Κεφάλαιο 4 Διανυσματικοί Χώροι

4.1 Διανυσματικοί χώροι - Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες.

Ένας **Διανυσματικός Χώρος** V (δ.χ.) είναι ένα σύνολο από μαθηματικά αντικείμενα (αριθμούς, διανύσματα, πίνακες, πολυώνυμα κ.λ.π.) τα οποία ονομάζουμε γενικά «διανύσματα» στο οποίο έχουμε ορίσει δύο πράξεις. Μία εσωτερική πράξη μεταξύ των στοιχείων του δ.χ. την οποία θα ονομάζουμε γενικά «**πρόσθεση**».:

$$(+) : V \times V \to V$$

Και μία εξωτερική πράξη πραγματικών αριθμών με στοιχεία του δ.χ. την οποία θα ονομάζουμε γενικά «**βαθμωτό πολλαπλασιασμό**».:

$$(\cdot) : \mathbb{R} \times V \to V$$

Σε αυτό το σύνολο θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες δέκα ιδιότητες.

$u+v \in V \quad \forall u,v \in V$	Κλειστότητα της πρόσθεσης
$u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$	Αντιμεταθετικότητα
$\exists\ \mathbf{0} \in \mathbb{R}: \ u+\mathbf{0} = u \quad \forall u \in V$	Ύπαρξη ουδετέρου πρόσθεσης
$\forall u \in V \ \ \exists -u \in V: \ u+(-u) = 0$	Ύπαρξη αντιθέτου πρόσθεσης
$(u+v)+w = u+(v+w) \ \forall u,v,w \in V$	Προσεταιριστικότητα πρόσθεσης
$au \in V \quad \forall u \in V$ και $\forall a \in \mathbb{R}$	Κλειστότητα του πολαπλασιασμού
$a(u+v) = au+av \quad \forall u,v \in V$ και $\forall a \in \mathbb{R}$	Πρώτος επιμεριστικός κανόνας
$(a+b)u = au+bu \quad \forall u \in V$ και $\forall a,b \in \mathbb{R}$	Δεύτερος επιμεριστικός κανόνας
$(ab)u = a(bu) \quad \forall u \in V$ και $\forall a,b \in \mathbb{R}$	Προσεταιριστικότητα πολαπλασιασμού
$1u = u \quad \forall u \in V$	

Σύμβολα :

$\forall$ για κάθε, $\exists$ υπάρχει, : τέτοιο ώστε, $\mathbf{0}$ το μηδενικό διάνυσμα,0 το μηδέν του πολ\μου.

- **Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις είναι δ.χ. πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύουν όλες οι παραπάνω ιδιότητες.**
- **Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις δεν είναι δ.χ. πρέπει να αποδείξουμε ότι έστω μία από παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύει.**

Παραδείγματα συνόλων που, αποδεικνύοντας τις παραπάνω ιδιότητες, βλέπουμε ότι είναι δ.χ.:

1. Το σύνολο των n-διάστατων διανυσμάτων, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με το σύνηθες άθροισμα διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί διάνυσμα.
2. Το σύνολο των m x n πινάκων, το οποίο συμβολίζουμε με M_{mn}, εφοδιασμένο με το σύνηθες άθροισμα πινάκων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί πίνακα.
3. Ο τετριμμένος χώρος $V = \{0\}$ με το άθροισμα και το γινόμενο αριθμών.

4. Το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n, το οποίο συμβολίζουμε με P_n, εφοδιασμένο με το άθροισμα πουλωνύμων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί πολυώνυμο.

   Εάν $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ και $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ τότε $p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ και $mp(x) = ma_n x^n + ma_{n-1}x^{n-1} + \ldots + ma_1 x + ma_0$

5. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y = kx$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων:
   $V = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = kx\} = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$.
   Ως πρόσθεση ορίζουμε
   $(x_1, kx_1) + (x_2, kx_2) = (x_1 + x_2, kx_1 + kx_2) = (x_1 + x_2, k(x_1 + x_2)) \in V$
   και ως βαθμωτό πολλαπλασιασμό $a(x_1, kx_1) = (ax_1, akx_1) = (ax_1, kax_1) \in V$.

Συμβολισμός : Τα διανύσματα συνηθίζουμε να τα γράφουμε σε αγκύλες [ ]. Ωστόσο όταν αναφερόμαστε σε σημεία του επιπέδου ή του χώρου ($\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα) θα χρησιμοποιούμε τις παρενθέσεις όπως κάνουμε στη γεωμετρική προσέγγιση.

