# 5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

## *5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Κάθε συνάρτηση f: $A \to B$ με $A \subseteq \mathbf{R}^n$ και $B \subseteq \mathbf{R}$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**:

(I) Αν $A \subseteq \mathbf{R}^n$ και $B \subseteq \mathbf{R}^n$ τότε έχουμε διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών.

(II) Αν $A \subseteq \mathbf{R}$ και $B \subseteq \mathbf{R}^n$ τότε έχουμε διανυσματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής.

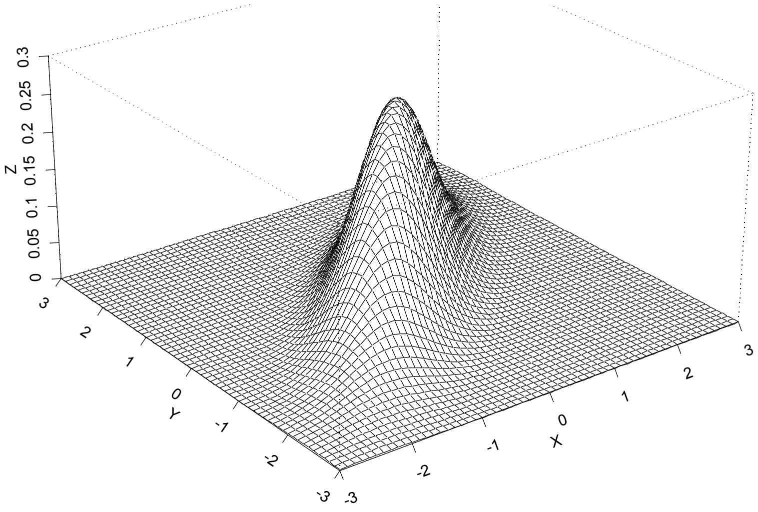
(III) Εδώ θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $A \subseteq \mathbf{R}$ και $B \subseteq \mathbf{R}^2$ δηλαδή με πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**: $y=f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$

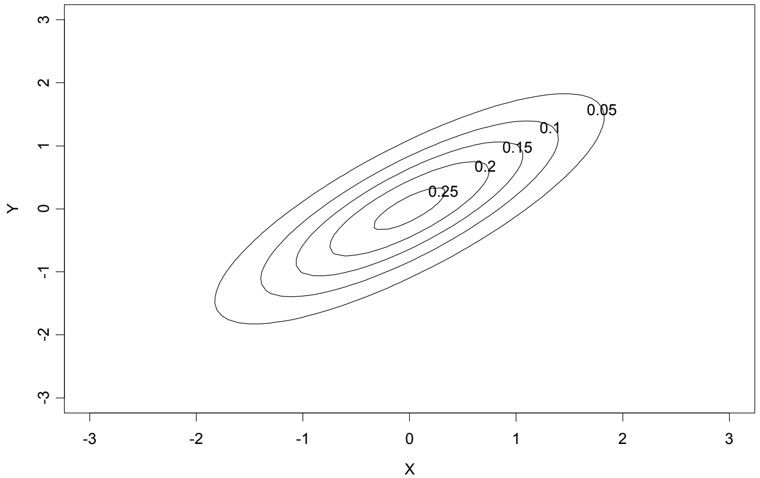
y: εξαρτημένη μεταβλητή

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: ανεξάρτητες μεταβλητές

[Για n=2 εναλλακτικά z=f(x,y)].

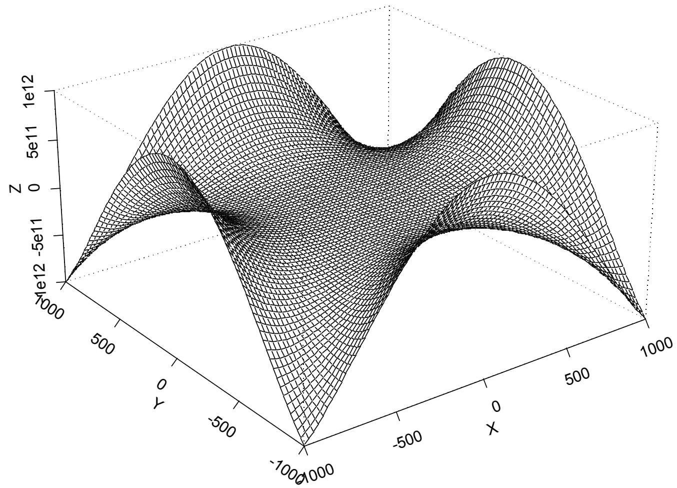



**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2:** Διάγραμμα Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Διμεταβλητής Κανονικής Κατανομής για ρ=0.80.

