1 Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Ορισμός 1 (Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως και Είδη Λύσεων)

1. *Καλούμε διαφορική εξίσωση (ΔΕ) πρώτης τάξεως μια εξίσωση της μορφής*
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$
όπου η εξαρτημένη μεταβλητή $y = y(x)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x, και $f(x, y)$ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η εξίσωση ισχύει σε κάποιο διάστημα I.

2. *Καλούμε λύση της ΔΕ (1) κάθε συνάρτηση $y(x) : I \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (1).*

3. *Καλούμε γενική λύση της ΔΕ (1) το σύνολο των συναρτήσεων που την ικανοποιούν.*

4. *Αν, εκτός της (1), έχει δοθεί και η αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, όπου $x_0 \in I$, τότε καλούμε ειδική (ή μερική) λύση της (1) μια συνάρτηση που ικανοποιεί και την ΔΕ, και την αρχική συνθήκη.*

Παρατηρήσεις

1. Στην πράξη, το I είτε αναφέρεται ρητώς, είτε υπονοείται από τα συμφραζόμενα.

2. Δεν έχουν όλες οι ΔΕ γενικές και/ή ειδικές λύσεις. Τα προβλήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων διαφορικών εξισώσεων είναι εν γένει πολύ δύσκολα.

Παράδειγμα 1 *($y'(x) = f(x)$)*

1. *Σύμφωνα με το Πόρισμα της Μηδενικής Παραγώγου, η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 0$ έχει ως γενική λύση το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων.*

2. *Η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = x^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, έχει ως γενική λύση το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής*
$$y(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{2}$$
όπου $C \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ και έστω οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της ΔΕ. Τότε:
$$\begin{aligned}(y(x) - g(x))' = y'(x) - g'(x) = x^n - x^n = 0 \Rightarrow y(x) - g(x) = C \\ \Rightarrow y(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\end{aligned}$$

για κάποιο $C \in \mathbb{R}$. Η πρώτη συνεπαγωγή προκύπτει και πάλι από το Πόρισμα της Μηδενικής Παραγώγου. Επιπλέον, είναι προφανές ότι όλες οι συναρτήσεις της άνω μορφής αποτελούν λύσεις της ΔE, άρα πράγματι η γενική λύση της ΔE είναι το σύνολο (2).

3. Πιο γενικά, αν η $g(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I, τότε η ΔE

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

έχει ως γενική λύση το σύνολο των συναρτήσεων

$$y(x) = \int_a^x g(t)\,dt + C.$$

Πράγματι, με χρήση του Πρώτου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού προκύπτει ότι η άνω $y(x)$ ικανοποιεί την ΔE για κάθε C. Αντιστρόφως, για οποιαδήποτε άλλη $y(x)$ την ικανοποιεί θα ισχύει

$$\left(y(x) - \int_a^x g(t)\,dt\right)' = y'(x) - g(x) = 0 \Rightarrow y(x) = \int_a^x g(t)\,dt + C$$

για κάποιο $C \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2 *($y'(x) = ky(x)$)*
Η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

έχει γενική λύση την

$$y(x) = Ce^{kx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, παρατηρήστε καταρχήν ότι για αυτή την $y(x)$ έχουμε

$$y'(x) = (Ce^{kx})' = Cke^{kx} = ky(x).$$

Αντιστρόφως, έστω μια $y(x)$ που ικανοποιεί την ΔE, δηλαδή $y'(x) = ky(x)$. Παρατηρήστε ότι

$$(y(x)e^{-kx})' = y'(x)e^{-kx} - ky(x)e^{-kx} = ky(x)e^{-kx} - ky(x)e^{-kx} = 0$$
$$\Rightarrow y(x)e^{-kx} = C \Rightarrow y(x) = Ce^{kx}.$$

Η δεύτερη εξίσωση προέκυψε γιατί η $y(x)$ εξ' υποθέσεως ικανοποιεί την ΔE, και η πρώτη συνεπαγωγή και πάλι από το Πόρισμα Μηδενικής Παραγώγου.

Παρατηρήσεις

1. Η ΔΕ $y'(x) = ky(x)$ είναι εξαιρετικά σημαντική γιατί εμφανίζεται συχνότατα στη φύση. Συγκεκριμένα, εμφανίζεται όποτε ο ρυθμός αύξησης $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ με το χρόνο t, κατά τη χρονική στιγμή t, μιας ποσότητας $y(t)$ είναι ανάλογος της ίδιας της ποσότητας $y(t)$, δηλαδή
$$y'(t) = ky(t),$$
όπου η σταθερά αναλογίας k μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Μερικά παραδείγματα τέτοιων ποσοτήτων είναι:

   (α΄) Ο πληθυσμός ανθρώπων/βακτηρίων/λαγών/μονομάχων/κοκ.

   (β΄) Η διαφορά της θερμοκρασίας του φαγητού από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντα χώρο, όταν το βγάλουμε από το φούρνο.

