ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο τη μελέτη μαθηματικών υποδειγμάτων (προτύπων ή μοντέλων), γνωστών ως *στοχαστικών υποδειγμάτων*, τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των *στοχαστικών (ή τυχαίων) πειραμάτων (ή φαινομένων)*. Βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων αυτών είναι ότι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Στην αδυναμία προκαθορισμού του αποτελέσματος έγκειται το στοιχείο της τυχαιότητας. Έτσι η ρίψη ενός νομίσματος ή ενός κύβου και η παρατήρηση του αποτελέσματος, όπως και η παρατήρηση του φύλου νεογέννητου σε μία σειρά γεννήσεων αποτελούν στοχαστικά (τυχαία) πειράματα (ή φαινόμενα).

Όταν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται ένα πείραμα ή εμφανίζεται ένα φαινόμενο καθορίζουν το αποτέλεσμα, το πείραμα ή το φαινόμενο είναι γνωστό ως *αιτιοκρατικό (ή προσδιοριστικό)*. Για την περιγραφή τούτων αρκούν τα *αιτιοκρατικά (ή προσδιοριστικά) μαθηματικά υποδείγματα (πρότυπα ή μοντέλα)* τα οποία αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης άλλων κλάδων της επιστήμης. Οι νόμοι της βαρύτητας που περιγράφουν την πτώση ενός σώματος αποτελούν ένα τέτοιο μαθηματικό υπόδειγμα (μοντέλο).

2. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Ας θεωρήσουμε ένα στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα (ή φαινόμενο). Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, στην εισαγωγή, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμά του αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του. Σχετικά σημειώνουμε ότι:

Σύνολο καλείται μία καλώς ορισμένη συλλογή διακεκριμένων στοιχείων. Τα σύνολα συμβολίζουμε με τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου με δείκτες ή χωρίς δείκτες και τα στοιχεία που τα αποτελούν με τα μικρά (πεζά) γράματα. Το γεγονός ότι το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο A σημειώνουμε με $\alpha \in A$, ενώ το γεγονός ότι το στοιχείο α δεν ανήκει στο σύνολο A σημειώνουμε με $\alpha \notin A$. Ένα σύνολο A καλείται *υποσύνολο* ενός συνόλου B αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται με $A \subseteq B$. Αν $A \subseteq B$ και υπάρχει στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A καλείται γνήσιο υποσύνολο του B. Για την περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $A \subset B$. Το $A \subseteq B$ δεν αποκλείει και το $B \subseteq A$. Στην περίπτωση που ισχύουν και οι δύο αυτές σχέσεις τα σύνολα A

και B αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία και καλούνται *ίσα* και τούτο συμβολίζεται με $A = B$.

Μετά την εισαγωγή των εννοιών αυτών θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1. *Δειγματικός χώρος Ω ενός στοχαστικού (ή τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του. Ένα στοιχείο ω του δειγματικού χώρου Ω καλείται δειγματικό σημείο.*

Ας σημειωθεί ότι σε ένα στοχαστικό πείραμα είναι δυνατό, ανάλογα με τον καθορισμό των δυνατών αποτελεσμάτων, να ορισθούν περισσότερα από ένα σύνολα δυνατών αποτελεσμάτων. Στην περίπτωση αυτή ανάλογα με τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος λαμβάνεται το καταλληλότερο απ' αυτά ως δειγματικός χώρος. Πολλά παράδοξα έχουν προκύψει από τη μη κατάλληλη επιλογή δειγματικού χώρου. Το σημείο αυτό διευκρινίζεται περισσότερο στα παραδείγματα. Σημειώνουμε ακόμη ότι ο δειγματικός χώρος Ω ενός στοχαστικού πειράματος είναι είτε *πεπερασμένος*: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ είτε *αριθμησίμως άπειρος*: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ είτε *μη αριθμήσιμος*. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο δειγματικός χώρος Ω καλείται γενικά *διακριτός* (ή *απαριθμητός*) και στην τρίτη περίπτωση *συνεχής*.

Ορισμός 2.2. *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού πειράματος. Ένα υποσύνολο A του Ω καλείται ενδεχόμενο (ως προς το δειγματικό χώρο Ω). Ειδικά ο δειγματικός χώρος Ω καλείται βέβαιο ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ καλείται αδύνατο ενδεχόμενο.*

Ένα ενδεχόμενο $A = \{\omega\}$, που περιέχει ένα μόνο στοιχείο ω του δειγματικού χώρου Ω, καλείται *απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο* ενώ ένα ενδεχόμενο που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του δειγματικού χώρου καλείται *σύνθετο ενδεχόμενο*.

Σε μία εκτέλεση ενός στοχαστικού πειράματος με δειγματικό χώρο Ω *ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται* αν και μόνο αν το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του πειράματος αυτού είναι στοιχείο ω που ανήκει στο A.

Ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών, παρουσιάζουν ενδεχόμενα τα οποία προκύπτουν μετά από συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ ενδεχομένων. Τα βασικότερα από τα ενδεχόμενα αυτά είναι τα ακόλουθα.

Η *ένωση* δύο ενδεχομένων (συνόλων) A και B (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ή } \omega \in B\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ενδεχόμενα A και B. Γενικότερα, η ένωση των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για έναν τουλάχιστο δείκτη } j = 1, 2, ..., \nu\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ν ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_\nu$. Περαιτέρω, η ένωση των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cup \cdots = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για έναν τουλάχιστο δείκτη } j = 1, 2, ...\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$.

Η *τομή* δύο ενδεχομένων (συνόλων) A και B (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A \cap B = AB \equiv \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ και } \omega \in B\},$$

της πραγματοποίησης και των δύο ενδεχομένων A και B. Γενικότερα, η τομή των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu \equiv A_1 A_2 \cdots A_\nu$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για όλους τους δείκτες } j = 1, 2, ..., \nu\},$$

της πραγματοποίησης και των ν ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$. Περαιτέρω, η τομή των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu \cap \cdots \equiv A_1 A_2 \cdots A_\nu \cdots$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για όλους τους δείκτες } j = 1, 2, ...\},$$

της πραγματοποίησης όλων των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$.

Αν η τομή των ενδεχομένων A και B είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, $A \cap B = \varnothing$, τότε τα A και B καλούνται *ξένα* ή *αμοιβαίως αποκλειόμενα (ή ασυμβίβαστα)* ενδεχόμενα. Στην περίπτωση αυτή η πράξη της ένωσης παριστάνεται με το σύμβολο $+$ ή $\sum$ αντί του συμβόλου $\bigcup$.