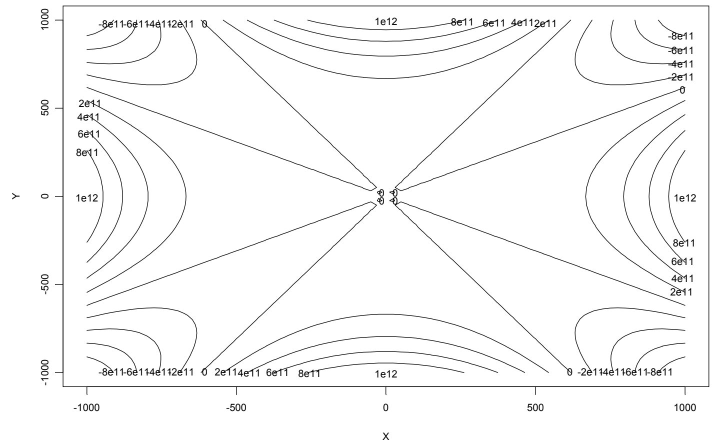



**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1:** Διάγραμμα Ισοϋψών Καμπύλων της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Διμεταβλητής Κανονικής Κατανομής για ρ=0.80.






**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3** : Διάγραμμα της Συνάρτησης $x^4$-$3x^2y^2$+$y^4$ .




. **ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4:** Διάγραμμα ισοϋψών Καμπύλων της Συνάρτησης $x^4$-$3x^2y^2$+$y^4$

# *5.2 ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ*

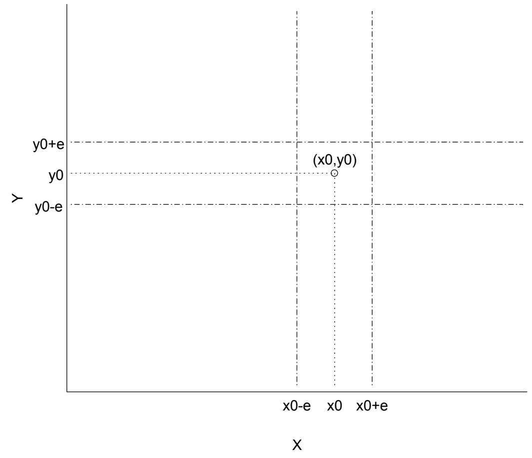
## 5.2.1 ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Περιοχή ενός σημείου $(x_0,y_0)\in \mathbf{R}^2$ ονομάζεται ένα υποσύνολο $\Pi(x_0,y_0)$ του $\mathbf{R}^2$ που περιέχει το σημείο $(x_0,y_0)$ και τα κοντινά σε αυτό.

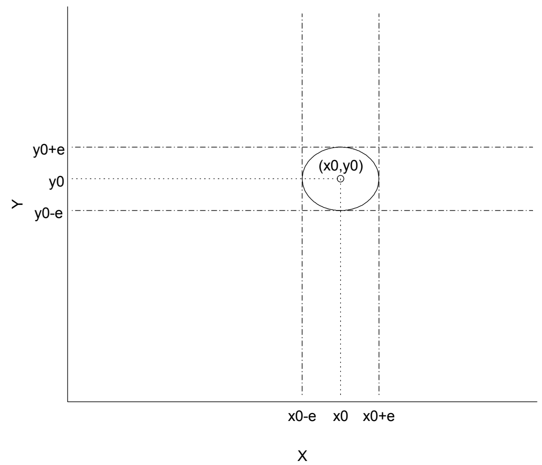
Η περιοχή που ορίζεται από τα σημεία $(x,y)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $|x-x_0|<\varepsilon$ και $|y-y_0|<\varepsilon$ για $\varepsilon>0$ ορίζουν μια τετραγωνική περιοχή γύρω από το σημείο $(x_0,y_0)$.

Η περιοχή που ορίζεται από τα σημεία $(x,y)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta$ για $\delta>0$ ορίζουν μια κυκλική περιοχή με κέντρο το σημείο $(x_0,y_0)$ και ακτίνα δ.






**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5:** Διαγραμματική Απεικόνιση τετραγωνικής περιοχής ενός σημείου




**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6:** Διαγραμματική Απεικόνιση Κυκλικής περιοχής ενός σημείου

### 5.2.2 ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένα σημείο $(x_0,y_0)\in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει $\Pi(x_0,y_0)$ η οποία είναι υποσύνολο του A δηλαδή $\Pi(x_0,y_0)\subseteq A$.