Παραδείγματα συνόλων που δεν είναι δ.χ.:

1. Ο τετριμμένος χώρος $V = \{1\}$ με το άθροισμα και το γινόμενο αριθμών διότι 1+1=2 δεν ανήκει στο χώρο.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y = kx + m$ η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. $V = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = kx + m\} = \{(x, kx + m) : x \in \mathbb{R}\}$. Ως πρόσθεση ορίζουμε $(x_1, kx_1 + m) + (x_2, kx_2 + m) = (x_1 + x_2, kx_1 + kx_2 + 2m) = (x_1 + x_2, k(x_1 + x_2) + 2m) \notin V$ μιας και δεν ικανοποιεί την εξίσωση στης ευθείας.
3. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο πρώτο και στο δεύτερο τεταρτημόριο. $V = \{(x, y) : y \geq 0\}$ δεν είναι δ.χ. εφόσον το (-1,-1) δεν ανήκει στο χώρο ενώ το (1,1) ανήκει.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $a\mathbf{0} = \mathbf{0} \ \forall a \in \mathbb{R}$
2. $0v = \mathbf{0} \ \forall v \in V$
3. Αν $av = \mathbf{0} \Rightarrow a = 0$ ή v=**0**
4. $(-1)v = -v \ \forall v \in V$

4.2 Διανυσματικοί υπόχωροι

Έστω W ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Εάν το W εφοδιασμένο με τις πράξεις του δ.χ. είναι και αυτό διανυσματικός χώρος τότε λέμε ότι είναι διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. V

Για να δείξουμε ότι ένα υποσύνολο είναι υπόχωρος ενός δ.χ. αρκεί να δείξουμε τη κλειστότητα των δύο πράξεων ως προς αυτόν το χώρο, δηλαδή:

$$u + v \in W \ \ \forall u, v \in W \ , \ au \in W \ \ \forall u \in W \text{ και } \forall a \in \mathbb{R}$$

Παραδείγματα διανυσματικών υπόχωρων γνωστών δ.χ.

1. Για κάθε δ.χ. ο τετριμμένος χώρος δ.χ. $V=\{0\}$ είναι υπόχωρός του, όπως και ο ίδιος ο δ.χ. είναι υπόχωρος του εαυτού του.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y=kx$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. $V=\{(x,y):x\in\mathbb{R}, y=kx\}=\{(x,kx):x\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. (το δείξαμε παραπάνω)
3. Το σύνολο των διαγώνιων πινάκων 2x2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. M_{22}, Πράγματι $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix}$ και $k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{bmatrix}$
4. Η τομή $W_1\cap W_2$ δύο διανυσματικών υπόχωρων W_1,W_2 ενός δ.χ. είναι διανυτσματικός υπόχωρος του χώρου V.

   Έστω $u,v\in W_1\cap W_2$ τότε έχουμε ότι $\left.\begin{matrix} u,v\in W_1 \Rightarrow\ u+v\in W_1 \\ u,v\in W_2 \Rightarrow\ u+v\in W_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow u+v\in W_1\cap W_2$

   Επίσης έστω $u\in W_1\cap W_2$, $a\in\mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι

   $$\left.\begin{matrix} u\in W_1 \Rightarrow\ au\in W_1 \\ u,v\in W_2 \Rightarrow\ au\in W_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow au\in W_1\cap W_2$$
5. Το σύνολο των σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ 2 είναι διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. P_3. Πράγματι εάν $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ και $q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ τότε $p(x)+q(x)=(a_2+b_2)x^2++(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$ και $mp(x)=ma_2x^2+ma_1x+ma_0$.

Παραδείγματα υποσυνόλων γνωστών δ.χ. οι οποίοι δεν είναι διανυσματικοί υπόχωροι.

1. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ανήκουν σε συγκεκριμένη ευθεία $y=kx+m$ η οποία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Το δείξαμε παραπάνω.
2. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο πρώτο και στο δεύτερο τεταρτημόριο. $V=\{(x,y):y\geq 0\}$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος εφόσον όταν το (x,y) ανήκει στο σύνολο το $(-x,-y)$ δεν ανήκει στο σύνολο *V* αφού $y\geq 0\Rightarrow -y\leq 0$.

4.3 Γραμμικός συνδυασμός και span

Έστω $v_1,...,v_m\in V$ διανυσματικό χώρο

1. Ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1,...,v_m$ είναι ένα στοιχείο του V της μορφής $a_1v_1+...+a_mv_m$, $a_i\in\mathbb{R}$.

2. Θα λέμε ότι τα στοιχεία $v_1,...,v_m$ **παράγουν** το χώρο V αν για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $a_1,...,a_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $v = a_1 v_1 + ... + a_m v_m$. Συμβολίζουμε τότε ότι $V = span\{v_1, v_2, ..., v_m\}$

Δηλαδή τα στοιχεία $v_1,...,v_m$ παράγουν το V αν κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1,...,v_m$.