Το *συμπλήρωμα* ενός ενδεχομένου A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A' = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\},$$

της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου A. Το ενδεχόμενο A' καλείται *αντίθετο* του ενδεχομένου A.

Η *διαφορά* του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ και } \omega \notin B\},$$

της πραγματοποίησης του ενδεχομένου A και της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου B. Σημειώνουμε ότι $A - B = A \cap B'$.

Σχηματικά διαγράμματα είναι συχνά χρήσιμα για την εποπτική παράσταση σχέσεων μεταξύ συνόλων (ενδεχομένων). Τέτοια διαγράμματα είναι τα γνωστά ως διαγράμματα του Venn στα οποία το καθολικό σύνολο (δειγματικός χώρος) Ω ορίζεται από μία περιοχή του επιπέδου που περικλείει τα στοιχεία του, τα οποία ορίζονται από γεωμετρικά σημεία του επιπέδου αυτού. Τα υποσύνολα του Ω ορίζονται από υποπεριοχές του. Στα διαγράμματα Venn των Σχημάτων 2.1-2.4 δίδονται σκιασμένα τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A' = \Omega - A$ και $A - B$ αντίστοιχα.

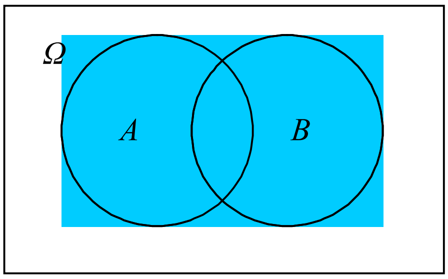
Το καρτεσιανό γινόμενο αποτελεί μία συνολοθεωρητική κατασκευή χρήσιμη τόσο στην έκφραση του δειγματικού χώρου συνθέτου τυχαίου πειράματος, το οποίο συντίθεται από ακολουθίες απλών τυχαίων πειραμάτων ή δοκιμών απλού τυχαίου πειράματος, όσο και ενδεχομένων ως προς αυτόν. Έστω Ω_1 και Ω_2 δύο σύνολα. Το *καρτεσιανό γινόμενο* των Ω_1 και Ω_2, συμβολιζόμενο με $\Omega_1 \times \Omega_2$, είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών στα οποία η πρώτη συνιστώσα είναι στοιχείο του Ω_1 και η δεύτερη συνιστώσα είναι στοιχείο του Ω_2, δηλαδή

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

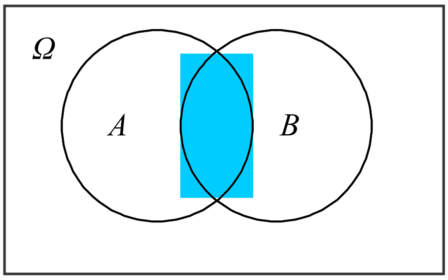
Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται και για ν σύνολα $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_\nu$ ως εξής:

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_\nu = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2, ..., \omega_\nu \in \Omega_\nu\}.$$

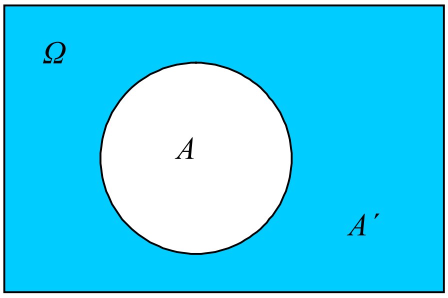
Ειδικά αν $\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_\nu \equiv \Omega$ το καρτεσιανό γινόμενο συμβολίζεται με Ω^ν.



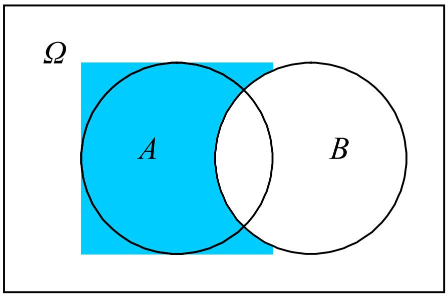
Σχήμα 2.1: $A \cup B$



Σχήμα 2.2: $A \cap B$



Σχήμα 2.3: A'



Σχήμα 2.4: $A - B$

Παράδειγμα 2.1. (α) Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος. Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{\gamma, \kappa\},$$

όπου σημειώνεται με γ η όψη γράμματα και με κ η όψη κεφαλή (ή κορώνα). Τα υποσύνολα του Ω

$$A = \{\gamma\} \text{ και } B = \{\kappa\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα εμφάνισης της όψης γράμματα και κεφαλή αντίστοιχα.

(β) Ας θεωρήσουμε τώρα το στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα μιας ακολουθίας 2 ρίψεων ενός νομίσματος. Τούτο είναι ένα σύνθετο στοχαστικό πείραμα συντιθέμενο από 2 δοκιμές του απλού στοχαστικού πειράματος της ρίψης ενός νομίσματος. Το οποιοδήποτε αποτέλεσμα των 2 ρίψεων δύναται να παρασταθεί από ένα διατεταγμένο ζεύγος του οποίου το πρώτο στοιχείο είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και το δεύτερο στοιχείο το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης. Έτσι ο δειγματικός χώρος του σύνθετου στοχαστικού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega_2 = \{(\gamma,\gamma), (\gamma,\kappa), (\kappa,\gamma), (\kappa,\kappa)\}.$$

Σημειώνουμε ότι το Ω_2 είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\gamma, \kappa\}$ με τον εαυτό του. Τα υποσύνολα του Ω_2,

$$A_0 = \{(\gamma,\gamma)\},\ A_1 = \{(\gamma,\kappa), (\kappa,\gamma)\} \text{ και } A_2 = \{(\kappa,\kappa)\}$$

είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης 0, 1 και 2 φορές της όψης κεφαλή, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Τα σύνολα

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3\},\ A_4 = \{4\},\ A_5 = \{5\} \text{ και } A_6 = \{6\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα της εμφάνισης του αριθμού 1, 2, 3, 4, 5 και 6 αντίστοιχα, ενώ τα σύνολα

$$B_1 = \{1\},\ B_2 = \{1,2\},\ B_3 = \{1,2,3\},\ B_4 = \{1,2,3,4\},$$

$$B_5 = \{1,2,3,4,5\} \text{ και } B_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης αριθμού μικροτέρου ή ίσου του $1,2,3,4,5$ και 6 αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_1 + A_2,\ B_3 = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$B_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,\ B_5 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,\ B_6 = \Omega.$$

