K03 - Λογική Σχεδίαση
Δεύτερο Εξάμηνο Φοίτησης

Απλοποίηση λογικών συναρτήσεων

Γεώργιος Χ. Αλεξανδρόπουλος
Λέκτορας Π.Δ. 407/80
e-mail: `alexandg@uop.gr`
URL: `http://users.iit.demokritos.gr/~alexandg`

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

- Κατά την *ελαχιστοποίηση σε επίπεδο πυλών* αναζητώ τη βέλτιστη υλοποίηση με πύλες των συναρτήσεων Boole
- Στην πράξη τα μεγάλα σύνολα εξισώσεων Boole ελαχιστοποιούνται αποτελεσματικά με τη χρήση υπολογιστών και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας *εργαλεία σύνθεσης λογικών κυκλωμάτων*
- Η σύνθεση βασίζεται στις μαθηματικές περιγραφές των κυκλωμάτων κι αποσκοπεί στην εύρεση μαθηματικών λύσεων στα προβλήματα ελαχιστοποίησης σε επίπεδο πυλών

Η μέθοδος του Χάρτη Karnaugh

- Πολύπλοκη αλγεβρική έκφραση συνάρτησης Boole → Πολύπλοκο ψηφιακό λογικό κύκλωμα
- Ενώ ο πίνακας αληθείας μιας συνάρτησης είναι μοναδικός, υπάρχουν πολλές διαφορετικές ισοδύναμες αλγεβρικές μορφές της συνάρτησης που περιγράφει, οι οποίες κι οδηγούν σε αυτόν
- Η μέθοδος του χάρτη Karnaugh αποτελεί μια απλή, εύκολη και συστηματική διαδικασία ελαχιστοποίησης των συναρτήσεων Boole
- Ο χάρτης Karnaugh είναι ένα γράφημα τετραγώνων, καθένα από τα οποία περιγράφει τους ελαχιστόρους m_j, $j = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$, μιας συνάρτησης Boole n μεταβλητών

Η μέθοδος του Χάρτη Karnaugh

- Στο χάρτη Karnaugh σημειώνονται με ένα 1 οι ελαχιστόροι που εμφανίζονται σε μια συνάρτηση και με ένα 0 όσοι δεν εμφανίζονται
- Ο χάρτης παρέχει, ουσιαστικά, μια οπτική απεικόνιση των ελαχιστόρων μιας συνάρτησης κι η μέθοδος του χάρτη βασίζεται στην αναγνώριση συγκεκριμένων διατάξεων ελαχιστόρων εντός του χάρτη
- Η απεικόνιση αυτή βοηθά στην εύρεση εναλλακτικών αλγεβρικών εκφράσεων μιας συνάρτησης, παρέχοντας τη δυνατότητα επιλογής της απλούστερης δυνατής

Η Μέθοδος του Χάρτη Karnaugh

Οι απλοποιημένες εκφράσεις που προκύπτουν με τη μέθοδο αυτή είναι εκφρασμένες σε μια εκ των πρότυπων μορφών!

Η μέθοδος του Χάρτη Karnaugh

Απλούστατη Αλγεβρική Έκφραση

Η έκφραση που περιέχει τον ελάχιστο αριθμό όρων και το μικρότερο αριθμό παραγόντων σε κάθε όρο →
Η έκφραση αυτή οδηγεί σε κυκλωματικό διάγραμμα με τον ελάχιστο αριθμό πυλών και τον ελάχιστο αριθμό εισόδων σε κάθε πύλη

Μοναδικότητα Απλούστατης Αλγεβρικής Έκφρασης

Η απλούστατη έκφραση δεν είναι απαραίτητα και μοναδική!

Χάρτης Karnaugh Δύο Μεταβλητών

Για $n = 2$ μεταβλητές υπάρχουν οι m_j με $j = 0, 1, 2, 3$

m_0	m_1
m_2	m_3

			y
	x \ y	0	1
	0	x′y′	x′y
x	1	xy′	xy

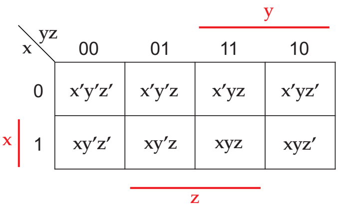
Παραδείγματα:

- Εκφράστε στο χάρτη τη $f(x, y) = xy$
- Εκφράστε στο χάρτη τη $f(x, y) = x + y'$
  $(f(x, y) = x(y + y') + y'(x + x') = xy + xy' + x'y')$