Έστω $v_1,...,v_m \in V$ διανυσματικό χώρο τότε το $span\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Παράδειγμα: Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων.

$$\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς a ισχύει ότι

$$[1,-1,a]^T \in span\left\{[2,1,1]^T, [-1,1,1]^T, [3,3,3]^T\right\};$$

Θα πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

να έχει λύση (να είναι συμβιβαστό). Στον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\alpha = -1$.

Παράδειγμα:

Έστω $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}$ τότε $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ δηλαδή

$$M_{22} = span\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

4.4 Γραμμική ανεξαρτησία και βάση

Ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1,...,v_m\}$ του δ.χ. V είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** εάν όταν ισχύει η σχέση $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = 0$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά έχουμε:

$$a_1 = a_2 = ... = a_m = 0.$$

Διανύσματα τα οποία δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα λέμε **γραμμικά εξαρτημένα**. Δύο διανύσματα του δ.χ. V είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Παράδειγμα:

Γραμμικά εξαρτημένα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$ αφού $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Γραμμικά ανεξάρτητα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ αφού $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ -k \\ 0 \\ 3k \end{bmatrix} \Rightarrow k = 3/2, k = 3$ που δεν μπορεί να συμβαίνει ταυτόχρονα.

- Δύο διανύσματα του επιπέδου είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν ανήκουν στην ίδια ή σε παράλληλες ευθείες.
- Δύο διανύσματα του χώρου είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Ένα σύνολο στοιχείων $\{v_1, ..., v_m\}$ του V ονομάζεται **βάση** του V αν έχει τις ιδιότητες

a. το $\{v_1, ..., v_m\}$ **παράγει** το V

b. αν ισχύει η σχέση $a_1v_1 + ... + a_mv_m = 0,$ όπου $a_i \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά έχουμε $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0.$ Δηλαδή είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει παραπάνω από μία βάσεις.

Διάσταση ενός χώρου (συμβολίζεται $\dim V$) είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων της βάσης. Η διάσταση του τετριμμένου μηδενικού χώρου $V = \{0\}$ είναι 0.

- Έστω $\{v_1, ..., v_n\}$ μια βάση του V. Τότε για κάθε $v \in V$, υπάρχουν μοναδικά $a_i \in \mathbb{R}$ με $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$.
- Έστω $\dim V = n$. Εάν $v_1, ..., v_m \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε $m \le n$.
- Εάν W διανυσματικός υπόχωρος του δ.χ. V τότε $\dim W \le \dim V$

Παράδειγμα:

Το σύνολο $\{e_1, e_2\}$, όπου $e_1 = [1,0]^T, e_2 = [0,1]^T$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι,

a. το $\{e_1, e_2\}$ παράγει το $\mathbb{R}^2$, αφού αν $[a_1, a_2]^T \in \mathbb{R}^2$, τότε $[a_1, a_2]^T = [a_1, 0]^T + [0, a_2]^T = a_1[1,0]^T + a_2[0,1]^T$.

b. αν $a_1e_1 + a_2e_2 = 0,$ τότε $[a_1, a_2]^T = [0,0]^T \Rightarrow a_1 = a_2 = 0.$

Με παρόμοιο τρόπο, βλέπουμε ότι το σύνολο $\{e_1, ..., e_n\}$, όπου $e_1 = [1,0,...,0]^T, e_2 = [0,1,0,...,0]^T, ..., e_n = [0,...,0,1]^T$, είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτή λέγεται η **συνήθης βάση ή κανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα:

$$a\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a & c\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow a=0, b=0, c=0, d=0$$

Δηλαδή οι πίνακες αυτοί είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Οπότε αποτελούν και βάση του χώρου των πινάκων 2x2 M_{22} εφόσον τον παράγουν και η διάσταση του είναι 4.

Παράδειγμα:
Το σύνολο των σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n είναι διανυσματικός υπόχωρος με διάσταση n.

Πράγματι το σύνολο αυτό παράγεται από το σύνολο $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ αφού κάθε πολυώνυμο βαθμού το πολύ n $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω πολυωνύμων. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού είναι γραμμικά ανεξάρτητα μιας και

$$\lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\lambda_1 x+\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_n=\lambda_{n-1}=...=\lambda_1=\lambda_0=0$$

- $\dim\mathbb{R}^n = n$
- Έστω ότι $v_1,...,v_m \in \mathbb{R}^n$.
  1. Αν τα $v_1,...,v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε έχουμε $m \le n.$
  2. Αν τα $v_1,...,v_m$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m \ge n.$
  3. Αν τα $v_1,...,v_m$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε $m = n.$
- Έστω $\{v_1,...,v_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
  1. Το σύνολο $\{v_1,...,v_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$
  2. Τα $\{v_1,...,v_n\}$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$
  3. Τα $\{v_1,...,v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω A ο $n\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\det A \ne 0.$
- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω A ο $n\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax=0$ έχει λύση μόνο τη μηδενική.
- Έστω A $n\times n$ πίνακας εάν θεωρήσουμε ως την κάθε στήλη του ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Τότε τα $v_1,...,v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εάν και μόνο εάν $\det A \ne 0.$ Όπου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,...,n.$.
- Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^m$ και έστω A ο $m\times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i=1,...,n.$ Τότε τα $v_1,...,v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα εάν και μόνο εάν η ορίζουσα κάθε $n\times n$ υποπίνακα του A είναι ίση με 0.

