ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός 1. Αν τα $\boldsymbol{i}, \mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y και z, αντίστοιχα, η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{F}(\mathrm{t}) = a_1(\mathrm{t})\, \boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{t})\, \mathbf{j} + a_3(\mathrm{t})\, \mathbf{k} \qquad (1)$$

όπου $a_1(\mathrm{t}),\ a_2(\mathrm{t}),\ a_3(\mathrm{t})$ (συνιστώσες) είναι συναρτήσεις του t, λέγεται **διανυσματική συνάρτηση** και οι τιμές της είναι διανύσματα.

Διανυσματικές συναρτήσεις χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος στο επίπεδο ή το χώρο.

Ορισμός 2. Λέμε ότι το **όριο** της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ με τύπο, $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = a_1(\mathrm{t})\, \boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{t})\, \mathbf{j} + a_3(\mathrm{t})\, \mathbf{k}$, καθώς το t τείνει στον αριθμό t_0 είναι το διάνυσμα $\mathbf{L}$ αν και μόνο αν το όριο του $|\mathbf{F}(\mathrm{t}) - \mathbf{L}|$ είναι το μηδέν όταν το t τείνει στο t_0. Δηλ.,

$$\mathbf{L} = \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} \mathbf{F}(\mathrm{t}) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} |\mathbf{F}(\mathrm{t}) - \mathbf{L}| = 0. \qquad (2)$$

Ο ορισμός δηλώνει ότι οι συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ έχουν όρια τις συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{L}$. Δηλαδή

$$\text{αν} \quad \mathbf{L} = \mathrm{L}_1\boldsymbol{i} + \mathrm{L}_2\mathbf{j} + \mathrm{L}_3\mathbf{k} \quad \text{τότε} \quad \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} a_1(\mathrm{t}) = \mathrm{L}_1, \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} a_2(\mathrm{t}) = \mathrm{L}_2 \ \text{ και } \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} a_3(\mathrm{t}) = \mathrm{L}_3$$

Επομένως, για να βρούμε το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης, αρκεί να βρούμε τα όρια των συνιστωσών της.

Ορισμός 3. Λέμε ότι μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ με τύπο, $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = a_1(\mathrm{t})\, \boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{t})\, \mathbf{j} + a_3(\mathrm{t})\, \mathbf{k}$, είναι **συνεχής στο $\mathbf{t} = \mathbf{t_0}$**, αν

$$\text{ορίζεται στο } \mathrm{t}_0, \qquad \text{υπάρχει το } \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} \mathbf{F}(\mathrm{t}) \qquad \text{και είναι } \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}_0} \mathbf{F}(\mathrm{t}) = \mathbf{F}(\mathrm{t}_0). \qquad (3)$$

Όπως και στον ορισμό του ορίου, έτσι και με τη συνέχεια, για να είναι συνεχής η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ στο t_0 αρκεί οι συνιστώσες της να είναι συνεχείς στο t_0.

Ορισμός 4. Λέμε ότι μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ με τύπο, $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = a_1(\mathrm{t})\, \boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{t})\, \mathbf{j} + a_3(\mathrm{t})\, \mathbf{k}$, είναι **συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{D}$**, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του D.

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 1. Λέμε ότι μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ με τύπο, $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = a_1(\mathrm{t})\,\boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{t})\,\mathbf{j} + a_3(\mathrm{t})\,\mathbf{k}$, είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$, αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα της είναι παραγωγίσιμη στο $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$. Αν ισχύει αυτό τότε έχουμε,

$$\mathbf{F}'(t) = a'_1(t)\,\boldsymbol{i} + a'_2(t)\,\mathbf{j} + a'_3(t)\,\mathbf{k} \qquad (4)$$

2.2 ΑΛΥΣΙΔΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αν μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{t})$ με τύπο, $\mathbf{F}(\mathrm{t}) = a_1(\mathrm{t})\,\boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{t})\,\mathbf{j} + a_3(\mathrm{t})\,\mathbf{k}$, είναι παραγωγίσιμη, και η συνάρτηση $\mathrm{t} = \mathrm{g}(\mathrm{s})$ είναι παραγωγίσιμη ως προς s,τότε έχουμε ότι για τη σύνθετη συνάρτηση $\mathbf{F}\big(\mathrm{g}(\mathrm{s})\big)$ ισχύει ο τύπος της **αλυσιδωτής παραγώγισης**,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{t})}{\mathrm{ds}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ds}} \qquad (5)$$

Πιο αναλυτικά έχουμε ότι ,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{t})}{\mathrm{ds}} = \frac{\mathrm{d}a_1(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ds}}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}a_2(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ds}}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}a_3(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ds}}\mathbf{k}, \quad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{t})}{\mathrm{ds}} = [\frac{\mathrm{d}a_1(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}a_2(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}a_3(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\mathbf{k}]\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ds}} = [\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}]\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{ds}}. \quad (7)$$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ

3.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε σημείο $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ μιας περιοχής D συσχετίζεται με ένα διάνυσμα $\mathbf{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ τότε το σύνολο των διανυσμάτων $\mathbf{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ της περιοχής D λέγεται **διανυσματικό πεδίο** (vector field).