Χάρτης Karnaugh Τριών Μεταβλητών

Για $n = 3$ μεταβλητές υπάρχουν οι m_j με $j = 0, 1, \ldots, 7$

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

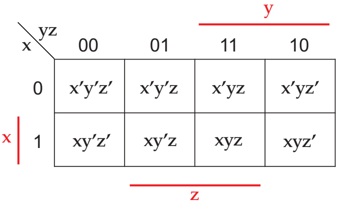


x \ yz	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

- Οι ελαχιστόροι διατάσσονται στο χάρτη κατά μια σειρά που ακολουθεί την αρίθμηση του κώδικα Gray
- Δύο γειτονικά τετράγωνα αντιστοιχούν σε ελαχιστόρους που διαφέρουν κατά μόνο μια μεταβλητή, η οποία στον ένα ελαχιστόρο είναι τονισμένη και στον άλλο όχι

Χάρτης Karnaugh Τριών Μεταβλητών

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

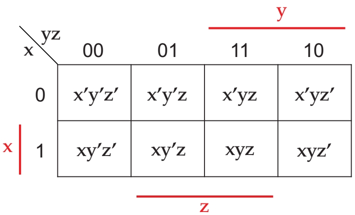


x \ yz	00	01	11	10
0	x′y′z′	x′y′z	x′yz	x′yz′
1	xy′z′	xy′z	xyz	xyz′

- Εάν αθροίσω δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη με 1, η μεταβλητή στην οποία διαφέρουν απαλείφεται
- Γειτονικά είναι τα τετράγωνα που προκύπτουν οριζοντίως, καθέτως κι ενώνοντας την αριστερή και δεξιά πλευρά του χάρτη

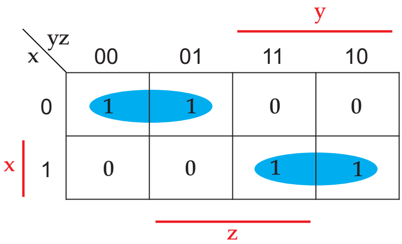
Απλοποίηση Συναρτήσεων Τριών Μεταβλητών

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6



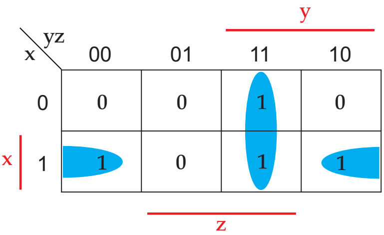
x \ yz	00	01	11	10
0	x′y′z′	x′y′z	x′yz	x′yz′
1	xy′z′	xy′z	xyz	xyz′

$$f_1(x,y,z) = \sum(0,1,6,7)$$



x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1

$$f_2(x,y,z) = \sum(3,4,6,7)$$



x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

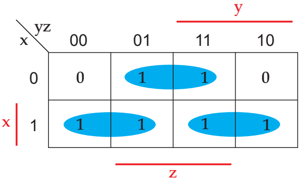
Χάρτης Karnaugh Τριών Μεταβλητών

Το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων που μπορούν να συνδυαστούν είναι πάντα δύναμη του 2

- Ένα τετράγωνο παριστάνει έναν ελαχιστόρο
- Δύο γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν έναν όρο με δύο παράγοντες
- Τέσσερα γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν έναν όρο με έναν παράγοντα
- Οκτώ γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν μια συνάρτηση που είναι πάντα ίση με 1

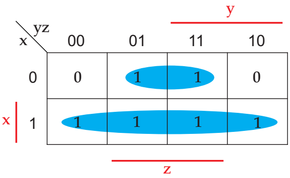
Απλοποίηση Συνάρτησης Τριών Μεταβλητών

$$f(x, y, z) = \sum(1, 3, 4, 5, 6, 7)$$



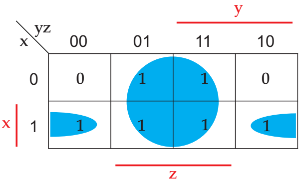
x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = x'z + xy' + xy$$



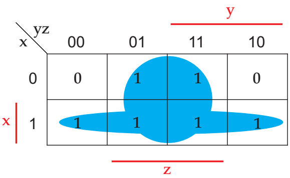
x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = x'z + x$$



x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = xz' + z$$



x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = x + z$$

Συμπλήρωση Χάρτη Karnaugh

Έστω λογική συνάρτηση που **δεν** εκφρασμένη σε άθροισμα ελαχιστόρων ή γινόμενο μεγιστόρων

Πώς συμπληρώνω το χάρτη Karnaugh για τη συνάρτηση αυτή;

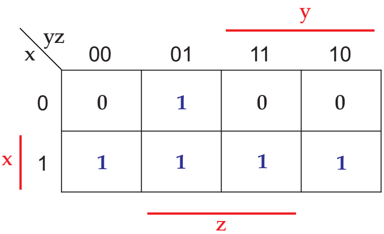
- Προσπαθώ να γράψω τη συνάρτηση στη μορφή αθροίσματος γινομένων των μεταβλητών εισόδου της ή/και των συμπληρωμάτων τους
- Βρίσκω, κατά τα γνωστά, τον πίνακα αληθείας της

Συμπλήρωση Χάρτη Karnaugh

Παράδειγμα:

Έστω λογική συνάρτηση $f(x,y,z) = xy + (x+z)y'$

- Κάνοντας τις πράξεις: $f(x,y,z) = xy + xy' + zy'$
- Συμπληρώνω κάθε όρο του αθροίσματος στο χάρτη
- Αφήνω ως έχουν ήδη συμπληρωμένα με 1 τετράγωνα και βάζω 0 στα κενά
- Τα τετράγωνα με 1 είναι οι ελαχιστόροι της συνάρτησης $f(x,y,z)$



x \ yz	00	01	11	10
0	0	**1**	0	0
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$$f(x,y,z) = \sum(1,4,5,6,7)$$

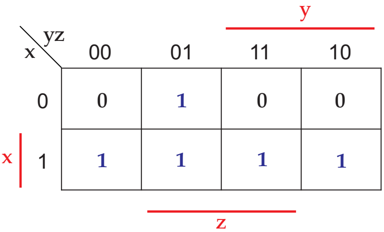
Συμπλήρωση Χάρτη Karnaugh

Για την προηγούμενη συνάρτηση
$f(x, y, z) = xy + (x + z)y'$

- Ο πίνακας αληθείας της συνάρτησης:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι
$f(x, y, z) = \sum(1, 4, 5, 6, 7)$



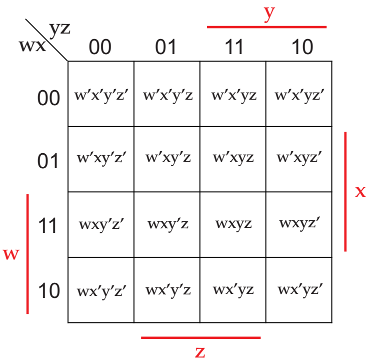
x \ yz	00	01	11	10
0	0	**1**	0	0
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$f(x, y, z) = \sum(1, 4, 5, 6, 7)$

Χάρτης Karnaugh Τεσσάρων Μεταβλητών

Για $n = 4$ μεταβλητές υπάρχουν οι m_j με $j = 0, 1, \ldots, 15$

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}



wx \ yz	00	01	11	10
00	w′x′y′z′	w′x′y′z	w′x′yz	w′x′yz′
01	w′xy′z′	w′xy′z	w′xyz	w′xyz′
11	wxy′z′	wxy′z	wxyz	wxyz′
10	wx′y′z′	wx′y′z	wx′yz	wx′yz′

- Επιπλέον, θεωρώ ότι η πάνω και κάτω πλευρά εφάπτονται, άρα τα τετράγωνά τους είναι γειτονικά

Χάρτης Karnaugh Τεσσάρων Μεταβλητών

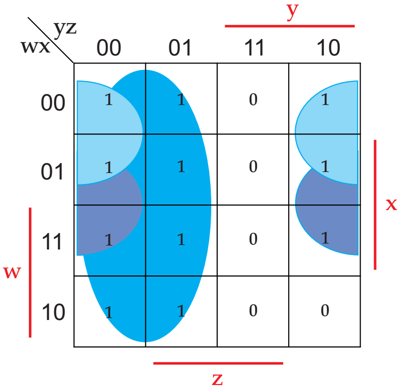
Το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων που μπορούν να συνδυαστούν είναι πάντα δύναμη του 2

- Ένα τετράγωνο παριστάνει έναν ελαχιστόρο τεσσάρων παραγόντων
- Δύο γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν έναν όρο με τρεις παράγοντες
- Τέσσερα γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν έναν όρο με δύο παράγοντες
- Οκτώ γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν έναν όρο με έναν παράγοντα
- Δέκα έξι γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν μια συνάρτηση που είναι πάντα ίση με 1

Απλοποίηση Συνάρτησης Τεσσάρων Μεταβλητών

Παράδειγμα:

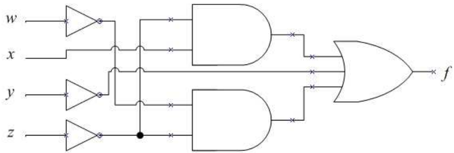
Έστω η λογική συνάρτηση $f(w,x,y,z) = \sum(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$



wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

$$f(x,y,z,w) = y' + w'z' + xz'$$

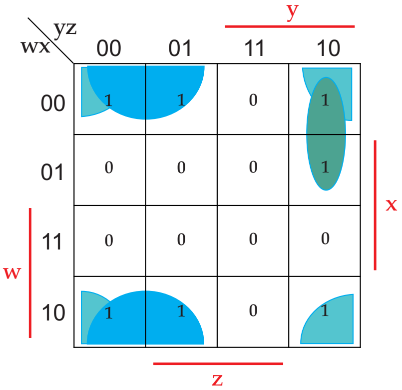
Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(w,x,y,z)$



