταίου (έστω j-οστού) πολ/σμού $\rightarrow \alpha_{-j}$

Παραδείγματα

Μετατροπή Ακεραίου Αριθμού

Ακέραιο Πηλίκο (ΑΠ), Υπόλοιπο (Υ), Συντελεστής (Σ)

$$\begin{array}{ccc}
\text{ΑΠ} & \Upsilon & \Sigma \\
\frac{75}{2} = 37 & 1 & \alpha_0 = 1 \\
\frac{37}{2} = 18 & 1 & \alpha_1 = 1 \\
\frac{18}{2} = 9 & 0 & \alpha_2 = 0 \\
\frac{9}{2} = 4 & 1 & \alpha_3 = 1 \\
\frac{4}{2} = 2 & 0 & \alpha_4 = 0 \\
\frac{2}{2} = 1 & 0 & \alpha_5 = 0 \\
\frac{1}{2} = 0 & 1 & \alpha_6 = 1
\end{array}$$

$$(75)_{10} = (1001011)_2$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{ΑΠ} & \Upsilon & \Sigma \\
\frac{75}{8} = 9 & 3 & \alpha_0 = 3 \\
\frac{9}{8} = 1 & 1 & \alpha_1 = 1 \\
\frac{1}{8} = 0 & 1 & \alpha_2 = 1
\end{array}$$

$$(75)_{10} = (113)_8$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{ΑΠ} & \Upsilon & \Sigma \\
\frac{75}{16} = 4 & 11 & \alpha_0 = 11 (= B) \\
\frac{4}{16} = 0 & 4 & \alpha_1 = 4
\end{array}$$

$$(75)_{10} = (4B)_{16}$$

Παραδείγματα

Μετατροπή Κλασματικού Αριθμού

Ακέραιο Μέρος (ΑΜ), Δεκαδικό Μέρος (ΔΜ)

	ΑΜ	ΔΜ	Σ
0.6875 x 2	1	0.375	$\alpha_{-1} = 1$
0.375 x 2	0	0.75	$\alpha_{-2} = 0$
0.75 x 2	1	0.5	$\alpha_{-3} = 1$
0.5 x 2	1	0	$\alpha_{-4} = 1$

$$(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$$

	ΑΜ	ΔΜ	Σ
0.6875 x 8	5	0.5	$\alpha_{-1} = 5$
0.5 x 8	4	0	$\alpha_{-2} = 4$

$$(0.6875)_{10} = (0.54)_8$$

	ΑΜ	ΔΜ	Σ
0.6875 x 16	11	0	$\alpha_{-1} = 11(= B)$

$$(0.6875)_{10} = (0.B)_{16}$$

Παραδείγματα

Μετατροπή 10-δικού Αριθμού με Υποδιαστολή

$$(75.6875)_{10} = (1001011.1011)_2$$
$$(75.6875)_{10} = (113.54)_8$$
$$(75.6875)_{10} = (4B.B)_{16}$$

Επαλήθευση στο 10-δικό

$$2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} = 75.6875$$
$$8^2 + 8^1 + 3\,\mathrm{x}\,8^0 + 5\,\mathrm{x}\,8^{-1} + 4\,\mathrm{x}\,8^{-2} = 75.6875$$
$$4\,\mathrm{x}\,16^1 + 11\,\mathrm{x}\,16^0 + 11\,\mathrm{x}\,16^{-1} = 75.6875$$

8-δικό και 16-δικό Σύστημα

Η μετατροπή ενός αριθμού από το 2-δικό σύστημα στο 8-δικό και στο 16-δικό επιτυγχάνεται εύκολα!
Το 8-δικό και το 16-δικό σύστημα χρησιμοποιούνται συχνά στην επικοινωνία μας με τους ψηφιακούς υπολογιστές

- 8-δικό (OCT): $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$
- 16-δικό (HEX): $\alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

2-δικό σε $8(2^3)$-δικό (χωρίζω σε τριάδες)

$$(\underbrace{11}_{2^1+2^0}\ \underbrace{001}_{2^0}\ \underbrace{101}_{2^2+2^0}\ .\ \underbrace{111}_{2^2+2^1+2^0}\ \underbrace{001}_{2^0}\ \underbrace{01}_{2^0})_2 = (315.711)_8$$