Τέτοια διανυσματικά πεδία συναντάμε στη φυσική την ταχύτητα, την επιτάχυνση, τη δύναμη, τα μαγνητικά πεδία, τα ηλεκτρικά πεδία, στη ροή των ρευστών, κλπ.

3.2 ΒΑΘΜΩΤΑ ΠΕΔΙΑ

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε σημείο $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ μιας περιοχής D συσχετίζεται με μία βαθμωτή ποσότητα $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ τότε η $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ λέγεται **βαθμωτή συνάρτηση** (scalar function). Επίσης λέμε ότι στην περιοχή D υπάρχει ένα **βαθμωτό πεδίο** (vector field).

Τέτοια βαθμωτά πεδία είναι στη φυσική η θερμοκρασία, το δυναμικό, κλπ.

4. ΚΛΙΣΗ – ΑΠΟΚΛΙΣΗ – ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

4.1 ΚΛΙΣΗ

Ορισμός 1. Ορίζουμε ως **διανυσματικό διαφορικό τελεστή** (vector differential operator) την έκφραση

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k} \qquad (8)$$

Το σύμβολο ∇ ονομάζεται “del” (ντέλ), ή “nabla” (νάμπλα), και δεν συναντάται ποτέ μόνο του. Είναι ένας τελεστής που αναφέρεται πάντα σε μια βαθμωτή συνάρτηση.

Παρατήρηση 1. Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση με έναν άλλο εξαιρετικά σημαντικό τελεστή, τον τελεστή Laplace που για τις δύο μεταβλητές είναι

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (9)$$

ενώ για τις τρείς μεταβλητές είναι

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (10)$$

Ορισμός 2. Αν η $f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση (scalar function), συνεχής σε μια περιοχή D του πεδίου ορισμού της, ονομάζουμε **κλίση** ή **βαθμίδα της συνάρτησης** (gradient) f, στην περιοχή D, το διάνυσμα

$$\mathrm{grad}\, f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} \qquad (11)$$

4.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ

Η γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης μιας βαθμωτής συνάρτησης είναι η εξής:

Αν έχουμε μια συνάρτηση $c = f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ στο επίπεδο, τότε η κλίση της $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ είναι ένα **διάνυσμα κάθετο στην εφαπτομένη** της καμπύλης στο σημείο (x,y).

Αν έχουμε μια συνάρτηση $c = f(\mathrm{x},\mathrm{y},z)$ στο χώρο, τότε η κλίση της $f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ είναι ένα **διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο** της επιφάνειας στο σημείο $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$.

4.3 ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 3. Για μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{x,y,z})$ με τύπο,

$$\mathbf{F}(\mathrm{x,y,z}) = a_1(\mathrm{x,y,z})\boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{x,y,z})\mathbf{j} + a_3(\mathrm{x,y,z})\mathbf{k},$$

ορίζουμε ως **απόκλιση** της συνάρτησης (div) την ποσότητα,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \qquad (12)$$

(Εσωτερικό γινόμενο του “del” με την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$).

4.4 ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 3. Για μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(\mathrm{x,y,z})$ με τύπο,

$$\mathbf{F}(\mathrm{x,y,z}) = a_1(\mathrm{x,y,z})\boldsymbol{i} + a_2(\mathrm{x,y,z})\mathbf{j} + a_3(\mathrm{x,y,z})\mathbf{k},$$

ορίζουμε ως **στροβιλισμό** ή **περιστροφή** της συνάρτησης (rot) το διάνυσμα,

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (13)$$

(Εξωτερικό γινόμενο του “del” με την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$).

4.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΛΙΣΗΣ, ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ, ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΥ

Για δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(\mathrm{x,y},z)$ και $g(\mathrm{x,y,z})$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για την κλίση:

a) $\nabla(kf) = \mathrm{k}\nabla(f)$ (14)
b) $\nabla(f+g) = \nabla(f) + \nabla(g)$ (15)
c) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$ (16)

Θεώρημα 4.5.1. Για κάθε συνάρτηση $f(\mathrm{x,y},z)$, ο στροβιλισμός κάθε κλίσης είναι το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή,

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \qquad (17)$$

Θεώρημα 4.5.2. Για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(\mathrm{x,y,z})$, η απόκλιση κάθε στροβιλισμού είναι μηδέν, δηλαδή,

$$\mathrm{div\ rot}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (18)$$

Αν rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, **(**$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$**)** τότε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι **αστρόβιλο**.

Αν div $\mathbf{F} = 0$, **(**$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$**)** τότε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ονομάζεται **σωληνοειδές**.

ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Ένας σημαντικός αριθμός ασκήσεων αναφέρεται στην παράγωγο κατά κατεύθυνση μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$, η οποία ορίζεται ως

$$D_a f = \nabla f \bullet \boldsymbol{\alpha} . \qquad (1)$$

Εδώ $\boldsymbol{\alpha}$ είναι η διανυσματική μονάδα που καθορίζει την κατεύθυνση και ∇f είναι η κλίση της συνάρτησης $f(x, y, z)$, που ορίζεται ως

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z , \qquad (2)$$

όπου $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ είναι οι διανυσματικές μονάδες κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x,y,z αντίστοιχα. Είναι σαφές ότι η ποσότητα (1) είναι το αριθμητικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Επομένως, είναι μια αριθμητική ποσότητα.

1. Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 y - yz^3 + z \qquad (1.1)$$

στο σημείο $P(1,-2,0)$, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{u}= 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y -2\boldsymbol{e}_z$.

Λύση: Η κλίση της συνάρτησης (1.1) είναι

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = 2xy\boldsymbol{e}_x + \left(x^2 - z^3\right)\boldsymbol{e}_y + \left(1 - 3yz^2\right)\boldsymbol{e}_z .$$

Στο σημείο $P(1,-2,0)$ έχει την τιμή

$$\left(\nabla f\right)_P = -4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 1\boldsymbol{e}_z .$$

Η διανυσματική μονάδα κατά την κατεύθυνση διανύσματος $\boldsymbol{u}$ είναι

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z}{3} . \qquad (1.2)$$

Τελικά η παράγωγος της συνάρτησης (1.1) κατά την ζητούμενη κατεύθυνση στο σημείο $P(1,-2,0)$ είναι

$$D_a f = \left(\nabla f\right)_P \bullet \boldsymbol{\alpha} = \frac{-8+1-2}{3} = -3 .$$

Προσοχή: Δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι το $\boldsymbol{\alpha}$ στην σχέση (1) είναι διανυσματική μονάδα.

Άσκηση 2. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (2.1)$$

στο σημείο $P(1,0)$, κατά την κατεύθυνση της ευθείας διανύσματος $2x-y-1=0$ (προς τα θετικά y).

Λύση: Η κλίση της συνάρτησης (2.1) είναι

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y=\left[\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\boldsymbol{e}_x+\left[\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\boldsymbol{e}_y$$

Στο σημείο $P(1,0)$ έχει την τιμή

$$\left(\nabla f\right)_P=0\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\,. \qquad (2.2)$$

Η διανυσματική μονάδα κατά την κατεύθυνση της δοθείσης ευθείας είναι

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{5}}\,. \qquad (2.3)$$

$$D_{\boldsymbol{\alpha}}f=\left(\nabla f\right)_P\bullet\boldsymbol{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Έστω

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=f_1(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+f_2(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+f_3(x,y,z)\boldsymbol{e}_z \qquad (1)$$

μια διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στον τόπο $D\subset R^3$. Η **απόκλισή** της διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ που συμβολίζεται με $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$, είναι η ποσότητα

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\,. \qquad (2)$$

Ένα διανυσματικό πεδίο f για τα οποίο ισχύει $\mathrm{div}\boldsymbol{f}=0$ ονομάζεται **ασυμπίεστο**.

Άσκηση 3. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των παραμέτρων α, β,γ ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=(ax+3yz)\boldsymbol{e}_x+(xz+\beta y)\boldsymbol{e}_y+(xy+\gamma z)\boldsymbol{e}_z \qquad (3.1)$$

να είναι ασυμπίεστο.

Λύση: Η κλίση της συνάρτησης (3.1) είναι

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=a+\beta+\gamma\,.$$

Επομένως η ζητούμενη σχέση είναι η $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη διανυσματική συνάρτηση (1). Ονομάζουμε **στροφή** της διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ και τη συμβολίζουμε με $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$, την ποσότητα

$$\mathrm{rot}\mathbf{f}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z\,. \qquad (3)$$

Η στροφή είναι μια διανυσματική συνάρτηση η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξωτερικό γινόμενο με τον ακόλουθο τρόπο

$$\text{rot}\,\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Είναι φανερό ότι η (4) προκύπτει από τη σχέση (3) αν αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.
Ένα διανυσματικό πεδίο f για τα οποίο ισχύει $\text{rot}\boldsymbol{f} = 0$ ονομάζεται **αστρόβιλο**.

Άσκηση 4. Να προσδιοριστούν οι σταθερές a,b, c ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x + 2y + az)\boldsymbol{e}_x + (bx - 3y - z)\boldsymbol{e}_y + (4x + cy + 2z)\boldsymbol{e}_z$$

να είναι αστρόβιλο.

Λύση: Θα πρέπει

$$\text{rot}\,\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + az & bx - 3y - z & 4x + cy + 2z \end{vmatrix} =$$

$$= (c+1)\boldsymbol{e}_x + (a-4)\boldsymbol{e}_y + (b-2) = 0\,.$$

Επομένως βρίσκουμε a=4,b=2, c=-1 .