Απλοποίηση Συνάρτησης Τεσσάρων Μεταβλητών

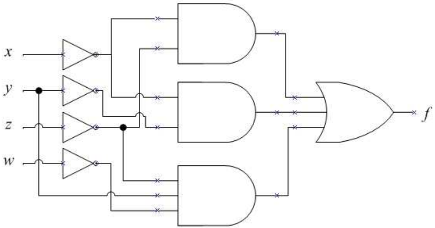
Παράδειγμα:

Να απλοποιηθεί η $f(w, x, y, z) = w'x'y' + x'yz' + w'xyz' + wx'y'$



wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

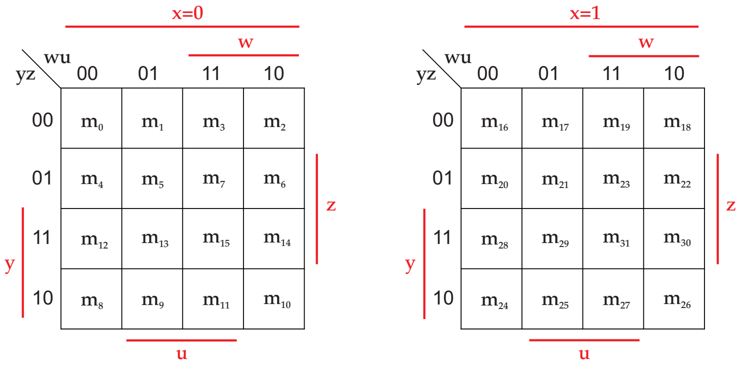
Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(w, x, y, z)$



$$f(w, x, y, z) = x'z' + x'y' + w'yz'$$

Χάρτης Karnaugh Πέντε Μεταβλητών

Για $n = 5$ μεταβλητές υπάρχουν οι m_j με $j = 0, 1, \ldots, 31$



yz \ wu	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

yz \ wu	00	01	11	10
00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

- Επιπλέον, θεωρώ ότι κάθε τετράγωνο του χάρτη με $x = 0$ γειτνιάζει με το αντίστοιχό του στο χάρτη με $x = 1$

Χάρτης Karnaugh n Μεταβλητών

Το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων που μπορούν να συνδυαστούν είναι πάντα δύναμη του 2

- Οποιαδήποτε 2^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, γειτονικά τετράγωνα παριστάνουν μια περιοχή που αντιστοιχεί σε έναν απλοποιημένο όρο με $n - k$ παράγοντες
- Για $n = k$, η απλοποιημένη συνάρτηση είναι πάντα ίση με 1

Πρωτεύοντες Όροι

Η διαδικασία συνδυασμού τετραγώνων στο χάρτη Karnaugh γίνεται με πιο συστηματικό τρόπο χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους δύο ειδικούς τύπους όρων:

- Ως *πρωτεύων όρος* χαρακτηρίζεται ο απλοποιημένος όρος γινομένου που παίρνω εάν συνδυάσω το μέγιστο πιθανό αριθμό γειτονικών τετραγώνων
- Ως *θεμελιώδης πρωτεύων όρος* χαρακτηρίζεται ο πρωτεύων όρος εκείνος που περιέχει ελαχιστόρο ο οποίος δεν καλύπτεται από άλλον πρωτεύοντα όρο

Απλοποίηση Συνάρτησης με Πρωτεύοντες Όρους

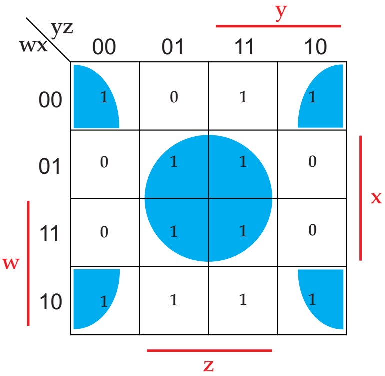
Χρησιμοποιώντας πρωτεύοντες όρους επιτυγχάνεται, ελαχιστοποίηση του κόστους υλοποίησης μιας συνάρτησης

Πώς, όμως, βρίσκω τους πρωτεύοντες όρους μιας συνάρτησης;

Πρωτεύοντες Όροι

Παράδειγμα:

Έστω η $f(w, x, y, z) = \sum(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$



Θεμελιώδεις Πρωτεύοντες Όροι:

- $x'z'$: μοναδικός τρόπος συμπερίληψης του m_0
- xz: μοναδικός τρόπος συμπερίληψης του m_5

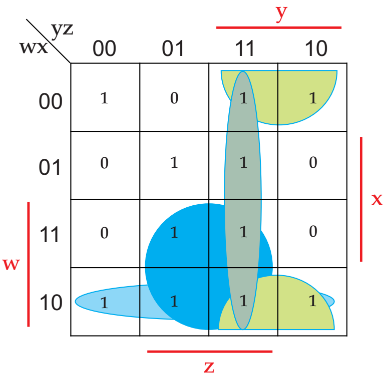
Πρωτεύοντες Όροι

Για την $f(w,x,y,z) = \sum(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$:

Εναπομείναντες Ελαχιστόροι:

- Ο m_3 καλύπτεται από yz ή $x'y$
- Ο m_9 καλύπτεται από wz ή wx'
- Ο m_{11} καλύπτεται από όλους του τέσσερεις πρωτεύοντες όρους

$$\begin{aligned} f(w,x,y,z) =& xz + x'z' + yz + wz \\ =& xz + x'z' + yz + wx' \\ =& xz + x'z' + x'y + wz \\ =& xz + x'z' + x'y + wx' \end{aligned}$$



wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Πρωτεύοντες Όροι

Απλοποίηση Συνάρτησης με Πρωτεύοντες Όρους

Επιλέγω όλους τους θεμελιώδεις πρωτεύοντες όρους και κατόπιν καλύπτω τους εναπομείναντες ελαχιστόρους με το μικρότερο δυνατό αριθμό από πρωτεύοντες όρους

Η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης με πολλές μεταβλητές επιτυγχάνεται με τη *μέθοδο κατάταξης σε πίνακα (μέθοδος Quine-McCluskey)*, η οποία παρέχει μια συστηματική κι αυτοποιημένη μεθοδολογία κατάλληλη για υλοποίηση σε υπολογιστή

Βήμα 1: Προσδιορισμός των πρωτευόντων όρων της συνάρτησης

Βήμα 2: Επιλογή εκείνων των πρωτευόντων όρων που δίνουν μια έκφραση με τον ελάχιστο αριθμό παραγόντων

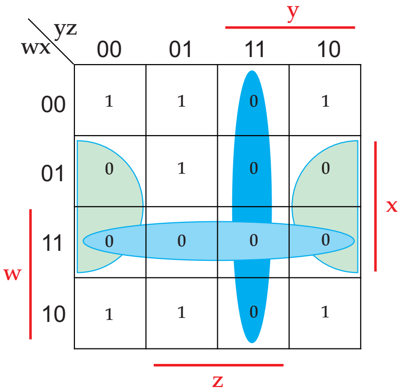
Απλοποίηση Γινομένου Αθροισμάτων

- Ελαχιστοποίηση με τη μέθοδο του χάρτη Karnaugh → Εκφράσεις σε μορφές αθροισμάτων γινομένων
  Με ποιό τρόπο μπορώ να πάρω σε μορφή γινομένων αθροισμάτων;
- Εάν συνδυάσω τα γειτονικά 0 στο χάρτη Karnaugh, παίρνω απλοιημένες εκφράσεις του συμπληρώματος της συνάρτησης που αναπαριστάται στο χάρτη
- Συμπληρώνω το προκύπτον συμπλήρωμα με βάση το γενικευμένο θεώρημα DeMorgan και καταλήγω αυτόματα στη ζητούμενη μορφή γινομένου αθροισμάτων

Παράδειγμα Απλοποίησης Γινομένου Αθροισμάτων

Παράδειγμα:

Να απλοποιηθεί η $f(w,x,y,z) = \sum(0,1,2,5,8,9,10)$



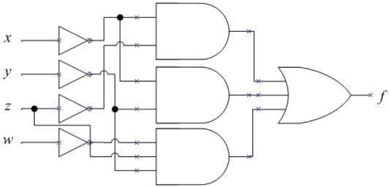
wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

- Άθροισμα γινομένων
  $f(w,x,y,z) = x'z' + x'y' + w'y'z$
- Γινόμενο αθροισμάτων
  $f'(w,x,y,z) = wx + yz + xz'$
  $\downarrow$
  $f(w,x,y,z) =$
  $(w' + x')(y' + z')(x' + z)$

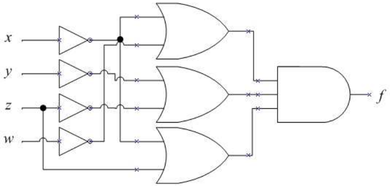
Υλοποιήσεις Δύο επιπέδων

Συνάρτηση σε μια εκ των πρότυπων μορφών → Υλοποίηση δύο επιπέδων

Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(w,x,y,z) = x'z' + x'y' + w'y'z$



Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(w,x,y,z) = (w' + x')(y' + z')(x' + z)$