2-δικό σε $16(2^4)$-δικό (χωρίζω σε τετράδες)

$$(\underbrace{1100}_{2^3+2^2}\ \underbrace{1101}_{2^3+2^2+2^0}\ .\ \underbrace{1110}_{2^3+2^2+2^1}\ \underbrace{0101}_{2^2+2^0})_2 = (CD.E5)_{16}$$

Μετατροπή από 8-δικό και 16-δικό σε 2-δικό

Ακολουθώ την αντίστροφη διαδικασία από προηγουμένως

Παραδείγματα:

- $8(2^3)$-δικό σε 2-δικό:
  $(71.23)_8 = (\underbrace{111}_{2^2+2^1+2^0}\ \underbrace{001}_{2^0}.\underbrace{010}_{2^1}\ \underbrace{011}_{2^1+2^0})_2$
- $16(2^4)$-δικό σε 2-δικό:
  $(F5.A3)_{16} = (\underbrace{1111}_{2^3+2^2+2^1+2^0}\ \underbrace{0101}_{2^2+2^0}.\underbrace{1010}_{2^3+2^1}\ \underbrace{0011}_{2^1+2^0})_2$

Αλγεβρικές Πράξεις στο 2-δικό Σύστημα

Οι κανόνες αλγεβρικών πράξεων στο β-δικό σύστημα αρίθμησης είναι αυτοί που γνωρίζουμε από το 10-δικό

- Πρόσθεση 2-δικών ψηφίων:
  $0 + 0 = 0$
  $0 + 1 = 1$
  $1 + 0 = 1$
  $1 + 1 = 10$ (=0 και κρατούμενο 1 στην περίπτωση ενός ψηφίου)
- Αφαίρεση 2-δικών ψηφίων:
  $0 - 0 = 0$
  $1 - 0 = 1$
  $1 - 1 = 0$
  $0 - 1 = 1$ (χρησιμοποιήθηκε δανεικό κρατούμενο 1)
- Πολλαπλασιασμός 2-δικών ψηφίων:
  $0 \text{ x } 0 = 0$
  $0 \text{ x } 1 = 1$
  $1 \text{ x } 0 = 1$
  $1 \text{ x } 1 = 1$

Αλγεβρικές Πράξεις στο 2-δικό Σύστημα

Πρόσθεση:

$$(8.75)_{10} = (1000.11)_2 \text{ και } (1.5)_{10} = (1.1)_2$$

$$\begin{array}{rr} & 8.75 \\ + & 1.50 \\ \hline & 10.25 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1000.11 \\ + & 0001.10 \\ \hline & 1010.01 \end{array}$$

$$(10.25)_{10} = (1010.01)_2$$

Αλγεβρικές Πράξεις στο 2-δικό Σύστημα

Αφαίρεση:

$$(8.75)_{10} = (1000.11)_2 \text{ και } (1.5)_{10} = (1.1)_2$$

$$\begin{array}{rr} & 8.75 \\ - & 1.50 \\ \hline & 7.25 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1000.11 \\ - & 0001.10 \\ \hline & 0111.01 \end{array}$$

$$(7.25)_{10} = (111.01)_2$$

Αλγεβρικές Πράξεις στο 2-δικό Σύστημα

Πολλαπλασιασμός:

$$(8.75)_{10} = (1000.11)_2 \text{ και } (1.5)_{10} = (1.1)_2$$

$$\begin{array}{rr} & 8.75 \\ \text{x} & 1.5 \\ \hline & 4375 \\ + & 875 \\ \hline & 13.125 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1000.11 \\ \text{x} & 1.1 \\ \hline & 100011 \\ + & 100011 \\ \hline & 1101.001 \end{array}$$

$$(13.125)_{10} = (1101.001)_2$$

Αλγεβρικές Πράξεις στο 2-δικό Σύστημα

Διαίρεση: Η διαίρεση δύο αριθμών στο 2-δικό σύστημα επιτυγχάνεται με τη βοήθεια διαδοχικών αφαιρέσεων

Έστω Δ: διαιρετέος και δ: διαιρέτης, τότε:

Βήμα 1: Ευθυγραμμίζω στο MSB τους Δ και δ

Βήμα 2: Έστω Χ ο αριθμός μέρος του Δ που εκτείνεται από το MSB του Δ έως το ψηφίο του Δ που είναι ευθυγραμμισμένο με το LSB του δ κι έστω Υ ο υπόλοιπος αριθμός με έστω i ψηφία

Βήμα 3: Ελέγχω:

- Αν Χ⩾δ, σημειώνω 1 στο i-οστό MSB του πηλίκου κι εκτελώ Χ−δ
- Αν Χ<δ, σημειώνω 0 στο i-οστό MSB του πηλίκου