Άσκηση 5. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{f}$=$\boldsymbol{r}/r^2$ είναι αστρόβιλο. Στη συνέχεια να βρεθεί συνάρτηση φ τέτοια ώστε $\boldsymbol{f} = -\nabla\varphi$ με $\varphi(a) = 0,\ a > 0$.

Λύση: Έχουμε

$$\boldsymbol{f} = \frac{\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z\right)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Είναι

$$f_1 = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},\ f_2 = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},\ f_3 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{5.1}$$

Ισχύει όμως

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{-2yz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2},\quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{-2xz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} \tag{5.2}$$

και σύμφωνα με την (3) προκύπτει $\text{rot}\mathbf{f} = 0$.

Οι σχέσεις όμως (5.2) δηλώνουν ότι υπάρχει συνάρτηση φ τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{f} = -\nabla\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right], \quad (5.3)$$

όπου

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -f_1\,, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -f_2\,, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -f_3\,. \quad (5.4)$$

Το διαφορικό της συνάρτησης φ είναι

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+, \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+, \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = -[f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz] =$$

$$-\frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{1}{2}d\left\{\ln\left[x^2 + y^2 + z^2\right]\right\} = -\frac{1}{2}d\left[\ln r^2\right]. \quad (5.5)$$

Ολοκληρώνοντας την (5.5) βρίσκουμε $\varphi = \ln(a/r)$, όπου α είναι θετική σταθερή.

2. Ασκήσεις προς λύση

Άσκηση Α1. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης

$$f(x, y) = 4x^2 y,$$

στο σημείο $P(1,-2)$.

Απάντηση: $\boldsymbol{\alpha} = \pm\frac{(-4\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)}{\sqrt{17}}$.

Άσκηση Α2. Ένας σκιέρ κατεβαίνει ένα λόφο που η επιφάνειά του περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f(x, y) = 3x^2 y - xy, \quad (A2.1)$$

Προς ποία κατεύθυνση πρέπει να στρίψει τα πέδιλα του σκι ώστε να συναντήσει τη μικρότερη κλίση επάνω στην ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης (Α2.1) στο επικίνδυνο σημείο $P(1,2)$; (Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που θα καθορίζει την ζητούμενη κατεύθυνση)

Απάντηση: $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{e}_x - 5\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{26}}$.

Άσκηση Α3. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = e^{xy},$$

στο σημείο $P(-2,0)$ κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος που σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον θετικό άξονα x.

Απάντηση: $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{e}_x + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_y}{2}$.

Άσκηση Α4. Να βρεθεί η Λαπλασιανή της συνάρτησης

$$\varphi(r) = \ln r.$$

Απάντηση: $\nabla^2\varphi = 1/r$.

Άσκηση Α5. Αν

$$\sigma = x^{\mathrm{n}} + y^{\mathrm{n}} + z^{\mathrm{n}},$$

όπου n σταθερή, δείξτε ότι $\boldsymbol{r} \bullet \nabla\sigma = \mathrm{n}\sigma$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Το Κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει στην ουσία και της ευκολότερες ασκήσεις του μαθήματος.Η θεωρία στην οποία βασίζεται είναι εύκολη και συνοψίζεται σε ορισμένες βασικές εξισώσεις .

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

η οποία παριστάνει μια επιφάνεια στο χώρο R^3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F είναι διαφορίσιμη με συνεχείς μερικές παραγώγους στον τόπο ορισμού της. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια (1) ,στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$, είναι η

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P (z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

ενώ η εξίσωση της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια (1), στο σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P}. \qquad (3)$$

Έστω τώρα

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = x(t) \qquad (4)$$

οι παραγωγίσιμες παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης C στο χώρο R^3 και

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z \qquad (5)$$

η διανυσματική εξίσωση της καμπύλης C. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας και του κάθετου επιπέδου της καμπύλης C στο σημείο $P(x_0, y_0,z_0)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_P} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_P} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_P}, \qquad (6)$$

για την εφαπτόμενη ευθεία και

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_P (x - x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_P (y - y_0) + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_P (z - z_0) = 0. \qquad (7)$$

για το κάθετο επίπεδο.

1. Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας της επιφάνειας

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \tag{1.1}$$

στο σημείο $P(2,-1,5)$.

Λύση: Απλή αντικατάσταση στους τύπους (2) και (3) δίνει

$$4x - 2y - z = 5\,,$$

για το εφαπτόμενο επίπεδο και

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{-1}$$

για την κάθετη ευθεία.

Άσκηση 2. Να βρεθούν όλα τα σημεία της επιφάνειας

$$F(x, y, z) = x^3 y^2 - z = 0$$

στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

Λύση: Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου είναι η

$$3x^2 y^2 (x - x_0) + 2x^3 y (y - y_0) - (z - z_0) = 0\,. \tag{2.1}$$

Από την (2.1) φαίνεται ότι για όλα τα σημεία του άξονα των x(y=0) και για όλα τα σημεία του άξονα των y(x=0) έχουμε $z=z_0$, που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας και του καθέτου επιπέδου της καμπύλης C της οποίας οι παραμετρικές εξισώσεις είναι

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$$

στο σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$ που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 1$.