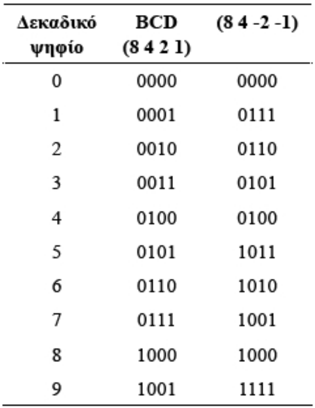
Συνθήκες Αδιαφορίας

- Σε πρακτικές εφαρμογές οι συναρτήσεις ενδέχεται να μην προσδιορίζονται για συγκεκριμένους συνδυασμούς τιμών των μεταβλητών εισόδων τους, πχ κώδικας BCD
  → Ατελώς Καθορισμένες Συναρτήσεις
- Οι απροσδιόριστοι ελαχιστόροι μιας συνάρτησης ονομάζονται συνθήκες αδιαφορίας και χρησιμοποιώ το σύμβολο X για να τους συμβολίσω στο χάρτη Karnaugh
- Κατά την απλοποίηση οι συνθήκες αδιαφορίας χρησιμοποιούνται είτε στα 0 είτε στα 1 του χάρτη, αποσκοπώντας στην απλούστερη δυνατή έκφραση

Το Παράδειγμα του Κώδικα BCD

Κώδικας Binary Coded Decimal (BCD)

- Πχ στο BCD:
  το $(0111)_{\mathrm{BCD}} = (7)_{10}$
  μιας και
  $1\,\mathrm{x}\,4 + 1\,\mathrm{x}\,2 + 1\,\mathrm{x}\,1 = 7$
- Πχ στο $84 - 2 - 1$:
  το $(0111)_{84-2-1} = (1)_{10}$
  μιας και
  $1\,\mathrm{x}\,4 + 1\,\mathrm{x}\,(-2) + 1\,\mathrm{x}\,(-1) = 1$

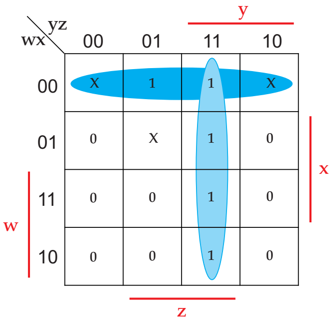


Δεκαδικό ψηφίο	**BCD (8 4 2 1)**	**(8 4 -2 -1)**
0	0000	0000
1	0001	0111
2	0010	0110
3	0011	0101
4	0100	0100
5	0101	1011
6	0110	1010
7	0111	1001
8	1000	1000
9	1001	1111

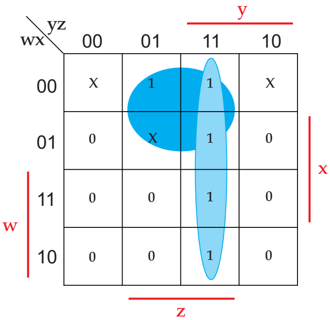
Συνθήκες Αδιαφορίας

Παράδειγμα:

Να απλοποιηθεί η $f(w,x,y,z) = \sum(1,3,7,11,15)$ με συνθήκες αδιαφορίας $d(w,x,y,z) = \sum(0,2,5)$



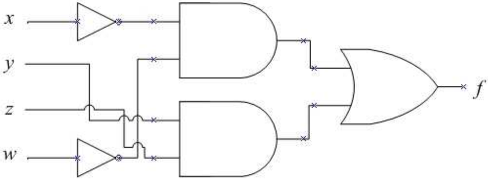
wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0



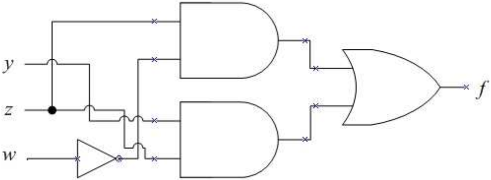
wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

Συνθήκες Αδιαφορίας

Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(w,x,y,z) = yz + w'x'$



Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(w,x,y,z) = yz + w'z$

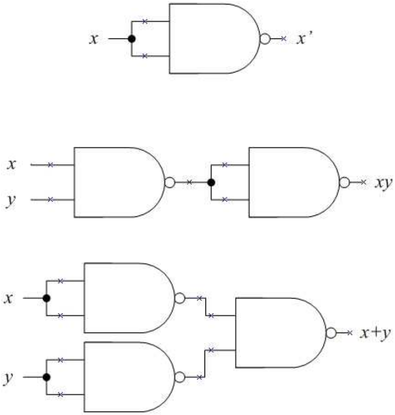


Υλοποίηση με Πύλες NAND και NOR

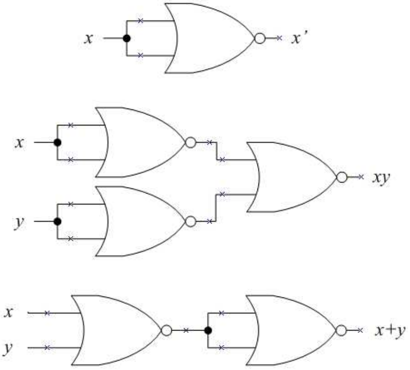
- Οι πύλες NAND και NOR κατασκευάζονται ευκολότερα με ηλεκτρονικά στοιχεία κι αποτελούν τις βασικές πύλες όλων των οικογενειών ψηφιακών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων → Οικουμενικές Πύλες
- Τα ψηφιακά ολοκλωρωμένα κυκλώματα κατασκευάζονται συχνά με πύλες NAND ή/και NOR
- Οι υπόλοιπες πύλες υλοποιούνται με τη βοήθεια των πυλών NAND ή/και NOR