Βήμα 4: Τοποθετώ δεξιά από το αποτέλεσμα Χ−δ το i-οστό MSB του Ζ κι φτιάχνω το νέο Χ. Θέτω $i-1 \rightarrow i$ κι επιστρέφω στο Βήμα 3

Αλγεβρικές Πράξεις στο 2-δικό Σύστημα

Διαίρεση:

$$(53 \div 6)_{10} = (6 \,\mathrm{x}\, 8 + 5)_{10}$$

Πηλίκο (Π): $\alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_0$

- $\underbrace{110}_{\mathrm{X}}\overbrace{101}^{Z}$
- Εκτελώ $\mathrm{X} - 110 = 0$ και θέτω $\alpha_3 = 1$
- Εφόσον $01 < 110$, θέτω $\alpha_2 = 0$
- Εφόσον $010 < 110$, θέτω $\alpha_1 = 0$
- Εφόσον $0101 < 110$, θέτω $\alpha_0 = 0$
- Εξάντλησα το Z, άρα $\Upsilon = 101$

$$(110101 \div 110)_2 = (110 \,\mathrm{x}\, 1000 + 101)_2$$

Συμπληρώματα Αριθμών

- Στους ψηφιακούς υπολογιστές χρησιμοποιούνται τα συμπληρώματα με σκοπό την απλοποίηση της αφαίρεσης κι άλλων λογικών πράξεων
- Για κάθε β-δικό σύστημα υπάρχουν:
  - Συμπλήρωμα ως προς $\beta - 1$
  - Συμπλήρωμα ως προς β
- Έστω ο αριθμός $\mathrm{A} = (\alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)_\beta$, τότε:
  - Συμπλήρωμα ως προς $\beta - 1$: $\beta^{i+1} - 1 - \mathrm{A}$
  - Συμπλήρωμα ως προς β: $\beta^{i+1} - \mathrm{A}$ για $\mathrm{A} \neq 0$ και 0 για $\mathrm{A} = 0$

Συμπληρώματα Αριθμών

Παραδείγματα:

Έστω ο $(1051)_{10}$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 9: $\underbrace{10^4 - 1}_{9999} - 1051 = 8948$
- Συμπλήρωμα ως προς 10: $\underbrace{10^4}_{10000} - 1051 = 8949$

Έστω ο $(11010)_2$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 1: $\underbrace{2^5 - 1}_{11111} - 11010 = 00101$ (εναλλαγή των 0 και 1)
- Συμπλήρωμα ως προς 2: $\underbrace{2^5}_{100000} - 11010 = 00110\ (= 00101 + 1)$

Κανόνες Εύρεσης Συμπληρωμάτων στο 2-δικό

Συμπλήρωμα ως προς 1:

- Αντικαθιστώ τα 0 με 1 και τα 1 με 0, αντίστοιχα

Συμπλήρωμα ως προς 2:

- Αφήνω τα λιγότερο σημαντικά 0 και το πρώτο 1 αμετάβλητα κι έπειτα αντικαθιστώ τα 0 με 1 και τα 1 με 0, αντίστοιχα

Στην περίπτωση αριθμού με υποδιαστολή συμπληρώνω αγνοώντας την υποδιαστολή

Αφαίρεση με Συμπλήρωμα ως προς β

- Η μέθοδος αφαίρεσης με συμπληρώματα και πρόσθεση είναι αυτή που χρησιμοποιείται στα ψηφιακά κυκλώματα
- Η αφαίρεση δύο θετικών n-ψήφιων αριθμών $M - N$ βάσης β επιτυγχάνεται ως:
  - Προσθέτω το μειωτεό M στο συμπλήρωμα ως προς β του αφαιρετέου N: $M - N + \beta^n$
  - Αν $M \geqslant N$, το παραπάνω άθροισμα θα έχει τελικό κρατούμενο β^n, το οποίο κι αγνοώ, ενώ αυτό που μένει είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης
  - Αν $M < N$, τότε δε θα προκύψει κρατούμενο και το παραπάνω άθροισμα θα ισούται με $\beta^n - (N - M)$ (συμπλήρωμα ως προς β του $N - M$). Υπολογίζω το συμπλήρωμα ως προς β του αποτελέσματος και τοποθετώ ένα μείον μπροστά του για να δείξω ότι πρόκειται για αρνητικό