Λύση: Εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = 2, \quad y = z - 1$$

ενώ η εξίσωση του καθέτου επιπέδου είναι η

$$y + z - 7 = 0\,.$$

2. Ασκήσεις προς λύση

Άσκηση Α1. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας

$$xz^2 + x^2 y = z - 1$$

στο σημείο $P(1,-3,2)$.

Απάντηση: $2x - y - 3z + 1 = 0.$

Άσκηση Α2. Να προσδιοριστούν οι σταθερές a, b ώστε οι επιφάνειες

$$ax^2 - byz = (a+2)x \quad \text{και} \quad 4x^2 y + z^3 = 4$$

να είναι ορθογώνιες στο σημείο στο σημείο $P(1,-1,2)$.

Απάντηση: $a = 5/2, \quad b = 1$.

Άσκηση Α3. Να βρεθεί (i) η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας και (ii) του καθέτου επιπέδου της κυκλικής έλικας

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = t$$

στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ που αντιστοιχεί στην τιμή $t = 2\pi$.

Απάντηση: $(i)\ x = 2, \quad y = 2z - 4\pi \qquad (ii)\ 2y + z - 2\pi = 0$.

Άσκηση Α4. Ποια είναι η εξίσωση του οριζόντιου εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

και ποιο είναι στο σημείο επαφής ;

Απάντηση: $z = -31, \quad P(-4,1,-31)$

Άσκηση Α5. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας

$$ax^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = c,$$

στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$.

Απάντηση: $ax_0 x + \beta y_0 y + \gamma z_0 z = 0.$

ΑΚΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Οι συχνότερα εμφανιζόμενες ασκήσεις στο Κεφάλαιο αυτό αναφέρονται στις άκρες τιμές των συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Μπορούμε να συνοψίσουμε την διαδικασία εύρεσης άκρων τιμών, μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f = f(x,y)$, στα ακόλουθα.

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

Θεωρούμε τα κρίσιμα σημεία τα οποία ανήκουν στον τόπο ορισμού της συνάρτησης. Έστω $P(x_0, y_0)$ ένα κρίσιμο σημείο. Θέτουμε

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_P = A, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_P = B, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_P = \Gamma . \qquad (2)$$

2. Βρίσκουμε την τιμή της ποσότητας

$$\Delta = B^2 - A\Gamma \qquad (3)$$

σε κάθε ένα από τα κρίσιμα σημεία.

(i) Αν $\Delta<0$, έχουμε άκρα τιμή. Σχετικό ελάχιστο αν $A>0$, ($\Gamma>0$) ή σχετικό μέγιστο αν $A<0$, ($\Gamma<0$).
(ii) Αν $\Delta>0$, έχουμε σαγματικό σημείο.
(iii) Αν $\Delta=0$,έχουμε απροσδιοριστία και χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση.

3.Εφόσον υπάρχουν άκρες τιμές, αυτές βρίσκονται αντικαθιστώντας στην συνάρτηση τις τιμές των συντεταγμένων των κρίσιμων σημείων.

Ας δούμε μερικές ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = a^2x^3 + y^2 - x - y, \qquad a \neq 0. \qquad (1.1)$$

Ποια είναι η μορφή της των ισοσταθμικών καμπύλων της επιφάνειας (1.1) όταν a=1;

Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης (1.1) δίνονται από τη λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + 3a\ x^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2ay = 0\,. \qquad (1.2)$$

Από τη λύση του συστήματος (1.2) προκύπτουν τα σημεία $P_1\left(-1/a\sqrt{3}, 1/2a\right)$ και $P_2\left(1/a\sqrt{3}, 1/2a\right)$. Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6a^2 x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a\,. \qquad (1.3)$$

Για το σημείο P_1 είναι

$$A = -2\alpha\sqrt{3}, \quad B = 0, \quad \Gamma = 2a \quad \text{και} \quad \Delta = B^2 - A\Gamma = 4a^2\sqrt{3} > 0\,.$$

Επομένως το σημείο P_1 είναι σαγματικό. Για το σημείο P_2 έχουμε

$$A = 2\alpha\sqrt{3}, \quad B = 0, \quad \Gamma = 2a \quad \text{και} \quad \Delta = B^2 - A\Gamma = -4a^2\sqrt{3} < 0\,.$$

Επομένως στο σημείο P_2 η συνάρτηση έχει άκρα τιμή. Είναι δε σχετικό ελάχιστο αν $\alpha>0$ και σχετικό μέγιστο αν $\alpha<0$.