Παράδειγμα 2.3. Ας θεωρήσουμε μία σειρά 3 γεννήσεων σ' ένα μαιευτήριο των Αθηνών. Καταγράφοντας κατά σειρά γέννησης το φύλο των νεογέννητων ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\kappa,\kappa,\kappa),(\alpha,\kappa,\kappa),(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha),(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,\alpha)\},$$

όπου σημειώνεται με α η γέννηση αγοριού και με κ η γέννηση κοριτσιού. Τα ενδεχόμενα A_0, A_1, A_2 και A_3 της γέννησης 0, 1, 2 και 3 αγοριών, αντίστοιχα, περιλαμβάνουν τα εξής δειγματικά σημεία:

$$A_0 = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\},\ A_1 = \{(\alpha,\kappa,\kappa),(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha)\}$$

$$A_2 = \{(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha)\},\ A_3 = \{(\alpha,\alpha,\alpha)\},$$

ενώ το ενδεχόμενο B της γέννησης ενός τουλάχιστο αγοριού περιλαμβάνει τα εξής δειγματικά σημεία

$$B = \{(\alpha,\kappa,\kappa),(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha),(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,\alpha)\}$$

και είναι

$$B = A_1 + A_2 + A_3.$$

Το συμπληρωματικό (αντίθετο) του ενδεχομένου B είναι το ενδεχόμενο B' της γέννησης 3 κοριτσιών και περιλαμβάνει ένα μόνο σημείο

$$B' = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\}.$$

Παράδειγμα 2.4. Μέτρο του φόρτου εργασίας σε ένα τηλεφωνικό κέντρο παροχής πληροφοριών αποτελεί τόσο ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φθάνουν σ' αυτό στη διάρκεια ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, όσο και ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων.

(α) Καταγράφοντας τον αριθμό των τηλεφωνικών κλήσεων, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων, το οποίο αποτελεί το δειγματικό χώρο, είναι το

$$\Omega_1 = \{0, 1, ..., N\}.$$

Το ενδεχόμενο μιας τουλάχιστο τηλεφωνικής κλήσης είναι το υποσύνολο A του Ω_1 με

$$A = \{1, 2, ..., N\}.$$

Το συμπληρωματικό (αντίθετο) του ενδεχομένου A είναι το ενδεχόμενο A', καμμιάς τηλεφωνικής κλήσης, το οποίο περιλαμβάνει ένα μόνο σημείο:

$$A' = \{0\}.$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που ο μέγιστος αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων N είναι πρακτικά πολύ μεγάλος λαμβάνεται θεωρητικά ίσος με ∞ και έτσι ο δειγματικός χώρος γίνεται

$$\Omega_2 = \{0, 1, ..., \infty\}.$$

(β) Καταγράφοντας το χρόνο μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων, το οποίο αποτελεί το δειγματικό χώρο είναι το διάστημα

$$\Omega_3 = \{t \in R : 0 < t < \theta\},$$

όπου ο μέγιστος χρόνος θ είναι ένας θετικός αριθμός. Το ενδεχόμενο A ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων να ξεπεράσει τα α δευτερόλεπτα είναι το

$$A = \{t \in R : \alpha < t < \theta\}.$$

Σημειώνουμε ότι το δειγματικός χώρος Ω_1 είναι πεπερασμένος ενώ δειγματικός χώρος Ω_2 αριθμησίμως άπειρος. Ο δειγματικός χώρος Ω_3 είναι υπεραριθμήσιμος και ειδικότερα συνεχής.

3. ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711) ως εξής:

Η πιθανότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο με αριθμητή τον αριθμό των περιπτώσεων ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου τούτου και παρονομαστή το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες).

Η συνθήκη του ισοπιθάνου των περιπτώσεων είναι αναγκαία γιατί διαφορετικά θεωρώντας τις περιπτώσεις της πραγματοποίησης και της μη πραγματοποίησης ενδεχομένου θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι ίση με 1/2. Το συμπέρασμα τούτο δεν ισχύει γενικά επειδή οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι πάντοτε εξίσου πιθανές. Η έννοια των εξίσου πιθανών (ισοπιθάνων) περιπτώσεων είναι απαραίτητο να ορισθεί ανεξάρτητα από την έννοια της πιθανότητας γιατί διαφορετικά ο κλασικός αυτός ορισμός θα οδηγούσε σε φαύλο κύκλο. Τούτο επιτυγχάνεται με επίκληση της *αρχής της έλλειψης επαρκούς λόγου*. Έτσι αν σύμφωνα με τα δεδομένα δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες τότε όλες θεωρούνται εξίσου πιθανές. Για παράδειγμα κατά την ρίψη ενός κύβου υπάρχουν τόσα δυνατά αποτελέσματα (περιπτώσεις) όσες είναι και οι έδρες του. Με την προϋπόθεση ότι οι έδρες είναι ίσες και το βάρος του κύβου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες, οπότε όλες οι περιπτώσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Σημειώνουμε ότι ο κλασικός αυτός ορισμός της πιθανότητας αφορά αναγκαστικά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.

Η θεμελίωση του Λογισμού των Πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας αποδίδεται στον Laplace (1812). Αξίζει να παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες ιδιότητες της κλασικής πιθανότητας, οι οποίες και ενέπνευσαν την κατάλληλη επέκταση της τόσο σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με μη ισοπίθανα δειγματικά σημεία (περιπτώσεις) όσο και γενικότερα σε αριθμήσιμους ή μη αριθμήσιμους δειγματικούς χώρους.

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία, περιπτώσεις), σύμφωνα με την αρχή της έλλειψης επαρκούς λόγου, είναι εξίσου πιθανά (ισοπίθανα) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A (ως προς το δειγματικό χώρο Ω). Η *πιθανότητα* του A, συμβολιζομένη με $P(A)$, δίδεται από τη σχέση

$$P(A)=\frac{N(A)}{N} \tag{3.1}$$

όπου $N(A)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A και $N\equiv N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω. Η συνάρτηση $P(A)$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A (στον Ω) αντιστοιχεί τον αριθμό (3.1) είναι

(α) *μη αρνητική* : $P(A)\geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $A\subseteq\Omega$,

(β) *νορμαλισμένη* : $P(\Omega)=1$,

(γ) *προσθετική* : $P(A+B)=P(A)+P(B)$ *για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα* A *και* $B\subseteq\Omega$.

Οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό (3.1) και τις αντίστοιχες ιδιότητες: $N(A)\geq 0$ για κάθε σύνολο A και $N(A+B)=N(A)+N(B)$ για ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B, του αριθμού των στοιχείων πεπερασμένου συνόλου. Σημειώνουμε ότι από την προσθετική ιδιότητα συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_\nu)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_\nu) \tag{3.2}$$

για κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα, ασυμβίβαστα) ενδεχόμενα $A_1,A_2,\ldots,A_\nu\subseteq\Omega$. Άμεσα συνάγονται από τον ορισμό (3.1) η σχέση

$$P(A)\leq 1 \text{ για κάθε ενδεχόμενο } A\subseteq\Omega .$$

όπως και η σχέση

$$P(\varnothing)=0 .$$

Επίσης, έστω $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_\nu$ δειγματικός χώρος συνθέτου στοχαστικού πειράματος, όπου Ω_i είναι πεπερασμένος δειγματικός χώρος με N_i ισοπίθανα δειγματικά σημεία, $i=1,2,\ldots,\nu$. Αν ισχύει

$$P(\{(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\nu)\})=P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\})\cdots P_\nu(\{\omega_\nu\}) \tag{3.3}$$

για οποιαδήποτε δειγματικά σημεία $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,\nu$, τότε ο δειγματικός χώρος Ω έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

Επέκταση της κλασικής πιθανότητας στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής (μη αριθμήσιμος) αποτελεί η *γεωμετρική πιθανότητα* που ορίζεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε ένα μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο Ω οριζόμενο από μία περιοχή του (μονοδιαστάτου ή διδιαστάτου ή τριδιαστάτου) χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A οριζόμενο από μία περιοχή του δειγματικού χώρου Ω. Η πιθανότητα του A δίδεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{3.4}$$

όπου $\mu(A)$ και $\mu(\Omega)$ είναι το μέτρο (μήκος ή εμβαδό ή όγκος) των περιοχών A και Ω αντίστοιχα. Η πιθανότητα (3.4), όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, έχει αντίστοιχες με την πιθανότητα (3.1) ιδιότητες.

Παράδειγμα 3.1. Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία δύο ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος και το ενδεχόμενο A_j της εμφάνισης σ’ αυτή j φορές της όψης κεφαλή, $j = 0,1,2$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A_j)$, $j = 0,1,2$.

Παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος του απλού τυχαίου πειράματος της ρίψης ενός συνήθους (συμμετρικού) νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{\gamma, \kappa\}.$$

Τα δειγματικά σημεία, λόγω της συμμετρίας του νομίσματος, είναι ισοπίθανα:

$$P_i(\{\gamma\}) = P_i(\{\kappa\}) = \frac{1}{2},\ i = 1,2.$$

Περαιτέρω, ο δειγματικός χώρος του συνθέτου τυχαίου πειράματος μιας ακολουθίας 2 ρίψεων ενός νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega_2 = \{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\},$$

το οποίο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\gamma, \kappa\}$ με τον εαυτό του. Στο τυχαίο αυτό πείραμα ισχύει η (3.3) και έτσι τα 4 δειγματικά σημεία του Ω_2 είναι ισοπίθανα:

$$P(\{(\gamma,\gamma)\}) = P_1(\{\gamma\})P_2(\{\gamma\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(\{(\gamma,\kappa)\}) = P_1(\{\gamma\})P_2(\{\kappa\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(\{(\kappa,\gamma)\}) = P_1(\{\kappa\})P_2(\{\gamma\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(\{(\kappa,\kappa)\}) = P_1(\{\kappa\})P_2(\{\kappa\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας (3.1) και επειδή

$$A_0 = \{(\gamma,\gamma)\},\ A_1 = \{(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)\},\ A_2 = \{(\kappa,\kappa)\},$$

συνάγουμε τις πιθανότητες

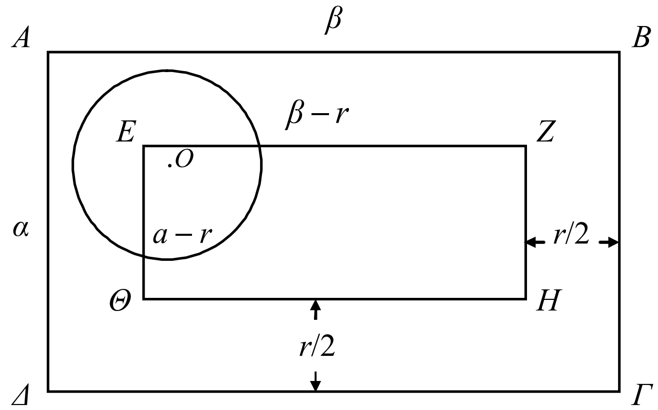
$$P(A_0) = \frac{1}{4},\ P(A_1) = \frac{1}{2},\ P(A_2) = \frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 3.2. Έστω ότι ένα νόμισμα διαμέτρου r τοποθετείται τυχαία πάνω σε ορθογώνιο τραπέζι το οποίο είναι χωρισμένο σε N ορθογώνια με πλευρές α και β, όπου $\alpha \le \beta$ και $r < \alpha$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το νόμισμα τοποθετηθεί στο εσωτερικό ορθογωνίου.

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το ορθογώνιο τραπέζι με εμβαδό

$$\mu(\Omega) = N\alpha\beta\ .$$

Για τον καθορισμό της περιοχής του τραπεζιού η οποία ορίζεται από το ενδεχόμενο A, όπως το νόμισμα τοποθετηθεί στο εσωτερικό ορθογωνίου, ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με πλευρές α και β, όπου $\alpha \le \beta$ και ένα δεύτερο ορθογώνιο $ΕΖΗΘ$ κείμενο στο εσωτερικό του πρώτου ορθογωνίου με πλευρές παράλληλες στις πλευρές αυτού και σε απόσταση $r/2$ απ' αυτές (βλ. Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1

Ένα νόμισμα διαμέτρου r κείται στο εσωτερικό του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ αν και μόνο αν το κέντρο O του νομίσματος κείται στο εσωτερικό του ορθογωνίου $ΕΖΗΘ$. Το εμβαδό του ορθογωνίου $ΕΖΗΘ$ είναι $(\alpha - r)(\beta - r)$. Η περιοχή του τραπεζιού η οποία ορίζεται από το ενδεχόμενο A είναι η ένωση N τέτοιων ορθογωνίων και έτσι

$$\mu(A) = N(\alpha - r)(\beta - r)\ .$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της γεωμετρικής πιθανότητας (3.4),

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(\alpha - r)(\beta - r)}{\alpha\beta}\ .$$