Αφαίρεση με Συμπληρώμα ως προς β

Παραδείγματα με $\beta = 10$:

Έστω το $1051 - 38$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 10 του 38: $10^4 - 38 = 9962$
- $1051 + 9962 = 11013$
- Το $1051 > 38$ (στο προηγούμενο βήμα προέκυψε κρατούμενο) οπότε αγνοώ το τελικό κρατούμενο, δηλαδή εκτελώ: $11013 - 10^4 = 1013$ που είναι και το τελικό αποτέλεσμα

Αφαίρεση με Συμπλήρωμα ως προς β

Παραδείγματα με $\beta = 2$:

Έστω το $10110 - 1100$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 2 του 1100: $2^5 - 1100 = 100$
- $10110 + 100 = 11010$
- Το $10110 > 1100$ (στο προηγούμενο βήμα προέκυψε κρατούμενο) οπότε αγνοώ το τελικό κρατούμενο, δηλαδή εκτελώ: $11010 - 2^5 = 1010$ που είναι και το τελικό αποτέλεσμα

Αφαίρεση με Συμπλήρωμα ως προς β

Παραδείγματα με $\beta = 10$:

Έστω το $38 - 1051$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 10 του 1051: $10^4 - 1051 = 8949$
- $38 + 8949 = 8987$
- Το $38 < 1051$ (στο προηγούμενο βήμα δεν προέκυψε κρατούμενο), οπότε το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως: $-(10^4 - 8987) = -1013$ που είναι και το τελικό αποτέλεσμα

Αφαίρεση με Συμπλήρωμα ως προς β

Παραδείγματα με $\beta = 2$:

Έστω το $1100 - 10110$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 2 του 10110: $2^5 - 10110 = 1010$
- $1100 + 1010 = 10110$
- Το $1100 < 10110$ (στο προηγούμενο βήμα δεν προέκυψε κρατούμενο), οπότε το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως: $-(2^5 - 10110) = -1010$ που είναι και το τελικό αποτέλεσμα

Αφαίρεση με Συμπληρώμα ως προς $\beta - 1$

Παραδείγματα με $\beta = 2$ και συμπληρώμα ως προς 1:

Έστω το $10110 - 1100$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 1 του 1100: $2^5 - 1 - 1100 = 11$
- $10110 + 11 = 11010$
- $11001 + 1 = 11010$ (κυκλική επαναφορά κρατουμένου πρόσθεσης)
- Το $10110 > 1100$ (στο προηγούμενο βήμα προέκυψε κρατούμενο) οπότε αγνοώ το τελικό κρατούμενο, δηλαδή εκτελώ: $11010 - 2^5 = 1010$ που είναι και το τελικό αποτέλεσμα

Αφαίρεση με Συμπληρώμα ως προς $\beta - 1$

Παραδείγματα με $\beta = 2$ και συμπληρώμα ως προς 1:

Έστω το $1100 - 10110$, τότε:

- Συμπλήρωμα ως προς 1 του 10110: $2^5 - 1 - 10110 = 1001$
- $1100 + 1001 = 10101$
- Το $1100 < 10110$ (στο προηγούμενο βήμα δεν προέκυψε κρατούμενο), οπότε το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ως: $-(2^5 - 1 - 10101) = -1010$ που είναι και το τελικό αποτέλεσμα

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Η απεικόνιση αρνητικών αριθμών στα ψηφιακά συστήματα επιτυγχάνεται με κατάλληλο συμβολισμό (πχ για 8 bits):

- Προσημασμένο μέτρο:
  $(00001111)_2 = (+15)_{10}$
  $(10001111)_2 = (-15)_{10}$
- Προσημασμένο συμπλήρωμα ως προς 1:
  $(00001111)_2 = (+15)_{10}$
  $(11110000)_2 = (-15)_{10}$
- Προσημασμένο συμπλήρωμα ως προς 2:
  $(00001111)_2 = (+15)_{10}$
  $(11110001)_2 = (-15)_{10}$

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Αναπαράσταση προσημασμένων 10-δικών αριθμών σε 2-δικό

10αδικός	Π.Μ.	1–Σ	2–Σ
+3	011	011	011
+2	010	010	010
+1	001	001	001
+0	000	000	000
-0	100	111	–
-1	101	110	111
-2	110	101	110
-3	111	100	101
-4	–	–	100