### 5.2.3 ΣΗΜΕΙΑ ΟΛΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Για τη συνάρτηση f(x,y), το σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ λέγεται σημείο ολικού ελάχιστου αν $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ (ή ολικού μέγιστου αν $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ ) για κάθε $(x,y)\in D(f)$.



## *5.3 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω η πραγματική συνάρτηση f(x,y) και το σημείο $(x_0,y_0)$, τότε η συνάρτηση f συγκλίνει στην τιμή L όταν (x,y) προσεγγίζουν το $(x_0,y_0)$ αν για κάθε ε>0 υπάρχει μια περιοχή του $(x_0,y_0)$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο (x,y) που ανήκει σε αυτή την περιοχή ισχύει $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

**ΙΔΙΟΤΗΤΑ**: Αν $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right\}=\lim_{y\to y_0}\left\{\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right\}=L.$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**: Οι ιδιότητες που ισχύουν στη σύγκλιση συναρτήσεων μίας μεταβλητής ισχύουν και για τις σύγκλιση συναρτήσεων 2 μεταβλητών.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Η συνάρτηση f(x,y) είναι συνεχής στο σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

## *5.4 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΙ ΒΗΤΑ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Η συνάρτηση γάμμα ορίζεται για x≥0

και δίδεται από τον τύπο: $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**:

1. Γ(x+1)=xΓ(x), για x>1
2. Γ(κ+1)=κ!, για κ φυσικό αριθμό
3. Γ(0)=Γ(1)=1
4. Γ(1/2)= $\sqrt{\pi}$

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Η συνάρτηση Βήτα ορίζεται για x,y≥0

και δίδεται από τον τύπο:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt .$$

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**:

1. Β(x,y)=Γ(x) Γ(y)/ Γ(x+y)
2. Β(x,y)= Β(y,x)

## *5.6 ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω η πραγματική συνάρτηση $z=f(x,y)$ και $(x_0,y_0)$ ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Τότε η οριακή τιμή

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta, y_0)-f(x_0,y_0)}{\delta}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο $(x_0,y_0)$.

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**:

$f_x(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ ή γενικότερα $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:**

**(Ι)**: Όμοια έχουμε $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{f(x,y+\delta)-f(x,y)}{\delta}$.

**(ΙΙ)**: Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό της μερικής παραγώγου για συναρτήσεις περισσοτέρων από δύο μεταβλητές.

## *5.7 ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω f διαφορίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο (x,y), τότε η γραμμική απεικόνιση

$$g(dx,dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

ονομάζεται ολικό διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο (x,y).

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**: df(x,y) ή df.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:**

**(I)**: Οι ποσότητες $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx$ και $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$ ονομάζονται και μερικά διαφορικά.

**(II)**: Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τότε μπορούμε να γράψουμε: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.



## *5.8 ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΣΕΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ*

**ΠΡΟΤΑΣΗ**: Έστω η συνάρτηση f(x,y) οποία μπορεί να γραφτεί ως $f(x,y) = g(\ h_1(x,y),\ h_2(x,y)\ )$ τότε

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_1}\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_2}\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}$$

και

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_1}\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial g(h_1,h_2)}{\partial h_2 y}\frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y}.$$

## *5.9 ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Οι συναρτήσεις οι οποίες γράφονται υπό τη μορφή $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)=0$, όπου y η εξαρτημένη μεταβλητή και δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς y, ονομάζονται πεπλεγμένες συναρτήσεις.

**ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΕΠΛ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**:

Αν $f(x,y)=0$ τότε η παράγωγος $dy/dx$ δίδεται από τον τύπο: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Όμοια αν $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)=0$ τότε η μερική παράγωγος $\partial y/\partial x_i$ δίδεται από τον τύπο

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}.$$

## *5.11 ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως της συνάρτησης f(x,y) ονομάζονται οι συναρτήσεις που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε τις μερικές παραγώγους ∂f/∂x και ∂f/∂y και δίδονται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:**

**(I)** Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό σε μερική παράγωγος n-τάξης και τη συμβολίζουμε ως $\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ για k=0, …, n.