Υλοποίηση Βασικών Πυλών με NAND και NOR

με NAND



με NOR



Υλοποίηση Δύο Επιπέδων με Πύλες NAND

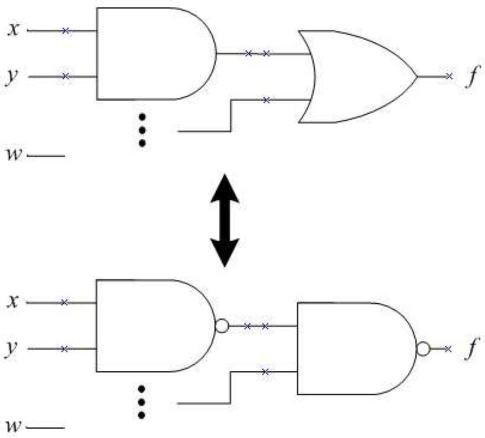
Βήμα 1: Απλοποιώ τη συνάρτηση και την εκφράζω σε μορφή αθροίσματος γινομένων

Βήμα 2: Για κάθε όρο γινομένου της έκφρασης με τουλάχιστον δύο παράγοντες χρησιμοποιώ μια πύλη NAND με εισόδους τους παράγοντες του όρου (*πρώτο επίπεδο πυλών*)

Βήμα 3: Στο *δεύτερο επίπεδο πυλών* χρησιμοποιώ μια πύλη NAND με εισόδους τις εξόδους του πρώτου επιπέδου

Βήμα 4: Για τους όρους με ένα μόνο παράγοντα χρησιμοποιώ, επίσης, καταλλήλως πύλες NAND

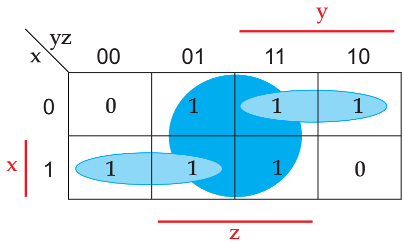
Υλοποίηση Αθροίσματος Γινομένων με Πύλες NAND



Υλοποίηση Δύο Επιπέδων με Πύλες NAND

Παράδειγμα:

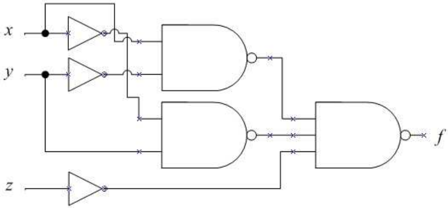
Έστω η λογική συνάρτηση $f(x, y, z) = \sum(1, 2, 3, 4, 5, 7)$



x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	1	0

$$f(x, y, z) = xy' + x'y + z$$

Λογικό κύκλωμα υλοποίησης της $f(x, y, z)$



Υλοποίηση Δύο Επιπέδων με Πύλες NOR

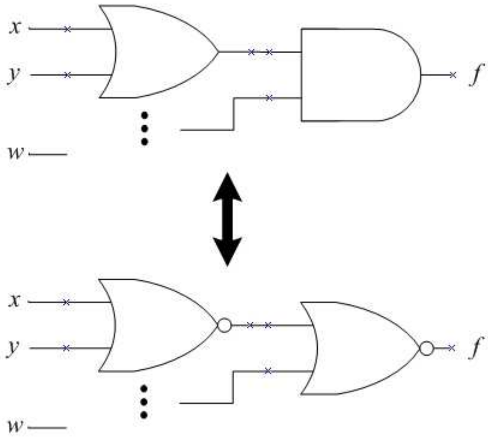
Βήμα 1: Απλοποιώ τη συνάρτηση και την εκφράζω σε μορφή γινομένου αθροισμάτων

Βήμα 2: Για κάθε παράγοντα αθροίσματος της έκφρασης με τουλάχιστον δύο όρους χρησιμοποιώ μια πύλη NOR με εισόδους τους όρους του γινομένου (*πρώτο επίπεδο πυλών*)

Βήμα 3: Στο *δεύτερο επίπεδο πυλών* χρησιμοποιώ μια πύλη NOR με εισόδους τις εξόδους του πρώτου επιπέδου

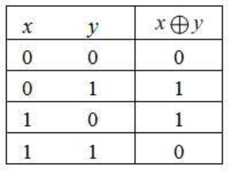
Βήμα 4: Για τους όρους με ένα μόνο παράγοντα χρησιμοποιώ, επίσης, καταλλήλως πύλες NOR