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Με την απεικόνιση προσημασμένου μέτρου ελέγχω τα πρόσημα των αριθμών κι εκτελώ ανάλογα πρόσθεση ή αφαίρεση. Οι Η/Υ, όμως, χρησιμοποιούν απεικόνιση προσημασμένου συμπληρώματος κι ιδίως του συμπληρώματος ως προς 2. Η πρόσθεση:

- Προσθέτω τους προσημασμένους 2-δικούς αριθμούς συμπεριλαμβανομένων και των bits των προσήμων τους
- Στην περίπτωση που το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο 2-δικών αριθμών των i bits καταλαμβάνει $i + 1$ bits, λέμε ότι έχουμε *υπερχείλιση*
- Η *υπερχείλιση* αποτελεί πρόβλημα γιατί ο αριθμός των bits που είναι προορισμένα να απεικονίζουν έναν αριθμό είναι πεπερασμένος
- Εάν προκύψει κρατούμενο από τα bits προσήμου αγνοείται

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Πρόσθεση:

$$\begin{array}{rr} & 01011 \\ + & 00011 \\ \hline & 01110 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 01011 \\ + & 11101 \\ \hline & 101000 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 10110 \\ + & 10001 \\ \hline & 100111 \end{array}$$

$(+11) + (+3) = +14$

$(+11) + (-3) = +8$

$(-10) + (-15) \neq +7$

υπερχείλιση

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Η αφαίρεση:

- Υπολογίζω το συμπλήρωμα ως προς 2 του αφαιρετέου συμπεριλαμβανομένου και του bit προσήμου
- Προσθέτω το παραπάνω αποτέλεσμα στο μειωτέο συμπεριλαμβανομένων και των bits των προσήμων
- Εξασφαλίζω ότι δε θα υπάρξει *υπερχείλιση* για να μην υπάρξει πρόβλημα από το αποτέλεσμα της πρόσθεσης
- Εάν προκύψει κρατούμενο από τα bits προσήμου αγνοείται

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Συνοπτικά:

- $(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B_{2-\Sigma})$
- $(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B_{2-\Sigma})$

Απεικόνιση Προσημασμένου Συμπληρώματος

Το ίδιο κύκλωμα υλικού μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για την πρόσθεση όσο και για την αφαίρεση!

Προσημασμένοι 2-δικοί Αριθμοί

Αφαίρεση:

$$\begin{array}{rr} & 00111 \\ - & 11101 \\ \hline & 100100 \end{array}$$

$$(+7) - (+3) = +4$$

$$\begin{array}{rr} & 00111 \\ - & 00011 \\ \hline & 01010 \end{array}$$

$$(+7) - (-3) = +10$$

Δυαδικοί Κώδικες

- 2-δικά σήματα $\leftrightarrow$ 2-δικά ηλεκτρονικά κυκλώματα $\leftrightarrow$ 2-δικά ψηφία
- Έχοντας ν bits διαθέσιμα αναπαριστώ 2^{ν} διακριτά στοιχεία πληροφορίας
- Ακριβής 2-δική αναπαράσταση vs 2-δική κωδικοποίηση
- Οι 2-δικοί κώδικες χρησιμοποιούνται για να αναπαριστούμε διακριτή πληροφορία
- Για παράδειγμα, οι 10-δικοί αριθμοί $\{0, 1, \ldots, 9\}$ κωδικοποιούνται με τη βοήθεια 4 bits

Κώδικας BCD

Κώδικας Binary Coded Decimal (BCD)

- Πχ στο BCD:
  το $(0111)_{\mathrm{BCD}} = (7)_{10}$
  μιας και
  $1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 7$
- Πχ στο $84-2-1$:
  το $(0111)_{84-2-1} = (1)_{10}$
  μιας και
  $1 \times 4 + 1 \times (-2) + 1 \times (-1) = 1$

Δεκαδικό ψηφίο	BCD (8 4 2 1)	(8 4 -2 -1)
0	0000	0000
1	0001	0111
2	0010	0110
3	0011	0101
4	0100	0100
5	0101	1011
6	0110	1010
7	0111	1001
8	1000	1000
9	1001	1111

Κώδικας Gray

4-bit Κώδικας Gray

- Οι διαδοχικοί αριθμοί στον κώδικα διαφέρουν μόνο κατά ένα bit
- Μεταφορά δεδομένων ⇒ Πιθανότητα σφάλματος. Με τον κώδικας Gray ελαχιστοποιείται η επίδραση σφάλματος
- Τυπικές εφαρμογές: A/D μετατροπή και διαμόρφωση