Παράδειγμα:

Γραμμικά εξαρτημένα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$ αφού κάθε 2x2 υποορίζουσα είναι μηδενική

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Γραμμικά ανεξάρτητα $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ αφού υπάρχει 2x2 υποορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Έστω $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω A ο $n \times n$ πίνακας του οποίου η στήλη i είναι το $v_i, i = 1,...,n.$ Μετασχηματίζω με κατάλληλες γραμμοπράξεις τον πίνακα A σε πίνακα B κλιμακωτής μορφής. Βρίσκω ποιες στήλες του B περιέχουν οδηγό στοιχείο. Οι αντίστοιχες στήλες του A αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Παράδειγμα:

Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,0,0),(1,0,1,0),(3,1,2,0),(0,0,1,1).$ Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του *V*.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με στήλες τα δοσμένα διανύσματα $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \xrightarrow{\Gamma 2 -> \Gamma 2 - \Gamma 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \xrightarrow{\Gamma 3 -> \Gamma 3 + \Gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

$$\xrightarrow{\Gamma 4 -> \Gamma 4 - \Gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Η πρώτη η δεύτερη και η τέταρτη στήλη περιέχουν οδηγά στοιχεία. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω μια βάση του *V* είναι το σύνολο $\left\{ [1,1,0,0]^T, [1,0,1,0]^T, [0,0,1,1]^T \right\}$ Έχουμε λοιπόν $\dim V = 3.$

Παράδειγμα:

Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$: $V = \{ [2x+3y+z, x-z, y-z]^T, x,y,z \in \mathbb{R} \}$ Δείξτε ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και βρείτε μία βάση για τον καθένα.

Επειδή $\left[2x+3y+z, x-z, y-z\right]^T = x\left[2,1,0\right]^T + y\left[3,0,1\right]^T + z\left[1,-1,-1\right]^T$

έχουμε ότι το σύνολο V είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\left[2,1,0\right]^T, \left[3,0,1\right]^T, \left[1,-1,-1\right]^T$.
Άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Για μία βάση του αρκεί να θεωρήσουμε τον πίνακα με στήλες τις συντεταγμένες των παραπάνω γεννητόρων και να βρούμε μία κλιμακωτή μορφή του¨

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Όλες οι στήλες περιέχουν οδηγά στοιχεία. Σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω μία βάση του V είναι τα διανύσματα $\left[2,1,0\right]^T, \left[3,0,1\right]^T, \left[1,-1,-1\right]^T$ και η διάσπαση του είναι ίση προς 3. Άρα V $=\mathbb{R}^3$.

4.5 Μηδενοχώρος, εικόνα και τάξη πίνακα.

Έστω ένας *mxn* πίνακας A τότε το σύνολο

$$N_A = \left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\right\}$$

ονομάζεται **μηδενοχώρος ή πυρήνας** του πίνακα A.

Είναι εύκολο να δούμε ότι N_A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $u, v \in N_A$ τότε έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} Au = 0 \\ Av = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Au + Av = 0 \Rightarrow A(u+v) = 0 \Rightarrow u+v \in N_A$$

$$\left.\begin{aligned} Au = 0 \\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow kAu = 0 \Rightarrow A\left(ku\right) = 0 \Rightarrow ku \in N_A$$

Η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται **μηδενικότητα** του πίνακα και συμβολίζουμε

$$\nu\left(A\right) = \dim N_A$$

Εάν η μοναδική λύση του ομογενούς συστήματος είναι η μηδενική τότε $N_A = \{\mathbf{0}\}$ και $\nu\left(A\right) = 0$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Η εύρεση του πυρήνα μας οδηγεί στο ομογενές σύστημα

$$-x_1+2x_3+x_4=0$$
$$x_2-2x_3+x_4=0$$
$$2x_1+x_2-x_4=0$$

με επαυξημένο

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma 3->\gamma 3+2\gamma 1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma 3->\gamma 3-\gamma 1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