Υλοποίηση Γινομένου Αθροισμάτων με Πύλες NOR

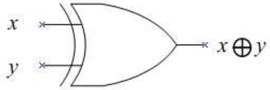


Η Συνάρτηση XOR

Η συνάρτηση XOR ορίζεται ως: $x \oplus y = xy' + x'y$
Το συμπλήρωμά της είναι η συνάρτηση XNOR: $(x \oplus y)' = xy + x'y'$



x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



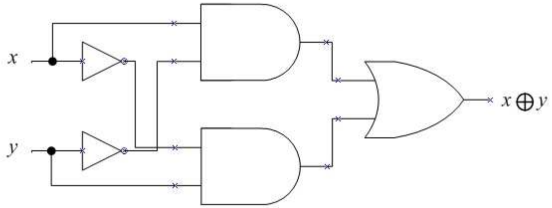
Ταυτότητες:

- $x \oplus 0 = x$
- $x \oplus 1 = x'$
- $x \oplus x = 0$

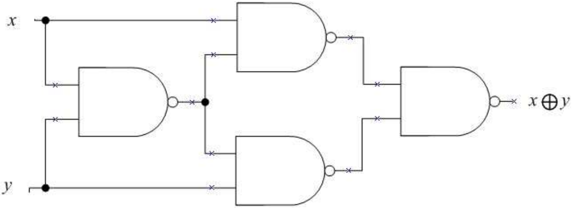
- $x \oplus 0 = x$
- $x \oplus y = y \oplus x$
- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z$
- $x \oplus y' = x' \oplus y = (x \oplus y)'$

Υλοποιήσεις Συνάρτησης XOR

Με AND-OR-NOT



Με NAND



Η Συνάρτηση XOR

Βασική Ιδιότητα Συνάρτησης XOR

Η συνάρτηση XOR n μεταβλητών είναι μια περιττή συνάρτηση που ορίζεται ως το λογικό άθροισμα εκείνων των $2^n/2$ ελαχιστόρων, των οποίων οι 2-δικές αριθμητικές τιμές έχουν περιττό αριθμό άσσων

Συνεπώς, το συμπλήρωμά της είναι μια άρτια συνάρτηση

Παραδείγματα:

$x \oplus y \oplus z = (xy' + x'y)z' + (xy + x'y')z = \sum(1, 2, 4, 7)$

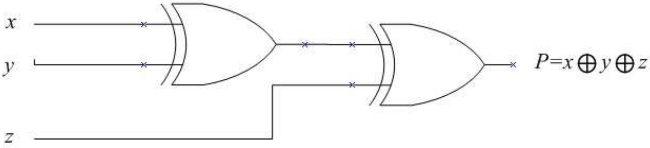
$(x \oplus y \oplus z)' = \sum(0, 3, 5, 6)$

Κώδικες Εντοπισμού και Διόρθωσης Σφαλμάτων

- Οι συναρτήσεις XOR χρησιμοποιούνται σε συστήματα που απαιτούνται κώδικες εντοπισμού και διόρθωσης σφαλμάτων
- Bit ισοτιμίας: το επιπλέον bit που συμπεριλαμβάνεται στο μήνυμα της πληροφορίας με σκοπό να καταστήσει το αριθμό των άσσων σε αυτό είτε περιττό είτε άρτιο
- Εάν τα bit ισοτιμίας πομπού και δέκτη διαφέρουν, ο δέκτης εντοπίζει το λάθος στη μετάδοση της πληροφορίας
- Με τον τρόπο αυτό εντοπίζεται περιττό πλήθος σφαλμάτων σε bit

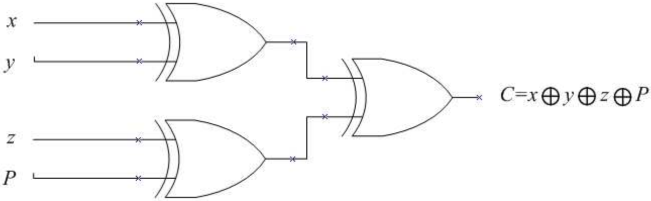
3-bit Γεννήτρια Άρτιας Ισοτιμίας

Το παραχθέν bit ισοτιμίας P συμπεριλαμβάνεται στα bits του μηνύματος καθιστώντας το συνολικό πλήθος των άσσων άρτιο



3-bit Ελεγκτής Άρτιας Ισοτιμίας

Τα bits πληροφορίας κι ισοτιμίας εφαρμόζονται στο δέκτη στο κύκλωμα ελέγχου άρτιας ισοτιμίας, το οποίο εξάγει 1 στην περίπτωση σφάλματος, δηλαδή για περιττό πλήθος άσσων



Τέλος Θεματικής Ενότητας

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

Γεώργιος Χ. Αλεξανδρόπουλος

e-mail: `alexandg@uop.gr`
URL: `http://users.iit.demokritos.gr/~alexandg`

eclass: `http://eclass.uop.gr/courses/TST289/`