Σημειώνουμε ότι στη μερική περίπτωση τετραγώνων, $\beta = \alpha$, η πιθανότητα αυτή γίνεται

$$P(A) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^2\ .$$

4. ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ, ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία, περιπτώσεις) είναι ισοπίθανα ανάγεται, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, $P(A) = N(A)/N$, στον υπολογισμό του αριθμού $N(A)$ των στοιχείων του A και του αριθμού $N \equiv N(\Omega)$ των στοιχείων του Ω. Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε μερικά βασικά στοιχεία της Συνδυαστικής τα οποία διευκολύνουν την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων απαρίθμησης. Η αρχή του αθροίσματος και η αρχή του γινομένου (ή πολλαπλασιαστική αρχή), οι οποίες αποτελούν τις δύο βασικές αρχές απαρίθμησης, μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Αρχή του αθροίσματος. Αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι πεπερασμένα και κατά ζεύγη ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε

$$N(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_\nu)$$

Η αρχή αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) α_i μπορεί να εκλεγεί κατά κ_i τρόπους, $i = 1, 2, ..., \nu$ και η εκλογή του α_i αποκλείει την ταυτόχρονη εκλογή του α_j, $i, j = 1, 2, ..., \nu$, $i \neq j$ τότε το στοιχείο α_1 ή α_2, ..., ή α_ν μπορεί να εκλεγεί κατά $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu$ τρόπους.

Αρχή γινομένου (ή πολλαπλασιαστική αρχή). Αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu) = N(A_1) N(A_2) \cdots N(A_\nu).$$

Η αρχή αυτή μπορεί γενικότερα να διατυπωθεί ως εξής: Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) α_1 μπορεί να εκλεγεί κατά κ_1 τρόπους και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα άλλο στοιχείο α_2 μπορεί να εκλεγεί κατά κ_2 τρόπους, ..., και για κάθε ένα από όλους αυτούς τους τρόπους ένα άλλο στοιχείο α_ν μπορεί να εκλεγεί κατά κ_ν τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία α_1 και α_2,...,και α_ν μπορούν να εκλεγούν (διαδοχικά) κατά $\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_\nu$ τρόπους.

Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο σύνολο ν στοιχείων $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$. *Διάταξη* των ν ανά κ καλείται μία διατεταγμένη κ-αδα $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa)$ με $\alpha_r \in \Omega$ $r = 1, 2, ..., \kappa$. *Συνδυασμός* των ν ανά κ καλείται μία (μη διατεταγμένη) συλλογή κ στοιχείων $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ με $\alpha_r \in \Omega$, $r = 1, 2, ..., \kappa$. Τα στοιχεία μιας διάταξης ή ενός συνδυασμού είναι είτε διαφορετικά είτε όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά στοιχεία του Ω. Για την πρώτη περίπτωση διατηρούμε την ονομασία διάταξη ή συνδυασμός των ν ανά κ ενώ στη δεύτερη περίπτωση όπου τα στοιχεία του Ω επιτρέπεται να επαναλαμβάνονται, χρησιμοποιούμε την ονομασία *διάταξη ή συνδυασμός των ν ανά κ με επανάληψη*. Η ειδική περίπτωση διάταξης των ν ανά ν (όλων των θεωρουμένων στοιχείων) καλείται ειδικότερα *μετάθεση* ν στοιχείων.

Σχετικά με το πλήθος των διατάξεων και των συνδυασμών αποδεικνύουμε τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 4.1. (α) *Ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά κ, συμβολιζόμενος με* $(\nu)_\kappa$, *δίδεται από τη σχέση*

$$(\nu)_\kappa = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\kappa+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}, \tag{4.1}$$

όπου το γινόμενο όλων των ακεραίων από το 1 *μέχρι το ν καλείται ν παραγοντικό και συμβολίζεται με* $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-1)\nu$.

(β) *Ο αριθμός των συνδυασμών των ν ανά κ συμβολιζόμενος με* $\binom{\nu}{\kappa}$, *δίδεται από τη σχέση*

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{(\nu)_\kappa}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}, \tag{4.2}$$

Απόδειξη. (α) Σε μια οποιαδήποτε διάταξη $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa)$ των ν στοιχείων του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ανά κ, το πρώτο στοιχείο α_1 μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των ν στοιχείων, ενώ μετά την εκλογή του πρώτου στοιχείου, το δεύτερο στοιχείο α_2, επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από το α_1, μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υπολοίπων $\nu-1$ στοιχείων. Τελικά μετά την εκλογή των $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{\kappa-1}$ στοι-χείων, το τελευταίο στοιχείο α_κ, επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από τα $\kappa-1$ προηγούμενα στοιχεία, μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υπολοίπων $\nu-(\kappa-1)=\nu-\kappa+1$ στοιχείων. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγεται η (4.1).

(β) Σε κάθε συνδυασμό $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}$ των ν στοιχείων του Ω ανά κ αντιστοιχούν $\kappa!$ διατάξεις των ν ανά κ, οι οποίες προκύπτουν με μετάθεση των κ στοιχείων του κατά όλους τους $\kappa!$ το πλήθος δυνατούς τρόπους. Επομένως ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά κ είναι ίσος με $\kappa!$ φορές τον αριθμό των συνδυασμών των ν ανά κ και έτσι χρησιμοποιώντας την (4.1) συνάγουμε την (4.2).

Θεώρημα 4.2. *Ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά κ με επανάληψη, συμβολιζόμενος με $U(\nu,\kappa)$, είναι ίσος με*

$$U(\nu,\kappa)=\nu^\kappa. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι σε μία οποιαδήποτε διάταξη $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa)$ των ν στοιχείων του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ανά κ με επανάληψη οποιοδήποτε στοιχείο α_i μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των ν στοιχείων. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγεται η (4.3).