**(II)** Όμοια μπορούμε να ορίσουμε τη μερική παράγωγο n-τάξης για συνάρτηση p μεταβλητών και τη συμβολίζουμε ως $\frac{\partial^n f(x_1,\ldots,x_p)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_p^{k_p}}$ με $k_1+\ldots+k_p=n$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**: Αν οι μερικές παράγωγοι της *f*(x,y), ∂*f*/∂x και ∂*f*/∂y είναι συνεχείς σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού $(x_0,y_0)$ τότε $\frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: *Διάνυσμα κλίσης* της συνάρτησης $f(x_1,x_2,\ldots, x_p)$ στο σημείο $\underline{x}^0=(x_1^0, x_2^0,\ldots, x_p^0)$ ονομάζουμε το διάνυσμα με στοιχεία τις πρώτες μερικές παραγώγους στο σημείο αυτό.

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**: $\nabla f(\underline{x}^0)=\begin{pmatrix}\partial f(\underline{x}^0)/\partial x_1\\ \vdots\\ \partial f(\underline{x}^0)/\partial x_p\end{pmatrix}$.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: *Εσσιανή Μήτρα (Hessian Matrix)* ονομάζεται ο πίνακας H(f) με στοιχεία $H_{ij}=\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$ που αντιστοιχούν στην i γραμμή και j στήλη και δίδεται ως εξής:

$$H(f)=\begin{bmatrix}\partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 & \ldots & \partial^2 f/\partial x_1\partial x_p\\ \partial^2 f/\partial x_2\partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_2^2 & \ldots & \partial^2 f/\partial x_2\partial x_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial^2 f/\partial x_p\partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_p\partial x_2 & \ldots & \partial^2 f/\partial x_p^2\end{bmatrix}.$$



## *5.12 ΑΚΡΙΒΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ*

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Το άθροισμα u(x,y)dx+υ(x,y)dy ονομάζεται *ακριβές διαφορικό* αν και μόνο αν ∂u/∂y=∂υ/∂x.

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Κάθε εξίσωση της μορφής u(x,y)dx+υ(x,y)dy=0 ονομάζεται *διαφορική εξίσωση*.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**: Αρκεί να βρούμε μια εξίσωση f(x,y) τέτοια ώστε df= u(x,y)dx+υ(x,y)dy όποτε η εξίσωση f(x,y)=0 δίνει τη ζητούμενη συνάρτηση σε πεπλεγμένη μορφή.

## 5.13 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω η συνάρτηση f(x,y). Το σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ ονομάζεται στάσιμο αν $\partial f(x_0,y_0)/\partial x=\partial f(x_0,y_0)/\partial y=0$.

**ΠΡΟΤΑΣΗ**: Αν μια συνάρτηση f(x,y) είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ το οποίο είναι τοπικό ακρότατο τότε αυτό το σημείο είναι στάσιμο.



**ΠΡΟΤΑΣΗ**: Αν ένα σημείο $(x_0,y_0)\in D(f)$ είναι στάσιμο και

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$$

τότε

(I) Αν $\Delta>0$ και $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial y^2<0$, $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial x^2<0$ τότε η παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(x_0,y_0)$.

(II) Αν $\Delta>0$ και $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial y^2>0$, $\partial^2 f(x_0,y_0)/\partial x^2>0$ τότε η παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(x_0,y_0)$.

(III) Αν $\Delta<0$ τότε το σημείο $(x_0,y_0)$ ονομάζεται σαγματικό.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**:

(I) Αν $\Delta=0$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τη φύση του σημείου (μπορεί να είναι ακρότατο ή σαγματικό σημείο).

(I) Αν το σημείο $(x_0,y_0)$ δεν είναι εσωτερικό τότε μπορεί έχουμε ακρότατο με $\Delta<0$.

**ΠΡΟΤΑΣΗ**: Αν η συνάρτηση f(x,y) παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ακρότατο στο σημείο $(x_0,y_0)$ υπό τον περιορισμό φ(x,y)=0 τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \phi(x_0,y_0)}{\partial x}=0$$

και

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \phi(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ**: Αν F(x,y,λ)=f(x,y)+λφ(x,y) και το σημείο $(x_0,y_0,\lambda_0)$ είναι λύση του συστήματος ∂F(x,y,λ)/∂x=0, ∂F(x,y,λ)/∂y=0 και φ(x,y)=0 και

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial \phi(x_0,y_0)}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial \phi(x_0,y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial \phi(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial \phi(x_0,y_0)}{\partial y} & 0\end{vmatrix}=$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

(I) Αν $\Delta_1>0$ τότε η f(x,y) παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό μέγιστο.

(II) Αν $\Delta_1<0$ τότε η f(x,y) παρουσιάζει δεσμευμένο τοπικό ελάχιστο.