Κώδικας Gray με 4 bit

Τιμή στο Δεκαδικό	Απλή Αντιστοίχιση	Κώδικας Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Άλλοι Δυαδικοί Κώδικες

- Για αναπαράσταση αριθμών
- Για αναπαράσταση γραμμάτων (κεφαλαίων, πεζών κτλ)
- Για αναπαράσταση ειδικών χαρακτήρων (*,% κτλ)
- Για αναπαράσταση συμβόλων εκτύπωσης
- Για αναπαράσταση συμβόλων ελέγχου

Άλλοι Δυαδικοί Κώδικες

Παραδείγματα:

- 7-bit ASCII
- 8-bit Extended ASCII
- 7-bit EBCDIC
- ISO 8859-1 (Latin-1), 8859-7 (Ελληνικά-1)
- Unicode, UTF-8, UTF-16, UTF-32

Κώδικας Extended ASCII

Dec	Hex	Name	Char	Ctrl-char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
0	0	Null	NUL	CTRL-@	32	20	Space	64	40	@	96	60	`
1	1	Start of heading	SOH	CTRL-A	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	2	Start of text	STX	CTRL-B	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	3	End of text	ETX	CTRL-C	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	4	End of xmit	EOT	CTRL-D	36	24	$	68	44	D	100	64	d
5	5	Enquiry	ENQ	CTRL-E	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	Acknowledge	ACK	CTRL-F	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	Bell	BEL	CTRL-G	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	8	Backspace	BS	CTRL-H	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	9	Horizontal tab	HT	CTRL-I	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	Line feed	LF	CTRL-J	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	Vertical tab	VT	CTRL-K	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	Form feed	FF	CTRL-L	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	Carriage feed	CR	CTRL-M	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	Shift out	SO	CTRL-N	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	Shift in	SI	CTRL-O	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	Data line escape	DLE	CTRL-P	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	Device control 1	DC1	CTRL-Q	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	Device control 2	DC2	CTRL-R	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	Device control 3	DC3	CTRL-S	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	Device control 4	DC4	CTRL-T	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	Neg acknowledge	NAK	CTRL-U	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	Synchronous idle	SYN	CTRL-V	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	End of xmit block	ETB	CTRL-W	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	Cancel	CAN	CTRL-X	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	End of medium	EM	CTRL-Y	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	Substitute	SUB	CTRL-Z	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	Escape	ESC	CTRL-[	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	File separator	FS	CTRL-\	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	|
29	1D	Group separator	GS	CTRL-]	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	Record separator	RS	CTRL-^	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	Unit separator	US	CTRL-_	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	DEL

Κώδικας Extended ASCII

Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
128	80	Ç	160	A0	á	192	C0	└	224	E0	α
129	81	ü	161	A1	í	193	C1	┴	225	E1	ß
130	82	é	162	A2	ó	194	C2	┬	226	E2	Γ
131	83	â	163	A3	ú	195	C3	├	227	E3	π
132	84	ä	164	A4	ñ	196	C4	─	228	E4	Σ
133	85	à	165	A5	Ñ	197	C5	┼	229	E5	σ
134	86	å	166	A6	ª	198	C6	╞	230	E6	µ
135	87	ç	167	A7	º	199	C7	╟	231	E7	τ
136	88	ê	168	A8	¿	200	C8	╚	232	E8	Φ
137	89	ë	169	A9	⌐	201	C9	╔	233	E9	Θ
138	8A	è	170	AA	¬	202	CA	╩	234	EA	Ω
139	8B	ï	171	AB	½	203	CB	╦	235	EB	δ
140	8C	î	172	AC	¼	204	CC	╠	236	EC	∞
141	8D	ì	173	AD	¡	205	CD	═	237	ED	φ
142	8E	Ä	174	AE	«	206	CE	╬	238	EE	ε
143	8F	Å	175	AF	»	207	CF	╧	239	EF	∩
144	90	É	176	B0	░	208	D0	╨	240	F0	≡
145	91	æ	177	B1	▒	209	D1	╤	241	F1	±
146	92	Æ	178	B2	▓	210	D2	╥	242	F2	≥
147	93	ô	179	B3	│	211	D3	╙	243	F3	≤
148	94	ö	180	B4	┤	212	D4	Ö	244	F4	⌠
149	95	ò	181	B5	╡	213	D5	╒	245	F5	⌡
150	96	û	182	B6	╢	214	D6	╓	246	F6	÷
151	97	ù	183	B7	╖	215	D7	╫	247	F7	≈
152	98	ÿ	184	B8	╕	216	D8	╪	248	F8	°
153	99	Ö	185	B9	╣	217	D9	┘	249	F9	∙
154	9A	Ü	186	BA	║	218	DA	┌	250	FA	·
155	9B	¢	187	BB	╗	219	DB	█	251	FB	√
156	9C	£	188	BC	╝	220	DC	▄	252	FC	ⁿ
157	9D	¥	189	BD	╜	221	DD	▌	253	FD	²
158	9E	₧	190	BE	╛	222	DE	▐	254	FE	■
159	9F	ƒ	191	BF	┐	223	DF	▀	255	FF	

