6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Η Ολοκλήρωση κατά Riemann επεκτείνεται εύκολα για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

6.1 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f(x,y)/[a,b]×[c,d] και g_x(y)= f(x,y)/[c,d] τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση h(x)=$\int_c^d f(x,y)dy$/[a,b]. Αν και η συνάρτηση h(x) είναι ολοκληρώσιμη τότε:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b h(x)dx.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όμοια αν w(y)=$\int_a^b f(x,y)dx$/[c,d]

τότε $\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d w(y)dy$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$.

6.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1… $\iint_A [\lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y)]dxdy =$

$$= \lambda_1 \iint_A f_1(x,y)dxdy + \lambda_2 \iint_A f_2(x,y)dxdy$$

2…Αν f(x,y)≤g(x,y) για κάθε (x,y)∈ **A** τότε

$$\iint_A f(x,y)dxdy \le \iint_A g(x,y)dxdy$$

3…Αν f(x,y) ολοκληρώσιμη στο [a,b]×[c,d] και x_0∈ [a,b], y_0∈ [c,d] τότε

$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx =$

$$= \int_a^{x_0}\int_c^d f(x,y)dydx + \int_{x_0}^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

$$= \int_a^b\int_c^{y_0} f(x,y)dydx + \int_a^b\int_{y_0}^d f(x,y)dydx$$

4…Αν f(x,y) ολοκληρώσιμη στο **A** τότε και η |f(x,y)| ολοκληρώσιμη στο **A** και ισχύει

$$\left|\iint_A f(x,y)dxdy\right| \le \iint_A |f(x,y)|dxdy$$

6.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΕ ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Έστω το ολοκλήρωμα $\iint_A f(x,y)dxdy$. Μέχρι τώρα είδαμε την περίπτωση όπου **A**=[a,b]×[c,d] δηλαδή το **A** είναι ορίζει ένα ορθογώνιο στο δισδιάστατο χώρο των μεταβλητών x και y. Πολλές φορές όμως το σύνολο **A** δεν είναι αυτής της μορφής αλλά ορίζεται ως το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις δηλαδή:

A = $\{ (x,y)\in R^2 : a<x<b,\ y_1(x)<y<y_2(x) \}$ ή

A = $\{ (x,y)\in R^2 : x_1(y)<x< x_2(y),\ c<y<d\}$.

Τότε ισχύει

$$\iint_A f(x,y)dydx =$$

$$= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b h(x)dx$$

$$= \int_c^d \int_{x_2(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d w(y)dy$$

με h(x)= $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ και w(y)= $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$.

6.4 ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

6.4.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$. Αν μπορούμε να γράψουμε f(x)=g(h(x)) όπου g(x) μια εύκολα ολοκληρώσιμη και h(x) είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση τότε:

1… Θέτουμε u=h(x).

2… Λύνουμε ως προς x δηλαδή $x=h^{-1}(u)$

3… Βρίσκουμε $dx=[h^{-1}(u)]'du$.

4… Βρίσκουμε τα καινούρια όρια
αντί για a τώρα έχουμε u=h(a) και
αντί για b τώρα έχουμε u=h(b).

5… Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(h^{-1}(u))[h^{-1}(u)]'du = \int_{h(a)}^{h(b)} g(u)[h^{-1}(u)]'du$$

6.4.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ:Έστω η συνάρτηση f(x,y) ολοκληρώσιμη στο **A** και $x=h_1(u,v)$ και $y= h_2(u,v)$ για τις οποίες υπάρχουν οι μερικές πρώτες παράγωγοι και επιπλέον είναι αμφιμονοσήμαντες. Τότε για τη συνάρτηση $f(x,y) = g(h_1(u,v), h_2(u,v))= g(u,v)/\mathbf{A}'$, όπου g ολοκληρώσιμη και

$\mathbf{A}'=\{(u,v)\in R^2:\exists(x,y) \in \mathbf{A} : x=h_1(u,v)$και $y=h_2(u,v)\}$

ισχύει ότι

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_{A'} g(u,v)\,|J|\,dudv$$

όπου |**J**| είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα των συναρτήσεων $h_1(u,v)$ και $y=h_2(u,v)$ η οποία δίδεται ως εξής

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u}$$