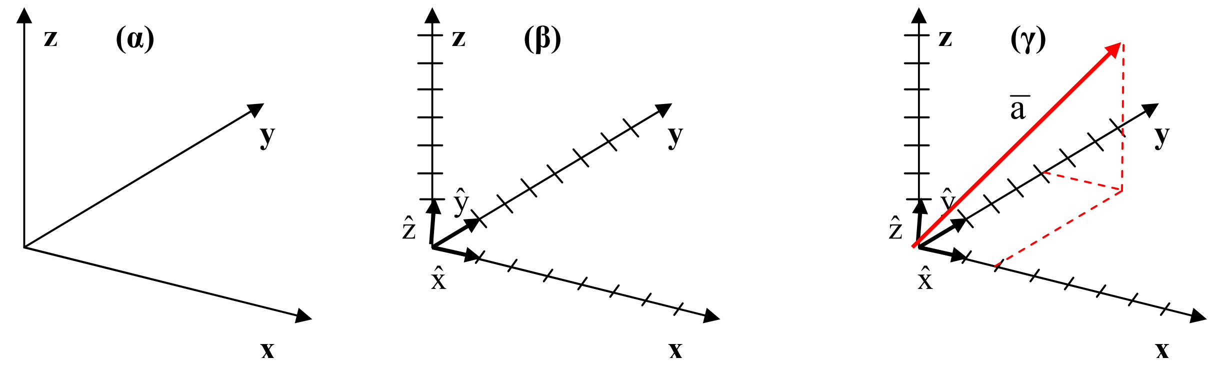
Διανύσματα:

Ένα διάνυσμα $\bar{a}$ μπορεί να παρασταθεί με τρεις αριθμούς που είναι οι συντεταγμένες του σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς. Σε ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων x, y, z (σχήμα 1α) ορίζονται τρια μοναδιαία διανύσματα κατα μήκος των τριών αξόνων τα $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ (μερικές φορές τα $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$). Αυτά διανύσματα ονομάζονται μοναδιαία γιατί έχουν μέτρο = μία μονάδα μέτρησης (σχήμα 1β). Έτσι κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων, δηλαδή: $\bar{a}=a_1\hat{x}+a_2\hat{y}+a_3\hat{z}$ όπου τα α_1, α_2, α_3 είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\bar{a}$ στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Το διάνυσμα $\bar{a}$ του σχήματος 1γ γράφεται: $\bar{a}=2\hat{x}+4\hat{y}+5\hat{z}$. Εναλλακτικά μπορεί να γραφεί και ως: $\bar{a}=(2,4,5)$.



Σχήμα 1

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων:

Έστω δύο διανύσματα, το $\bar{a}=a_1\hat{x}+a_2\hat{y}+a_3\hat{z}$ και το $\bar{b}=b_1\hat{x}+b_2\hat{y}+b_3\hat{z}$. Ως εσωτερικό γινόμενο αυτών των δύο διανυσμάτων ορίζεται το:

$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_1\hat{x}+a_2\hat{y}+a_3\hat{z})(b_1\hat{x}+b_2\hat{y}+b_3\hat{z})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ (επειδή $\hat{x}\hat{y}=0$ και $\hat{y}\hat{z}=0$ αφού τα $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ είναι αμοιβαία κάθετα και $\hat{x}\hat{x}=\hat{y}\hat{y}=\hat{z}\hat{z}=1$)

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένας αριθμός.

Μπορεί να γραφεί και ως: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $\bar{a}$ και $\bar{b}$.

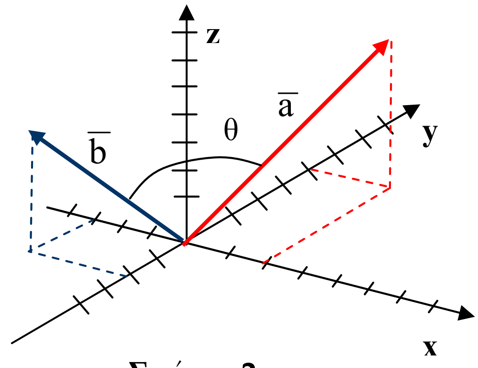
Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να θεωρηθεί και ως το γινόμενο του μέτρου του ενός διανύσματος $|\bar{a}|$ επί την προβολή σε αυτό του άλλου διανύσματος $|\bar{b}|\cos\theta$.

Παράδειγμα σχήματος 2:

Διάνυσμα $\bar{a}=2\hat{x}+4\hat{y}+5\hat{z}$

διάνυσμα $\bar{b}=-2\hat{x}-3\hat{y}+4\hat{z}$

εσωτερικό γινόμενο $\bar{a}\cdot\bar{b}=-2\times2-4\times3+5\times3=-1$

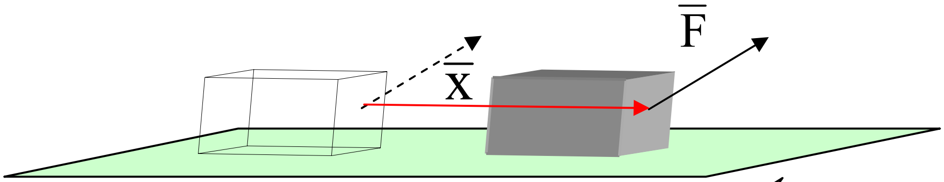


Σχήμα 2

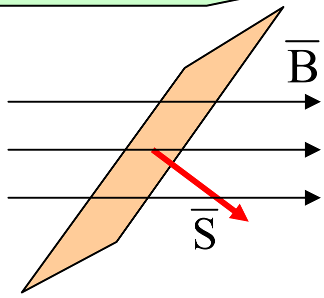
- *Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων που είναι μεταξύ τους κάθετα ισούται με μηδέν.*