Κώδικες Ανίχνευσης Σφαλμάτων

Κώδικας ελέγχου ισοτιμίας

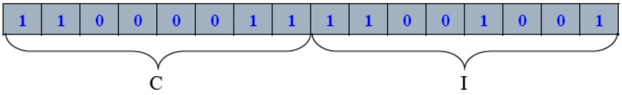
- Αριστερά της κωδικής λέξης εισάγεται ένα επιπλέον bit
- Περιττή ή άρτια ισοτιμία:
    - Περιττό πλήθος από 1 στη λέξη
    - Άρτιο πλήθος από 1 στη λέξη

	7 bit πληροφορίας	Με άρτια ισοτιμία (8 bit)	Με περιττή ισοτιμία (8 bit)
ASCII A	1 0 0 0 0 0 1	0 1 0 0 0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 0 1
ASCII T	1 0 1 0 1 0 0	1 1 0 1 0 1 0 0	0 1 0 1 0 1 0 0

Αποθήκευση Δυαδικής Πληροφορίας

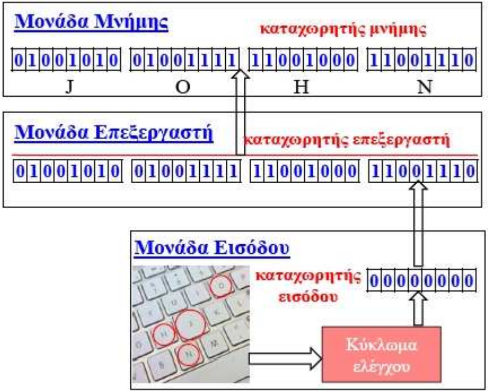
- Ένα 2-δικό κύτταρο είναι μια διάταξη με δύο σταθερές καταστάσεις κι έτσι είναι ικανή να αποθηκεύσει ένα bit πληροφορίας
- Καταχωρητής: ομάδα ν 2-δικών κυττάρων
- Το περιεχόμενο ενός καταχωρητή εξαρτάται από το τι αναπαριστά η λέξη που περιέχει, δηλαδή το εάν είναι κωδικοποιημένη και με ποιο κώδικα

16-bit καταχωρητής



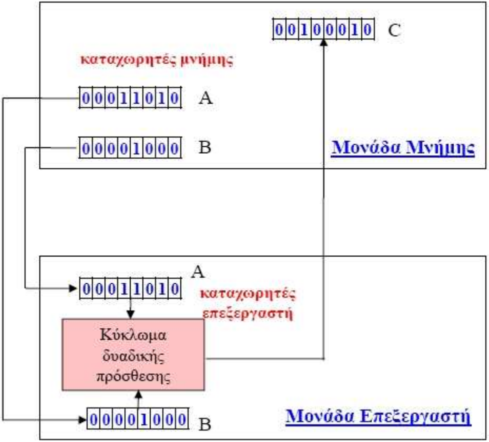
Μεταφορά Δεδομένων

Μεταφορά περιεχομένων καταχωρητών



Επεξεργασία Δεδομένων

Επεξεργασία 2-δικής πληροφορίας



Δυαδική Λογική

- Στη 2-δική λογική οι μεταβλητές παίρνουν δυο διακριτές τιμές (πχ. 0 και 1, αλήθεια και ψέμα κτλ)
- Περιγράφεται θεωρητικά από την άλγεβρα Boole και χρησιμοποιείται για τη μαθηματική περιγραφή της επεξεργασίας 2-δικών πληροφοριών
- Υπάρχουν τρεις λογικές πράξεις:
  - Πράξη ΚΑΙ (AND) με σύμβολο $\cdot$ (λογικός πολ/σμός)
  - Πράξη Ή (OR) με σύμβολο $+$ (λογική πρόσθεση)
  - Πράξη ΌΧΙ (NOT) με σύμβολο $\overline{x}$ εάν x η 2-δική μεταβλητή
- Απαιτείται προσοχή στη χρήση των συμβόλων μιας και αυτά χρησιμοποιούνται και στην κλασική άλγεβρα