Θεώρημα 4.3. *Ο αριθμός των συνδυασμών των ν ανά κ με επανάληψη είναι ίσος με*

$$\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}=\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+\kappa-1)}{\kappa!}=\frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa!(\nu-1)!}. \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ένα συνδυασμό $\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_\kappa}\}$ των ν στοιχείων του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ανά κ με επανάληψη και ας υποθέσουμε ότι οι κ δείκτες $i_1,i_2,...,i_\kappa$ είναι αριθμημένοι από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο. Η υπόθεση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα εφόσον η οποιαδήποτε σειρά αναγραφής των στοιχείων ενός συνδυασμού δεν παίζει κανένα ρόλο. Τότε $1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_\kappa\le\nu$ και αν στο συνδυασμό $\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_\kappa}\}$ αντιστοιχήσουμε το συνδυασμό $\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},...,\omega_{j_\kappa}\}$ με

$$j_1=i_1,\; j_2=i_2+1,...,\; j_\kappa=i_\kappa+(\kappa-1),$$

θα είναι $1\le j_1<j_2<\cdots<j_\kappa\le\nu+\kappa-1$, δηλαδή τα στοιχεία του δευτέρου συνδυασμού θα είναι διαφορετικά είτε είναι είτε δεν είναι διαφορετικά τα στοιχεία του πρώτου συνδυασμού και επιπλέον ο συνδυασμός $\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},...,\omega_{j_\kappa}\}$ είναι ένας συνδυασμός των $\nu+\kappa-1$ στοιχείων του συνόλου $W=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_{\nu+\kappa-1}\}$ ανά κ (χωρίς επανάληψη). Η αντιστοιχία αυτή συνεπάγεται ότι ο αριθμός των συνδυασμών των ν ανά κ με επανάληψη είναι ίσος με τον αριθμό των συνδυασμών των $\nu+\kappa-1$ ανά κ (χωρίς επανάληψη).

Παράδειγμα 4.1. (α) *Κατανομή διακεκριμένων σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά.* Ας θεωρήσουμε κ διακεκριμένα σφαιρίδια $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\kappa\}$ τα οποία τοποθετούνται μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά $\{c_1, c_2, \ldots, c_\nu\}$. Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των κ διακεκριμένων σφαιριδίων μέσα στα ν διακεκριμένα κελιά, είναι ίσος με

$$\nu^\kappa,$$

τον αριθμό των διατάξεων των ν ανά κ με επανάληψη, επειδή το κάθε σφαιρίδιο μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε από τα ν κελιά.

Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των κ διακεκριμένων σφαιριδίων μέσα στα ν διακεκριμένα κελιά έτσι ώστε το j κελί να περιέχει κ_j σφαιρίδια για όλα τα $j = 1, 2, \ldots, \nu$ με $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu = \kappa$, είναι ίσος με

$$\frac{\kappa!}{\kappa_1! \kappa_2! \cdots \kappa_\nu!},$$

επειδή τα κ_1 σφαιρίδια του πρώτου κελιού μπορούν να επιλεγούν από τα κ σφαιρίδια κατά

$$\binom{\kappa}{\kappa_1}$$

τρόπους. Μετά την επιλογή αυτή τα κ_2 σφαιρίδια του δευτέρου κελιού μπορούν να επιλεγούν από τα υπόλοιπα $\kappa - \kappa_1$ σφαιρίδια κατά

$$\binom{\kappa - \kappa_1}{\kappa_2}$$

τρόπους. Συνεχίζοντας την ανάλυση αυτή, μετά την επιλογή των σφαιριδίων για τα $\nu - 1$ πρώτα κελιά, τα κ_ν σφαιρίδια του ν-οστού κελιού μπορούν να επιλεγούν από τα υπόλοιπα $\kappa - (\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_{\nu-1}) = \kappa_\nu$ σφαιρίδια κατά ένα μόνον τρόπο και έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγεται ο ζητούμενος αριθμός,

$$\binom{\kappa}{\kappa_1}\binom{\kappa - \kappa_1}{\kappa_2} \cdots \binom{\kappa - \kappa_1 - \cdots - \kappa_{\nu-1}}{\kappa_\nu}$$

$$= \frac{\kappa!}{\kappa_1!(\kappa - \kappa_1)!} \frac{(\kappa - \kappa_1)!}{\kappa_2!(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2)!} \cdots \frac{(\kappa - \kappa_1 - \cdots - \kappa_{\nu-1})!}{\kappa_\nu!(\kappa - \kappa_1 - \cdots - \kappa_\nu)!}$$

μετά από απλοποιήσεις.

(β) *Κατανομή όμοιων σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά.* Ας θεωρήσουμε κ όμοια σφαιρίδια τα οποία τοποθετούνται μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά $\{c_1, c_2, \ldots, c_\nu\}$. Σε κάθε τοποθέτηση των κ όμοιων σφαιριδίων μέσα στα ν διακεκριμένα κελιά αντιστοιχεί μία επιλογή κ κελιών $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_\kappa}\}$ ανεξάρτητα σειράς και αντίστροφα όπου η τοποθέτηση ενός σφαιριδίου μέσα σε ένα κελί αντιστοιχεί στην επιλογή του κελιού αυτού. Επομένως στην περίπτωση που κάθε κελί μπορεί να χωρέσει ένα μόνο σφαιρίδιο, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης κ όμοιων σφαιριδίων μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά είναι ίσος με

$$\binom{\nu}{\kappa},$$

τον αριθμό των συνδυασμών των ν ανά κ, ενώ στην περίπτωση που τα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης κ όμοιων σφαιριδίων μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά είναι ίσος με

$$\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa},$$

τον αριθμό των συνδυασμών των ν ανά κ με επανάληψη.

5. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η προϋπόθεση του ισοπιθάνου των περιπτώσεων ή στοιχειωδών περιοχών που απαιτούν τόσο ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας όσο και η γεωμετρική επέκτασή του περιορίζει σημαντικά το πεδίο εφαρμογών της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Έτσι σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με πεπερασμένο δειγματικό χώρο στον οποίο τα δειγματικά σημεία δεν είναι ισοπίθανα ή με αριθμησίμως άπειρο δειγματικό χώρο, όπως για παράδειγμα η εκπομπή σωματιδίων από ραδιενεργό ουσία, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Επίσης σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο στον οποίο οι στοιχειώδεις περιοχές δεν είναι ισοπίθανες, όπως για παράδειγμα ο χρόνος ζωής μιας μηχανής, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο γεωμετρικός ορισμός της πιθανότητας.

Ο Von Mises στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει το πρόβλημα ορισμού πιθανότητας σε οποιουσδήποτε δειγματικούς χώρους διατύπωσε τον ακόλουθο *εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας*.