από το οποίο έχουμε $x_3=0, x_1=x_4, x_2=-x_4$ (απειρία λύσεων) την $[k,-k,0,k]^T=k\left[1,-1,0,1\right]^T$. Οπότε $\nu\left(A\right)=1$ και $N_A=span\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Η εύρεση του πυρήνα μας οδηγεί στον επαυξημένο πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1, \Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1, \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2$ παίρνει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Που έχει μόνο τη μηδενική λύση οπότε $\nu\left(A\right)=0$.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$

Η εύρεση του πυρήνα μας οδηγεί στον επαυξημένο πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

Μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1$ παίρνει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

από το οποίο έχουμε (απειρία λύσεων) την

$$[\frac{k-3l}{2}, k, l]^T = k\left[1/2, 1, 0\right]^T + l\left[-3/2, 0, 1\right]^T = k/2\left[1, 2, 0\right]^T + l/2\left[-3, 0, 2\right]^T.$$

Οπότε $\nu\left(A\right) = 2$ και $N_A = span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\}$.

- Ένας nxn πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $N_A = \{\mathbf{0}\}$

Έστω ένας *mxn* πίνακας A τότε το σύνολο

$$R_A = \left\{b \in \mathbb{R}^m : \ Ax = b \text{ για κάποιο } x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

ονομάζεται **εικόνα** του πίνακα A.

Είναι εύκολο να δούμε ότι R_A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Έστω $u, v \in R_A$ τότε για κάποια $x, y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} Ax = u \\ Ay = v \end{array}\right\} \Rightarrow Ax + Ay = u + v \Rightarrow A(x+y) = u + v \Rightarrow u + v \in R_A$$

$$\left.\begin{array}{l} Ax = u \\ k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow kAx = ku \Rightarrow A\left(kx\right) = ku \Rightarrow ku \in R_A$$

Η διάσταση του χώρου αυτού ονομάζεται **τάξη ή βαθμός (rank)** του πίνακα και συμβολίζουμε

$$rank\left(A\right) = \dim R_A$$

- Η τάξη ενός πίνακα είναι ίση με τον αριθμό των οδηγών στοιχείων που υπάρχουν στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή που μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα.
- Για κάποιον mxn πίνακα A $rank\left(A\right) + \nu(A) = n$
- Ένας nxn πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν $rank\left(A\right) = n$.

- Ένα σύστημα nxn $Ax=b$ έχει τουλάχιστον μία λύση εάν και μόνο εάν ο επαυξημένος πίνακας $[A|b]$ και ο πίνακας *A* έχουν την ίδια τάξη.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$\begin{aligned} &x+2y-3z=4\\ &x+3y+z=11\\ &2x+5y-4z=13 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 11\\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right]$

με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 7\\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $rank([A|b])=rank(A)=3$ οπότε το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, στη συγκεκριμένη την $x=1, y=3, z=1$.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$\begin{aligned} &x+2y-3z=6\\ &2x-y+4z=2\\ &4x+3y-2z=14. \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6\\ 2 & -1 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right]$.

με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $rank([A\,|\,b]) = rank(A) = 2$ οπότε το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, στη συγκεκριμένη περίπτωση άπειρες.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right]$.

με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $3 = rank([A\,|\,b]) \neq rank(A) = 2$ οπότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

Ασκήσεις πάνω στους διανυσματικούς χώρους

1. Εξηγείστε γιατί κάθε ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ *δεν* είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

- $\left\{[x,y,z]^T \,\middle|\, z \geq 0\right\}$
- $\left\{[x,y,z]^T \,\middle|\, y - z = 1\right\}$

Λύση
Το σύνολο W= { $[x,y,z]^T$ | z ≥0 } δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, γιατί αν θεωρήσουμε το $[2,0,1]^T \in$W, τότε $-[2,0,1]^T = [-2,0,-1]^T \notin$W.

Το σύνολο U= { $[x,y,z]^T$ | $y - z = 1$ } δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, γιατί το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει στο U.

2. Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και δικαιολογείστε την απάντησή σας.

1. $U = \left\{[x,y,z]^T \,\middle|\, 3x + 5y + z = 1\right\}$

2. $V = \left\{ [x, y, z]^T \middle| 3x^2 + 5y + z = 0 \right\}$
3. $W = \left\{ [x, y, z]^T \middle| 3x + 5y + z = 0 \right\}$.