Εσωτερικό γινόμενο στη φυσική:

- Έργο (σταθερής) δύναμης $\overline{F}$ που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά $\overline{x}$: $W = \overline{F} \cdot \overline{x}$



- Ροή πεδίου π.χ. μαγνητικού, επαγωγής $\overline{B}$, που διέρχεται από επιφάνεια $\overline{S}$: $\Phi = \overline{B} \cdot \overline{S}$ (το $\overline{S}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην κόκκινη επιφάνεια και χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον προσανατολισμό της).



Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων:

Έστω δύο διανύσματα, το $\overline{a} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$ και το $\overline{b} = b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}$. Ως εξωτερικό γινόμενο $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ ορίζεται το **διάνυσμα**:

$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{x}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \hat{x}(a_2b_3 - a_3b_2) - \hat{y}(a_1b_3 - a_3b_1) + \hat{z}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Το μέτρο του διανύσματος $\overline{c}$ είναι $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\theta$.

Παράδειγμα σχήματος 5:

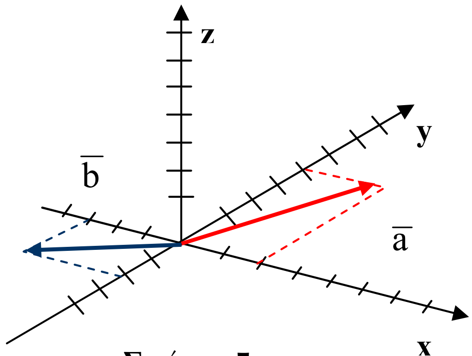
Διάνυσμα $\overline{a} = 2\hat{x} + 4\hat{y}$

διάνυσμα $\overline{b} = -2\hat{x} - 3\hat{y}$

εξωτερικό γινόμενο

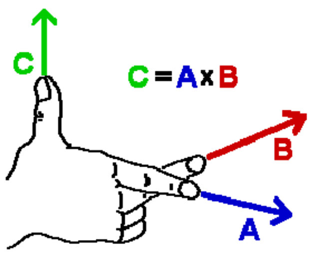
$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\hat{z}$$

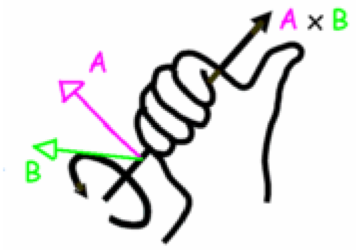
δηλαδη είναι ένα διάνυσμα κατά μήκος του άξονα z (κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα άλλα δύο).



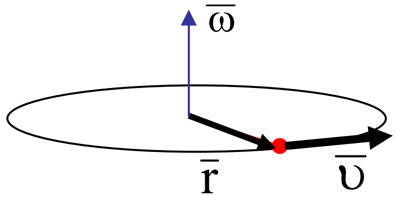
Σχήμα 5

- *Το εξωτερικό γινόμενο δύο παράλληλων διανυσμάτων ισούται με μηδέν.*
- $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$
- Η φορά του διανύσματος $\overline{c}$ καθορίζεται με τον κανόνα δεξιού χεριού ή με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα.

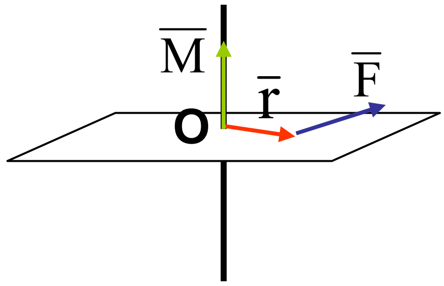




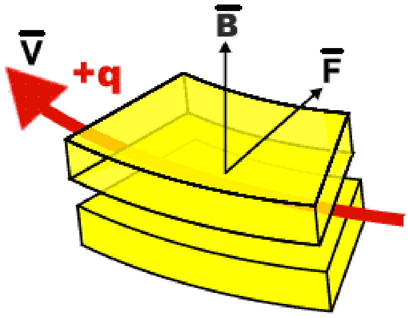
Εξωτερικό γινόμενο στη φυσική:



- Όταν ένα σώμα εκτελεί **κυκλική κίνηση** η γωνιακή ταχύτητα, $\overline{\omega}$ (το μέτρο της οποίας είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που διαγράφει το διάνυσμα θέσης $\overline{r}$) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην κυκλική τροχιά. Η γραμμική ταχύτητα $\overline{v}$, το διάνυσμα θέσης του σώματος $\overline{r}$ και η γωνιακή ταχύτητα $\overline{\omega}$ συνδέονται με την εξίσωση $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$



- Ροπή της δύναμης $\overline{F}$ ως προς το σημείο Ο ονομάζεται το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης $\overline{r}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης με τη δύναμη: $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$



- Η δύναμη $\overline{F}$ που ασκείται σε ένα φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\overline{v}$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\overline{B}$ δίνεται από την εξίσωση: $\overline{F} = q\left(\overline{v} \times \overline{B}\right)$