Οι ισοσταθμικές καμπύλες της επιφάνειας (1.1) για $\alpha=1$ φαίνονται στο Σχήμα1. Παρατηρούμε ότι το σημείο που αντιστοιχεί σε άκρα τιμή περιβάλλεται από κλειστές καμπύλες που μοιάζουν με ελλείψεις ενώ το σαγματικό από καμπύλες που μοιάζουν με υπερβολές.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση (1.1) περιγράφει την επίπεδη κίνηση ενός σωματιδίου με μάζα ίση με τη μονάδα. Στη Φυσική το πρώτο σημείο ονομάζεται ελλειπτικό και δηλώνει ευσταθή ισορροπία ενώ το δεύτερο σημείο ονομάζεται υπερβολικό και δηλώνει ασταθή ισορροπία.

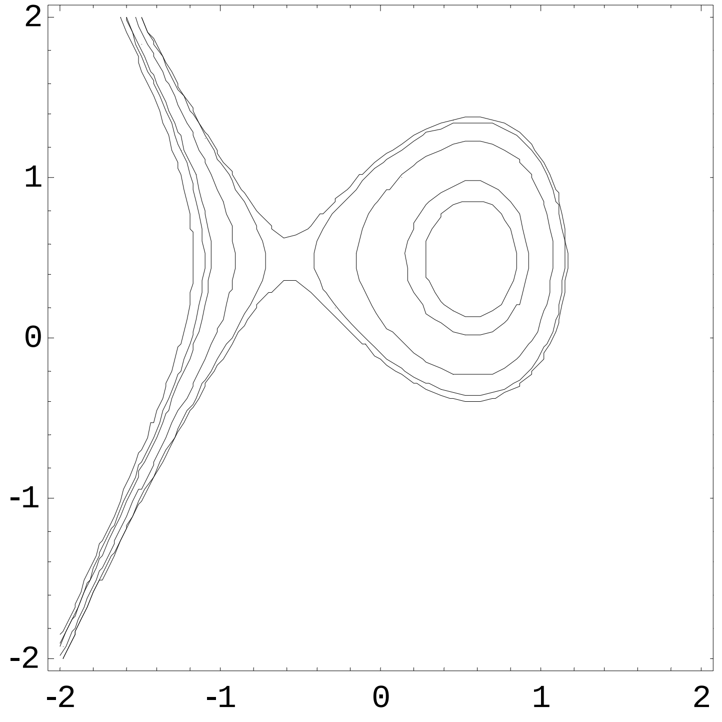
Άσκηση 2. Η κατανομή της θερμοκρασίας σε μια επίπεδη τετράγωνη πλάκα δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = x^3 - xy^2 - x^2 - y^2. \qquad (2.1)$$

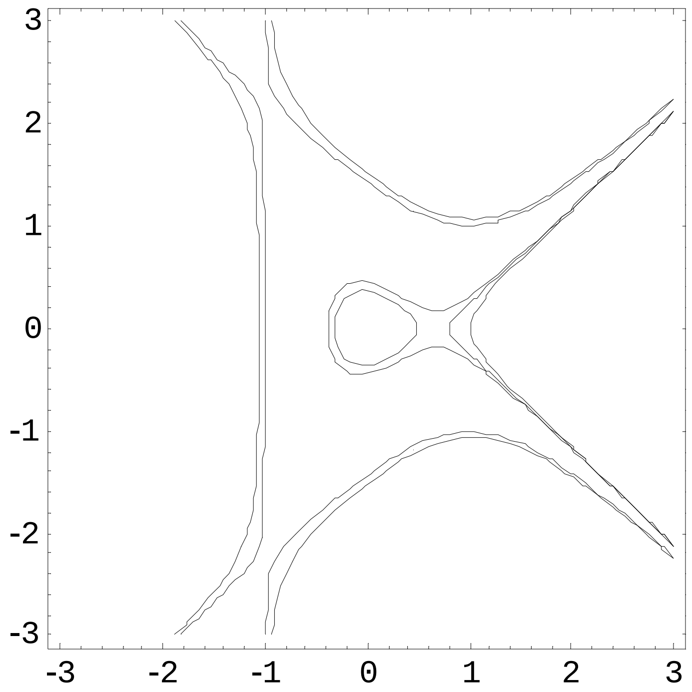
Ένα έντομο προτιμά να κάθεται στα κρίσιμα σημεία της πλάκας που δεν είναι ούτε μέγιστα ούτε ελάχιστα. Πόσα και ποια σημεία θα επισκεφθεί το έντομο επάνω στην πλάκα;

Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης (1.1) δίνονται από τη λύση του συστήματος

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 - y^2 - 2x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -2y - 2xy = 0\,. \qquad (2.2)$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Από τη λύση του συστήματος (2.2) προκύπτουν τα σημεία $P_1(0,0), P_2(2/3,0)$, $P_3(-\sqrt{5},-1)$, $P_4(\sqrt{5},-1)$. Επίσης είναι

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 6x - 2, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x - 2\,. \qquad (2.3)$$

Εύκολα προκύπτει ότι για τα σημεία P_2, P_3, P_4 είναι Δ>0 και επομένως είναι σαγματικά .Για το σημείο P_1 προκύπτει Δ=–4, Α== –2, δηλαδή είναι σχετικό μέγιστο. Επομένως το έντομο θα επισκεφτεί τα τρία σαγματικά σημεία P_2, P_3, P_4 .