Λύση

1. Το U δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ γιατί δεν περιέχει το $[0,0,0]^T$.
2. Το V δεν είναι υπόχωρος. Πράγματι, έχουμε για παράδειγμα $[1,0,-3]^T \in V$ αφού $3\cdot 1^2 + 5\cdot 0 + (-3) = 0$, αλλά $-[1,0,-3]^T = [-1,0,3]^T \notin V$ αφού $3\cdot(-1)^2 + 5\cdot 0 + 3 = 6 \neq 0.$
3. Τα W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, για κάθε $k, l \in \mathbb{R}$ και $[x, y, z]^T, \left[x', y', z'\right]^T \in W$,
   $k[x, y, z]^T + l\left[x', y', z'\right]^T = \left[kx + lx', ky + ly', kz + lz'\right]^T$
   και
   $5(kx + lx') + 3(ky + ly') + (kz + lz') =$
   $k(5x + 3y + z) + l(5x' + 3y' + z') = 0 + 0 = 0.$
   Άρα $k(x, y, z) + l(x', y', z') \in W.$

3. Έστω Π_2 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 2. Αποδείξτε ότι μια βάση του P_2 είναι το σύνολο $\{1,\, t-1, (t-1)^2\}$ και βρείτε την παράσταση του $5t^2 + 3t + 2$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της παραπάνω βάσης.

Λύση

Επειδή η διάσταση του P_2 είναι 3, αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{1,\, t-1, (t-1)^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έχουμε

$a1 + b(t-1) + c(t-1)^2 = 0 \Rightarrow ct^2 + (b-2c)t + (a-b+c) \Rightarrow$

$c = b - 2c = a - b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$

Για το δεύτερο ερώτημα, λύνουμε την εξίσωση

$a1 + b(t-1) + c(t-1)^2 = 2 + 3t + 5t^2$

δηλαδή την

$ct^2 + (b-2c)t + (a-b+c^2) = 5t^2 + 3t + 2.$

Αυτή ισοδυναμεί με το σύστημα $c = 5, b - 2c = 3, a - b + c = 2$. Άρα $a = 10, b = 13, c = 5.$

4. Αφού αποδείξτε ότι τα στοιχεία $[1,-1,1]^T$, $[2,1,2]^T$, $[3,1,0]^T$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$, εκφράστε το $[17,5,5]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Λύση

Τρία στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου διάστασης 3 είναι βάση αν και μόνο αν αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -9 \neq 0,$$

τα δεδομένα διανύσματα αποτελούν μια βάση.

Λύνοντας το 3×3 σύστημα που προκύπτει από την ισότητα $\lambda_1[1,-1,1]^T + \lambda_2[2,1,2]^T + \lambda_3[3,1,0]^T = [17,5,5]^T$, δηλαδή το $\begin{matrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 17 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \end{matrix}$, βρίσκουμε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 4$.

5. (α) Να βρεθούν οι τιμές του *a* για τις οποίες τα διανύσματα $[1,1,a]^T, [2,0,1]^T, [3,-1,1]^T$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Για τις τιμές του *a* που βρήκατε πριν, να εκφράστε το $[1,0,0]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό των $[1,1,a]^T, [2,0,1]^T, [3,-1,1]^T$.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές του *b* για τις οποίες έχουμε $[1,2,b]^T \in span\{[1,1,1]^T, [3,2,1]^T\}$.

Λύση:

α) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, το δεδομένο ερώτημα ισοδυναμεί με το να βρεθούν τα *α* τέτοια ώστε $\det A \neq 0,$ όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Υπολογίζοντας βρίσκουμε ότι $\det A = 2 - 2a$, οπότε $a \neq 1$.

β) Για $a \neq 1$, τα δεδομένα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν μια βάση. Ζητάμε να βρεθούν τα x, y, z τέτοια ώστε

$$[1,0,0]^T = x[1,1,a]^T + y[2,0,1]^T + z[3,-1,1]^T .$$

Λύνοντας το αντίστοιχο σύστημα $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, όπου Α είναι ο πίνακας του προηγουμένου υποερωτήματος, βρίσκουμε ότι $x = \frac{1}{2(1-a)}, \quad y = \frac{a+1}{2(a-1)}, \quad z = \frac{1}{2(1-a)}.$

γ) Ζητάμε τα *b* τέτοια ώστε να υπάρχουν x, y ώστε να έχουμε

$[1,2,b]^T = x[1,1,1]^T + y[3,2,1]^T$. Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$, όπου

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Αυτό έχει λύση αν και μόνο αν οι λύσεις του συστήματος $x + 3y = 1$, $x + 2y = 2$, δηλ. x = 4 και y = -1 ικανοποιούν την τρίτη εξίσωση $x + y = b$. Αυτό συμβαίνει όμως μόνο αν b = 3. Η απάντηση αυτή μπορεί να βρεθεί και από τον ακόλουθο συλλογισμό: Επειδή η τάξη (rank) του πίνακα B, που είναι 2, πρέπει να είναι ίδια με την τάξη του επαυξημένου πίνακα του συστήματος, δηλαδή

$$rank\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & b\end{bmatrix} = 2,$$

που ισχύει αν και μόνο αν $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & b\end{bmatrix}\right) = 0$. Υπολογίζοντας την ορίζουσα, βρίσκουμε ότι $b = 3$.