Ας υποθέσουμε ότι ένα στοχαστικό πείραμα (ή φαινόμενο) με δειγματικό χώρο Ω μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών και ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Έστω ότι σε ν επαναλήψεις του στοχαστικού πειράματος (ή φαινομένου) το ενδεχόμενο A έχει πραγματοποιηθεί $n_\nu(A)$ φορές. Η σχετική συχνότητα του A δίδεται από το λόγο

$$\frac{n_\nu(A)}{\nu}.$$

Στην περίπτωση που υπάρχει το όριο της σχετικής συχνότητας όταν το ν τείνει στο άπειρο τούτο ορίζει, σύμφωνα με τον Von Mises, την πιθανότητα του A:

$$P(A) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{n_\nu(A)}{\nu}. \tag{5.1}$$

Σημειώνουμε ότι, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, και η εμπειρική πιθανότητα είναι

(α) *μη αρνητική* : $P(A) \ge 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμένη* : $P(\Omega) = 1$,

(γ) *προσθετική* : $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα* A *και* $B \subseteq \Omega$.

Η υπόθεση ότι ένα στοχαστικό πείραμα μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών αποτέλεσε το σημείο κριτικής του εμπειρικού ορισμού της πιθανότητας. Επίσης η σύγκλιση στην (5.1) δεν μπορεί να νοηθεί με την απόλυτη μαθηματική έννοια αλλά με πιθανότητα όπως θα δούμε στα θεωρήματα σύγκλισης.

6. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Επέκταση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας ενδεχομένου τόσο στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου με όχι κατ' ανάγκη ισοπίθανα δειγματικά σημεία όσο και στις περιπτώσεις αριθμησίμου ή μη αριθμησίμου δειγματικού χώρου επιτυγχάνεται με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. Ο ορισμός αυτός είναι αρκετά γενικός και ενσωματώνει ως ειδική περίπτωση την κλασική πιθανότητα και ως οριακό θεώρημα την εμπειρική πιθανότητα.

Ορισμός 6.1. *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου). Μια συνάρτηση η οποία σε κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ αντιστοιχεί (εκχωρεί) έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$ καλείται πιθανότητα αν ικανοποιεί τα αξιώματα (συνθήκες):*

(α) *μη αρνητικότητας*: $P(A) \geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμού*: $P(\Omega) = 1$,

(γ) *αριθμήσιμης προσθετικότητας*:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu) + \cdots$$

για οποιαδήποτε ακολουθία κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$.

Παρατήρηση 6.1. Στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω αντί του αξιώματος της αριθμήσιμης προσθετικότητας αρκεί το ασθενέστερο αξίωμα

(γ′) *προσθετικότητας :* $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *για οποιαδήποτε ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα* $A, B \subseteq \Omega$,

από το οποίο συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu),$$

για οποιαδήποτε κατά ζεύγη ξένα ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Σημειώνουμε ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας δεν καθορίζει κάποια έκφραση (τύπο) υπολογισμού της (συνάρτησης) πιθανότητας $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Απλώς περιορίζεται στον καθορισμό των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $P(A)$, $A \subseteq \Omega$ για να είναι πιθανότητα. Η ύπαρξη πρόσθετων στοιχείων σχετικών με το δειγματικό χώρο Ω και τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του δύναται να οδηγήσει στον προσδιορισμό μιας έκφρασης (τύπου) υπολογισμού της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου. Τέτοιες περιπτώσεις εξετάζουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.1. *Πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι.* Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ με $N(\Omega) = N$ και έστω $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_\kappa}\} \subseteq \Omega$ ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο. Η πιθανότητα $P(A)$ δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το ότι $A = \{\omega_{i_1}\} + \{\omega_{i_2}\} + \cdots + \{\omega_{i_\kappa}\}$ συνάγουμε, σύμφωνα με το αξίωμα της προσθετικότητας, την έκφραση

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \cdots + P(\{\omega_{i_\kappa}\})$$

και έτσι

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_\kappa}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με το αξίωμα του νορμαλισμού και επειδή $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \cdots + p_N$, οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τη σχέση

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1.$$

Συμπερασματικά, στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου, η γνώση των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου. Οι αρχικές αυτές πιθανότητες δύνανται να προκύψουν από την εξέταση και ανάλυση των συνθηκών και των οργάνων εκτέλεσης του συγκεκριμένου στοχαστικού πειράματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση ισοπιθάνων δειγματικών σημείων,

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N},\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

η ανωτέρω έκφραση της πιθανότητας $P(A)$ απλοποιείται λαμβάνοντας τη μορφή

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

η οποία συμφωνεί με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Παράδειγμα 6.2. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

με $N = N(\Omega) = 6$ δειγματικά σημεία.

(α) Στην περίπτωση συνήθους κύβου, ο οποίος είναι συμμετρικός και κατασκευασμένος από ομοιογενές υλικό, όλες οι έδρες έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης:

$$p_j = P(\{j\}) = \frac{1}{6},\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου A δίδεται τότε από τον τύπο

$$P(A) = \frac{N(A)}{6},$$

της κλασικής πιθανότητας. Έτσι, αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και $N(A) = 2$, οπότε

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

(β) Στην περίπτωση κύβου με ανομοιογενές υλικό κατασκευής, τέτοιο ώστε η πιθανότητα εμφάνισης οποιασδήποτε έδρας να είναι ανάλογη του αριθμού (των κουκκίδων) που φέρει, τότε

$$p_j = P(\{j\}) = cj,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

όπου c ο συντελεστής αναλογίας. Όμως $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, οπότε $c(1+2+3+4+5+6) = 1$ και έτσι $c = 1/21$. Επομένως η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου $A = \{j_1, j_2, ..., j_\kappa\} \subseteq \Omega$ δίδεται από τον τύπο

$$P(A) = \frac{j_1 + j_2 + \cdots + j_\kappa}{21}.$$

Έτσι αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και

$$P(A) = \frac{5+6}{21} = \frac{11}{21}.$$

Στηριζόμενοι στα αξιώματα (α), (β) και (γ) αποδεικνύουμε στα επόμενα θεωρήματα βασικές ιδιότητες της πιθανότητας.

Θεώρημα 6.1. (α) *Αν $\varnothing$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε*

$$P(\varnothing) = 0. \tag{6.1}$$

(β) *Αν $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, ..., \nu$ είναι κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = P(A_1) + (A_2) + \cdots + P(A_\nu) \tag{6.2}$$

(γ) *Αν A' είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου Α, ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε*

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{6.3}$$

(δ) *Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \tag{6.4}$$

και αν $B \subseteq A$, τότε

$$P(A - B) = P(A) - P(B). \tag{6.5}$$

(ε) *Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{6.6}$$

και

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB). \tag{6.7}$$

Απόδειξη. (α) Θέτοντας $A_i = \varnothing$, $i = 1, 2, ...$, έχουμε $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots = \varnothing$ και χρησιμοποιώντας το αξίωμα (γ) συνάγουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} P(\varnothing) &= P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu) + \cdots \\ &= P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots. \end{aligned}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το αξίωμα (α) έχουμε

$$P(\varnothing) \geq 0.$$

Επομένως η σειρά μη αρνητικών όρων,

$$P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots = 0,$$

είναι μηδενική, οπότε $P(\varnothing)=0$.