Στο Σχήμα 2 φαίνεται μια παράσταση της πλάκας με τα τρία σαγματικά σημεία και το κέντρο της που αντιστοιχεί σε σχετικό μέγιστο.

Άλλη μια σημαντική κατηγορία ασκήσεων είναι αυτή που αναφέρεται σε άκρες τιμές συναρτήσεων δύο μεταβλητών που υπόκεινται σε ένα δεσμό. Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να βρούμε τις άκρες τιμές της συνάρτησης $f = f(x,y)$, που υπόκειται στο δεσμό $\varphi(x,y) = 0$. Τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \qquad (4)$$

όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης F λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x,y) = 0\,. \qquad (5)$$

Έστω $P(x_0, y_0)$ ένα κρίσιμο σημείο και , λ_0 η αντίστοιχη τιμή του λ. Θέτουμε

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_P = A, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_P = B, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_P = \Gamma\,. \qquad (6)$$

2.Βρίσκουμε την τιμή της ποσότητας

$$\Delta = B^2 - A\Gamma \qquad (7)$$

σε κάθε ένα από τα κρίσιμα σημεία.

(i) Αν $\Delta<0$, έχουμε άκρα τιμή. Σχετικό ελάχιστο αν $A>0$, ($\Gamma>0$) ή σχετικό μέγιστο αν $A<0$, ($\Gamma<0$).
(ii) Αν $\Delta>0$, έχουμε δεν έχουμε άκρα τιμή.
(iii) Αν $\Delta=0$,έχουμε απροσδιοριστία και χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση.

3.Οι άκρες τιμές, της συνάρτησης (4) αντιστοιχούν στις άκρες τιμές της $f(x,y)$, που υπόκειται στη δέσμευση $\varphi(x,y) = 0$.

Ας δούμε την επόμενη άσκηση

Άσκηση 3. Να βρεθούν οι άκρες τιμές της συνάρτησης

$$f(x,y) = x + 2y\,, \tag{3.1}$$

οι οποίες πληρούν την συνθήκη

$$\phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\,. \tag{3.2}$$

Στη συνέχεια δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος .

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x,y,\lambda) = f + \lambda\phi = x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right), \tag{3.3}$$

όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της (3.3) και τις τιμές του λ που αντιστοιχούν σε αυτά, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2y\lambda = 0, \quad x^2 + y^2 = 1\,.$$

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι

$$\text{(i)} \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}\,,$$

$$\text{(ii)} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}\,,$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0\,.$$

Άρα έχουμε

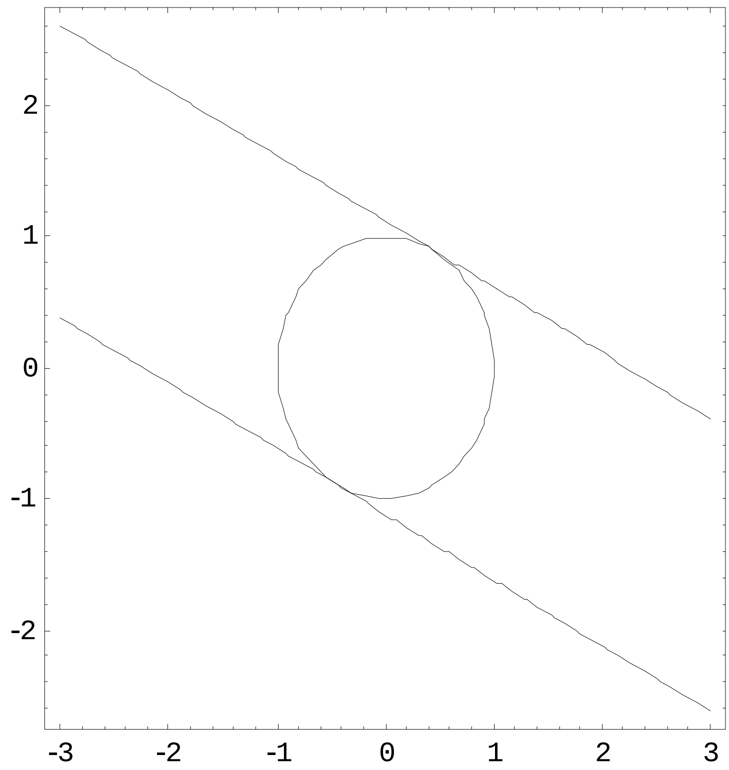
$$A = \Gamma = 2\lambda, \quad B = 0, \quad \Delta = B^2 - A\Gamma = -4\lambda^2 < 0\,.$$

Επομένως το πρώτο σημείο αντιστοιχεί σε σχετικό μέγιστο ενώ το δεύτερο σημείο αντιστοιχεί σε σχετικό ελάχιστο της (3.3) και σε δεσμευμένο μέγιστο και δεσμευμένο ελάχιστο της της $f(x,y)$ αντίστοιχα.