6. Δίνονται τα σύνολα :

$$E_1 = \left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\right\}; E_2 = \left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} : x_1 + x_3 = x_2 + x_4\right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα E_1, E_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου των πινάκων διαστάσεως 2x2.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις των υποχώρων $E_1, E_2, E_1 \cap E_2$

Λύση:

α) Επιλέγουμε δύο πίνακες X, Y του συνόλου E_1 έστω

$$X = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} \in E_1 \ , \ Y = \begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix} \in E_1$$

όπου $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$ και στη συνέχεια ελέγχουμε αν ο πίνακας $\lambda X + \mu Y$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο E_1.

$$\lambda X + \mu Y = \lambda\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda x_1 + \mu y_1 & \lambda x_2 + \mu y_2\\ \lambda x_3 + \mu y_3 & \lambda x_4 + \mu y_4\end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρώ ότι ισχύει η ιδιότητα των πινάκων του χώρου E_1 :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) &= \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) =\\ &= \lambda(x_3 + x_4) + \mu(y_3 + y_4) =\\ &= (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4)\end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας $\lambda X + \mu Y$ ανήκει στον χώρο E_1. Όμοια επιλέγουμε δύο πίνακες X, Y του χώρου E_2 έστω

$$X = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} \in E_2; Y = \begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix} \in E_2$$

όπου $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$, $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ και στη συνέχεια ελέγχω αν ο πίνακας $\lambda X + \mu Y$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ανήκει στον χώρο E_2.

$$\lambda X+\mu Y=\lambda\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2\\ \lambda x_3+\mu y_3 & \lambda x_4+\mu y_4\end{bmatrix}$$

Πράγματι παρατηρώ ότι ισχύει η ιδιότητα των πινάκων του χώρου E_2 :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_3+\mu y_3)&=\lambda(x_1+x_3)+\mu(y_1+y_3)=\\ &=\lambda(x_2+x_4)+\mu(y_2+y_4)=\\ &=(\lambda x_2+\mu y_2)+(\lambda x_4+\mu y_4)\end{aligned}$$

και συνεπώς ο πίνακας $\lambda X+\mu Y$ ανήκει στον χώρο E_2.

β) Παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\in E_1$ γράφεται ως

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\overset{x_1+x_2=x_3+x_4}{=}\begin{bmatrix}x_3+x_4-x_2 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=$$

$$=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{X_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{X_2}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{X_3}$$

όπου οι πίνακες X_1,X_2,X_3 εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του E_1. Άρα $\dim E_1=3$.

Παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας $Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}\in E_2$ γράφεται ως

$$Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}\overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=}\begin{bmatrix}y_2+y_4-y_3 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}=$$

$$=y_2\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{Y_1}+y_3\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{Y_2}+y_4\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{Y_3}$$

όπου οι πίνακες Y_1,Y_2,Y_3 εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του E_2. Άρα $\dim E_2=3$.

Κάθε πίνακας $Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}\in E_1\cap E_2$ γράφεται ως

$$Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}\underset{y_1+y_2=y_3+y_4}{\overset{y_1+y_3=y_2+y_4}{=}}\begin{bmatrix}y_4 & y_3\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}=$$

$$=y_3\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{Y_1}+y_4\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{Y_2}$$

όπου οι πίνακες Y_3,Y_4 είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και συνεπώς αποτελούν βάση του $E_1\cap E_2$. Άρα $\dim(E_1\cap E_2)=2$.

7. Έστω E_1 και E_2 οι παρακάτω διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$,

$E_1=\left\{[x_1,x_2,x_3,x_4]^T \,|\, x_2-2x_3+x_4=0\right\}$

$E_2=\left\{[x_1,x_2,x_3,x_4]^T \,|\, x_1=x_4, x_2=2x_3\right\}$.

Βρείτε τη διάσταση καθενός από τους υποχώρους

$$E_1,\ E_2,\ E_1+E_2$$

Λύση

Έστω $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$ ένα τυχαίο διάνυσμα του E_1 . Έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1n_1 + x_3n_2 + x_4n_3 .$$

Δηλαδή τα διανύσματα n_1, n_2, n_3 είναι γεννήτορες του E_1. Αυτά είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, υπολογίζουμε τον βαθμό του πίνακα με στήλες τα διανύσματα n_1, n_2, n_3. Έτσι,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο βαθμός του τελευταίου πίνακα είναι 3, άρα τα n_1, n_2, n_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς αποτελούν μια βάση του E_1, οπότε $\dim E_1 = 3$.

Όμοια διαπιστώνουμε ότι για το $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T \in E_2$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1u_1 + x_3n_2 ,$$

άρα $E_2 = \text{span}\{u_1, n_2\}$. Επίσης τα u_1, n_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε αποτελούν βάση του E_2. Άρα $\dim E_2 = 2$.