(β) Ας θεωρήσουμε και τα ενδεχόμενα $A_i=\varnothing$, $i=\nu+1,\nu+2,\ldots$. Τότε χρησιμοποιώντας το αξίωμα (γ) και την (6.1) συμπεραίνουμε ότι

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_\nu)=P(A_1+A_2+\cdots+A_\nu+A_{\nu+1}+\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_\nu)+P(A_{\nu+1})+\cdots=P(A_1)+(A_2)+\cdots+P(A_\nu)$$

(γ) Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και A' είναι ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα), $A\cap A'=\varnothing$, και $A+A'=\Omega$. Επομένως χρησιμοποιώντας την (6.2) με $\nu=2$ και το αξίωμα (β) συνάγουμε τη σχέση

$$P(A)+P(A')=P(\Omega)=1$$

η οποία συνεπάγεται την (6.3).

(δ) Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $A-B=A\cap B'$ είναι ξένα μεταξύ τους:

$$(A\cap B')\cap(A\cap B)=A\cap(B'\cap B)=A\cap\varnothing=\varnothing$$

και επιπλέον

$$(A\cap B')+(A\cap B)=[(A\cap B')\cup A]\cap[(A\cap B')\cup B]$$
$$=A\cap[(A\cup B)\cap(B\cup B')]=A\cap(A\cup B)=A.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (6.2) με $\nu=2$, συνάγουμε την

$$P(A)=P[(A\cap B')+(A\cap B)]=P(A\cap B')+P(A\cap B)$$

και έτσι

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(AB).$$

Στην περίπτωση που $B\subseteq A$ έχουμε $AB=B$ και επομένως

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

(ε) Τα ενδεχόμενα $A-B=A\cap B'$ και B είναι ξένα, $(A\cap B')\cap B=\varnothing$, και $(A\cap B')+B=A\cup B$. Επομένως σύμφωνα με την (6.2),

$$P(A\cup B)=P[(A-B)+B]=P(A-B)+P(B)$$

και χρησιμοποιώντας την (6.5) συνάγουμε την (6.6). Επειδή $A'B'=(A\cup B)'$, εφαρμόζοντας την (6.3) συμπεραίνουμε την (6.7).

Η πιθανότητα της ένωσης τριών οποιωνδήποτε ενδεχομένων συνάγεται με τη χρησιμοποίηση της (6.6) στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 6.1. *Αν $A,B,\Gamma\subseteq\Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A\cup B\cup\Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+P(AB\Gamma) \quad (6.8)$$

και

$$P(A'B'\Gamma')=1-P(A)-P(B)-P(\Gamma)+P(AB)+P(A\Gamma)+P(B\Gamma)-P(AB\Gamma). \quad (6.9)$$

Απόδειξη. Η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων $A\cup B$ και Γ, σύμφωνα με την (6.6) εκφράζεται ως εξής:

$$P[(A\cup B)\cup\Gamma]=P(A\cup B)+P(\Gamma)-P[(A\cup B)\Gamma]$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(\Gamma)-P[(A\Gamma)\cup(B\Gamma)].$$

Επίσης, σύμφωνα και πάλιν με την (6.6),

$$P[(A\Gamma)\cup(B\Gamma)] = P(A\Gamma)+P(B\Gamma)-P(AB\Gamma)$$

και έτσι συνάγεται η έκφραση (6.8). Επειδή $A'B'\Gamma' = (A\cup B\cup \Gamma)'$, εφαρμόζοντας την (6.3) συμπεραίνουμε την (6.9).

Θεώρημα 6.2. *Η πιθανότητα* $P(A)$, $A\subseteq \Omega$, *λαμβάνει τιμές στο διάστημα* $[0,1]$:

$$0\le P(A)\le 1 \text{ για κάθε } A\subseteq\Omega \tag{6.10}$$

και είναι αύξουσα συνάρτηση:

$$P(A)\le P(B) \text{ για κάθε } A,B\subseteq\Omega \text{ με } A\subseteq B. \tag{6.11}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το αξίωμα (α) της μη αρνητικότητας, έχουμε

$$P(A)\ge 0,\ P(A')\ge 0 \text{ για κάθε } A\subseteq\Omega$$

οπότε χρησιμοποιώντας και την (6.3), $P(A') = 1-P(A)$, συνάγουμε την (6.10). Επίσης, σύμφωνα με το αξίωμα (α) της μη αρνητικότητας, η πιθανότητα του ενδεχομένου $B-A\subseteq\Omega$ είναι μη αρνητική,

$$P(B-A)\ge 0,$$

και επειδή σύμφωνα με την (6.5),

$$P(B-A) = P(B)-P(A),$$

εφόσον $A\subseteq B$, συνάγουμε την (6.11).

Οι βασικές ιδιότητες της πιθανότητας που αποδείχθηκαν στο θεώρημα 6.1 και στο Πόρισμα 6.1 εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν, είναι και υπολογιστικά χρήσιμες όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.3. Ας θεωρήσουμε μία σειρά τριών γεννήσεων σ' ένα μαιευτήριο και το ενδεχόμενο B της γέννησης ενός τουλάχιστο αγοριού. Υποθέτοντας ότι η γέννηση αγοριού είναι εξίσου πιθανή με τη γέννηση κοριτσιού, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(B)$.

Παρατηρούμε ότι συμπληρωματικό του ενδεχομένου B είναι το ενδεχόμενο B' της γέννησης κοριτσιού και στις τρεις περιπτώσεις. Η πιθανότητα $P(B')$ υπολογίζεται πιο εύκολα από την $P(B)$. Συγκεκριμένα, ο δειγματικός χώρος περιλαμβάνει 8 ισοπίθανα δειγματικά σημεία (βλ. Παράδειγμα 2.3) από τα οποία μόνο ένα ανήκει στο B' και έτσι

$$P(B') = \frac{1}{8}$$

και σύμφωνα με την (6.3) παίρνουμε

$$P(B) = 1-P(B') = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της πιθανότητας $P(B)$ είναι να θεωρήσουμε το ενδεχόμενο B ως ένωση των κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων A_1, A_2 και A_3 της γέννησης $1, 2$ και 3 αγοριών, αντίστοιχα. Τότε

$$P(B) = P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = \frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$