Η γεωμετρική ερμηνεία της άσκησης φαίνεται στο Σχήμα 3. Οι ισοσταθμικές της συνάρτησης $f(x,y)$ που διέρχονται από τα δύο κρίσιμα σημεία (i) και (ii) είναι οι

$$x + 2y = \pm\sqrt{5}\,. \tag{3.4}$$

Οι ευθείες (3.4) παρουσιάζουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή επάνω στον κύκλο (3.2) και εφάπτονται αυτού στα εν λόγω σημεία.



Σχήμα 3

Άσκηση 4. Τα κέρδη μιας επιχείρησης, λογιστικές μονάδες δίνονται από τη συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\,, \tag{4.1}$$

και υπόκεινται στη φορολογική δέσμευση

$$\phi(x,y) = x + y - 1 = 0\,. \tag{4.2}$$

Να βρεθούν, αν υπάρχει, μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του ποσού των κερδών της επιχείρησης.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x,y,\lambda) = f + \lambda\phi = x^2 + y^2 - xy + \lambda(x + y - 1), \tag{4.3}$$

όπου λ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της (4.3) και τις τιμές του λ που αντιστοιχούν σε αυτά, λύνοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x + 2y + \lambda = 0, \quad x + y = 1\,.$$

Οι λύση του συστήματος είναι

$$x = y = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = -\frac{1}{2},$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -1.$$

Άρα έχουμε

$$A = \Gamma = 2, \quad B = -1, \quad \Delta = B^2 - A\Gamma = -3 < 0.$$

Επομένως το έχουμε δεσμευμένο ελάχιστο της (4.1) $f_{\min}$= 1/4. Με άλλα λόγια η ελάχιστη τιμή των κερδών της επιχείρησης είναι 1/4 λογιστικές μονάδες.

Άσκηση 5. Ο παγκόσμιος πρωταθλητής παίζει σκάκι με ένα ισχυρό Η/Υ. Υποθέτουμε ότι η κατάσταση του παιγνιδιού, σε ένα κρίσιμο σημείο, περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y \qquad (5.1)$$

Ο παίχτης έχει στη διάθεσή του τέσσερα τετράγωνα για να μετακινήσει το βασιλιά του.Αυτά αντιστοιχούν στα ακόλουθα σημεία: $M_1(1,1), M_2(-1,1/3)$, $M_3(1/2,-1), M_4(1/2,1)$. Από αυτά δύο δεν είναι καν κρίσιμα σημεία της (5.1), ένα είναι σαγματικό και ένα αντιστοιχεί σε σχετικό μέγιστο της (5.1), που δίνει τη νίκη στον σκακιστή. Στα μη κρίσιμα σημεία χάνει ο παίχτης, στο δε σαγματικό φέρνει ισοπαλία. Ποιο σημείο πρέπει να επιλέξει ο πρωταθλητής για να νικήσει ;

Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης (5.1) δίνονται από τη λύση του συστήματος

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2} = 0. \qquad (5.2)$$

και είναι τα εξής:

$$P_1(-1/2,-1), P_2(-1/2,1), P_3(1/2,-1), P_4(1/2,1) \qquad (5.3)$$

Εξάλλου βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Από την (5.3) αμέσως προκύπτει ότι στα σημεία M_1 και M_2 θα χάσει ο πρωταθλητής. Για το σημείο M_4 έχουμε $\Delta = 32 > 0$ επομένως είναι σαγματικό. Απομένει το σημείο $M_3(1/2,-1)$ για το οποίο έχουμε

$$A = -16, \quad \Gamma = -2, \quad B = 0, \quad \Delta = B^2 - A\Gamma = -32 < 0.$$

Επομένως έχουμε σχετικό μέγιστο της συνάρτησης και αυτό είναι και το ζητούμενο σημείο. Ο πρωταθλητής θα μετακινήσει τον βασιλιά του στο τετράγωνο που αντιστοιχεί στο σημείο $M_3(1/2,-1)$ και θα νικήσει.

3. Ασκήσεις προς λύση

Άσκηση Α1. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2}{xy}.$$

Απάντηση: Σχετικά ελάχιστα στα σημεία $P_1(-1,-1)$ και $P_2(1,1)$.

Άσκηση Α2. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y} \qquad \text{(A2.1)}$$

έχει μόνο ένα κρίσιμο σημείο και αυτό αντιστοιχεί σε σχετικό ελάχιστο της συνάρτησης (Α2.1)

Άσκηση Α3. Να βρεθούν τρεις θετικοί αριθμοί με άθροισμα 48 και μέγιστο γινόμενο.

Απάντηση: 16,16,16.

Άσκηση Α4. Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου

$$x+2y+z=1$$

που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των συντεταγμένων.

Απάντηση: (1/6,1/3,1/6).

Άσκηση Α5. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου $x^2+y^2=45$ που βρίσκονται πλησιέστερα και μακρύτερα το σημείο $P(1,2)$.

Απάντηση: Πλησιέστερα το σημείο (3,6) μακρύτερα το σημείο (-3,-6).