Έχουμε $E_1 + E_2 = \text{span}\{ n_1, n_2, n_3, u_1 \}$. Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *τα* n_1, n_2, n_3, u_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα $\dim(E_1 + E_2) = 4$.

8.Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα στοιχεία $u = [1,1,1]^T$, $v = [2,1,1]^T$, $w = [1,a,2]^T$ του $\mathbb{R}^3$.

1. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες τα u,v,w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το $[0,1,1]^T$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα u,v,w.

Λύση

1. Έστω $\lambda u+\mu v+\nu w=0,\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.$ Ζητάμε τα *α* για τα οποία η σχέση αυτή αληθεύει μόνο για $\lambda=\mu=\nu=0.$

   Έχουμε

   $$\lambda u+\mu v+\nu w=0 \Leftrightarrow \lambda[1,1,1]^T+\mu[2,1,1]^T+\nu[1,a,2]^T=[0,0,0]^T \Leftrightarrow$$

   $$\begin{cases}\lambda+2\mu+\nu=0\\ \lambda+\mu+\nu a=0\\ \lambda+\mu+2\nu=0.\end{cases}$$

   Ζητάμε τα *α* για τα οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Ο επαυξημένος πίνακας

   $$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&\alpha&0\\1&1&2&0\end{bmatrix}$$

   του συστήματος μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1,\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1,\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2$ παίρνει τη μορφή

   $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-1&a-1&0\\0&0&2-a&0\end{array}\right].$$ Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $$\begin{cases}\lambda+2\mu \quad +\nu=0\\ -\mu+(a-1)\nu=0\\ (2-a)\nu=0\end{cases}$$

   Βλέπουμε ότι η μηδενική λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν $a\neq 2.$

2. Ζητάμε τα *α* για τα οποία υπάρχουν $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda u+\mu v+\nu w=[0,1,1]^T$. Όπως πριν παίρνουμε το σύστημα

   $$\begin{cases}\lambda+2\mu+\nu=0\\ \lambda+\mu+\nu a=1\\ \lambda+\mu+2\nu=1.\end{cases}$$

   Ζητάμε τα *a* για τα οποία το σύστημα έχει λύση. Ο επαυξημένος πίνακας

   $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\1&1&a&1\\1&1&2&1\end{array}\right]$$

   του συστήματος μετά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1,\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1,\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2$ παίρνει τη μορφή

   $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-1&a-1&1\\0&0&2-a&0\end{array}\right].$$ Το αντίστοιχο σύστημα είναι το $$\begin{cases}\lambda+2\mu \quad +\nu=0\\ -\mu+(a-1)\nu=1\\ (2-a)\nu=0.\end{cases}$$

   Παρατηρούμε ότι το σύστημα αυτό έχει λύση για κάθε *a*.

   Σημείωση: Παρατηρούμε ότι $[0,1,1]^T=2u-v$.

9 Έστω P_3 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ 3.

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B=\{1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3\}$ είναι μια βάση του P_3.
2. Να παρασταθεί το x^3 σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης *B*.

Λύση

1. Επειδή $\dim P_3 = 4,$ αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = 0 \Rightarrow$$
$$a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 2x + 1) + c(x-1) + d = 0 \Rightarrow$$
$$ax^3 + (-3a+b)x^2 + (3a - 2b + c)x + (-a + b - c + d) = 0 \Rightarrow$$

Έστω $a,b,c,d \in \mathbb{R}.$ Τότε $\begin{cases} a = 0 \\ -3a + b = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 0. \end{cases}$

Το σύστημα είναι τριγωνικό και εύκολα βλέπουμε ότι η μηδενική λύση είναι η μοναδική.

Σημείωση. Ένας άλλος τρόπος επίλυσης είναι να θέσουμε $x = 1$ στη σχέση $a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = 0$ οπότε $d = 0.$ Τότε παίρνουμε $a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) = 0 \Rightarrow a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 0$, οπότε θέτοντας πάλι $x-1$ παίρνουμε $c = 0$, κοκ.

2. Έστω $x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d.$ Όπως πριν, το ισοδύναμο σύστημα είναι το $\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 0. \end{cases}$

   Λύνοντάς το βρίσκουμε $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Το παρόν υλικό δεν αποτελεί αυτόνομο διδακτικό υλικό, βασίζεται στο σύγγραμμα που διανέμεται και στην προτεινόμενη βιβλιογραφία του μαθήματος. Το περιεχόμενο του αρχείου απλά αποτελεί περίγραμμα των παραδόσεων του μαθήματος. Αποτελεί υλικό της διδασκαλίας του μαθήματος από το διδάσκοντα για δική του χρήση και παρακαλώ να μη χρησιμοποιηθεί και να μην αναπαραχθεί και διανεμηθεί για άλλο σκοπό.