Λογικές Πράξεις

Έστω οι 2-δικές μεταβλητές $x, y = \{0, 1\}$.
Αν z το αποτέλεσμα λογικών πράξεων των x, y, τότε:

- Πράξη ΚΑΙ: $z = x \cdot y$
- Πράξη Ή: $z = x + y$
- Πράξη ΌΧΙ: $z = \overline{x}$

Αναπαριστώντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των x, y καθώς και του z, προκύπτουν οι πίνακες αληθείας των παραπάνω συναρτήσεων:

AND

x	y	$z = x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

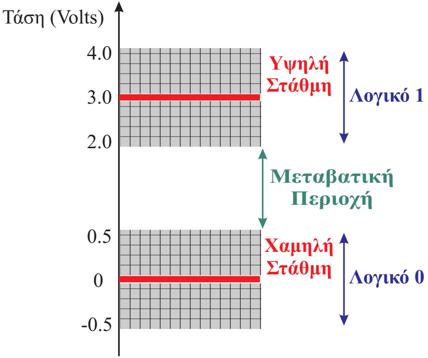
OR

x	y	$z = x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

x	$z = \overline{x}$
0	1
1	0

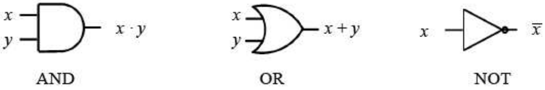
Λογικές Πύλες



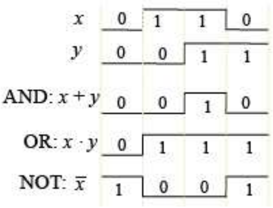
- Οι λογικές πύλες είναι ηλεκτρονικά κυκλώματα που υλοποιούν λογικές πράξεις
- Οι είσοδοι κι οι έξοδοί τους παίρνουν μόνο δύο τιμές τάσης (H και L)
- Ο ακροδέκτης εισόδου ή εξόδου βρίσκεται στη μεταβατική περιοχή μόνο κατά τη μετάβαση ανάμεσα στις δύο επιτρεπόμενες περιοχές

Λογικές Πύλες

Τα σχηματικά διαγράμματα των παραπάνω λογικών πυλών είναι τα ακόλουθα:

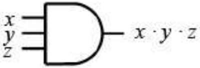


Τα σήματα εισόδου εξόδου θα είναι:

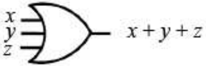


Λογικές Πύλες

Τα σχηματικά διαγράμματα λογικών πυλών τριών εισόδων θα είναι αντίστοιχα τα ακόλουθα:



AND



OR

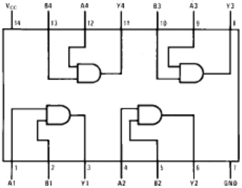
Οι δε πίνακες αληθείας:

			AND	OR
x	y	z	$x \cdot y \cdot z$	$x + y + z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Ολοκληρωμένα Κυκλώματα

Χαρακτηριστικά ολοκληρωμένου DM74LS08:

Connection Diagram



Function Table

$Y = AB$

Inputs		Output
A	B	Y
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

H = HIGH Logic Level
L = LOW Logic Level

Absolute Maximum Ratings (Note 1)

Supply Voltage	7V
Input Voltage	7V
Operating Free Air Temperature Range	0°C to +70°C
Storage Temperature Range	−65°C to +150°C

Recommended Operating Conditions

Symbol	Parameter	Min	Nom	Max	Units
V_{CC}	Supply Voltage	4.75	5	5.25	V
V_{IH}	HIGH Level Input Voltage	2			V
V_{IL}	LOW Level Input Voltage			0.8	V
I_{OH}	HIGH Level Output Current			−0.4	mA
I_{OL}	LOW Level Output Current			8	mA
T_A	Free Air Operating Temperature	0		70	°C

Τέλος Δυαδικών Συστημάτων

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

Γεώργιος Χ. Αλεξανδρόπουλος

e-mail: alexandg@uop.gr
URL: http://users.iit.demokritos.gr/~alexandg

eclass: http://eclass.uop.gr/courses/TST289/