Τοπικά ακρότατα συνάρτησης δύο ή τριών μεταβλητών:

$$D_1 = f_{xx},\ \ D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix},\ \ D_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

Για δύο μεταβλητές:

Αν $P(x_0, y_0)$, $f_x(P) = 0, f_y(P) = 0$, και

i) $D_2(P) > 0,\ D_1(P) > 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $P(x_0, y_0)$

ii) $D_2(P) > 0,\ D_1(P) < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο $P(x_0, y_0)$

iii) $D_2(P) < 0$ το $P(x_0, y_0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Για τρείς μεταβλητές:

Αν $P(x_0, y_0, z_0)$, $f_x(P) = 0, f_y(P) = 0, f_z(P) = 0$ και

i) $D_1(P) > 0,\ D_2(P) > 0,\ D_3(P) > 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $P(x_0, y_0)$

ii) $D_1(P) < 0,\ D_2(P) > 0,\ D_3(P) < 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο $P(x_0, y_0)$

Παράδειγμα1. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$.

Λύση:

$f_x = 3x^2 + 3y,\ f_y = -3y^2 + 3x,$ $\quad \begin{cases} f_\chi = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0(0{,}0) \\ P_1(1,-1) \end{cases}$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = f_{yx} = 3, f_{yy} = -6y.$

Για το $P_0(0{,}0)$ είναι $f_{xx}(P_0) = 0,\ f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0) = 3,\ f_{yy}(P_0) = 0,$

$D_2(P_0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$. Άρα το $P_0(0{,}0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Για το $P_1(1,-1)$ είναι $f_{xx}(P_1) = 6,\ f_{xy}(P_1) = f_{yx}(P_1) = 3,\ f_{yy}(P_1) = 6,$

$D_1(P_1) = 6 > 0,\ D_2(P_1) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$. Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $P_1(1,-1)$, το $f(P_1) = 1^3 - (-1)^3 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$

Παράδειγμα 2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = 2xz - 3x^2 - 2y^2 - z^2 + 7$.

Λύση:

$f_x = 2z - 6x, f_y = -4y, f_z = 2x - 2z, f_{xx} = -6,\ f_{yx} = 0, f_{zx} = 2, f_{xy} = 0,\ f_{yy} = -4, f_{zy} = 0, f_{xz} = 2,\ f_{yz} = 0, f_{zz} = -2,$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0(0,0,0)$$

$f_{xx}(P_0) = -6,\ f_{yx}(P_0) = 0, f_{zx}(P_0) = 2, f_{xy}(P_0) = 0,\ f_{yy}(P_0) = -4, f_{zy}(P_0) = 0, f_{xz}(P_0) = 2,\ f_{yz}(P_0) = 0, f_{zz}(P_0) = -2,$

$D_1(P_0) = -6 < 0,\ D_2(P_0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24 > 0,\ D_3(P_0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -32 < 0.$

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο $P_0(0,0,0)$, το $f(P_0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^2 - 0^2 + 7 = 7$