   (γ΄) Το ποσό μιας ραδιενεργούς ποσότητας καθώς αυτή διασπάται.

   (δ΄) Η ταχύτητα του αυτοκινήτου μας, αν σβήσουμε τις μηχανές και πατήσουμε το συμπλέκτη.

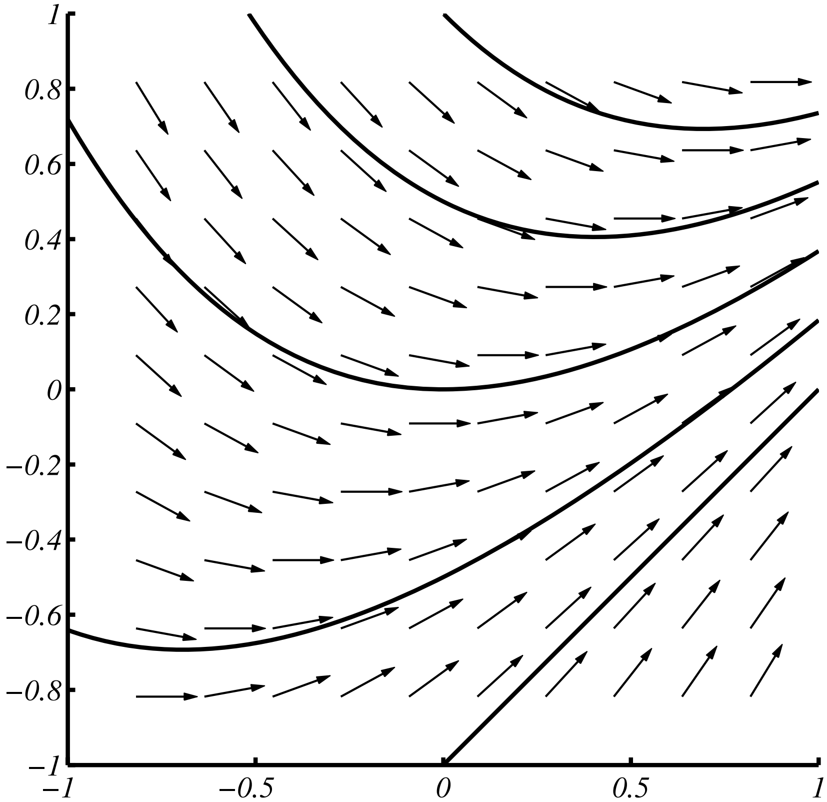
   (ε΄) (Προσεγγιστικά) τα λεφτά μας στην τράπεζα, αν σταματήσουμε να κάνουμε αναλήψεις ή καταθέσεις.

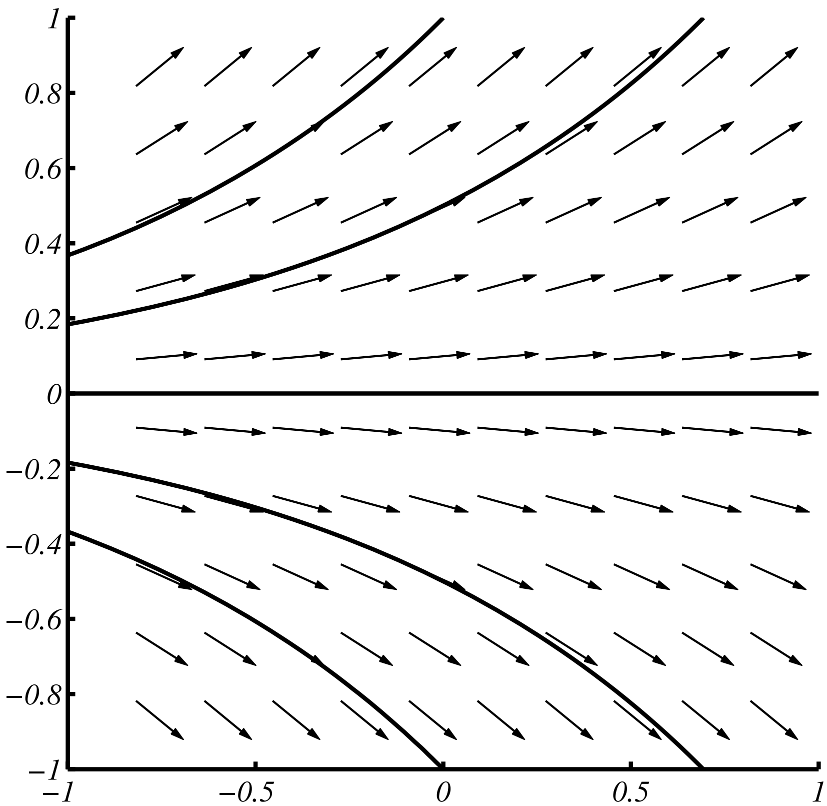
   (Στα άνω παραδείγματα, η σταθερά είναι θετική/αρνητική; Μεγάλη/μικρή;)

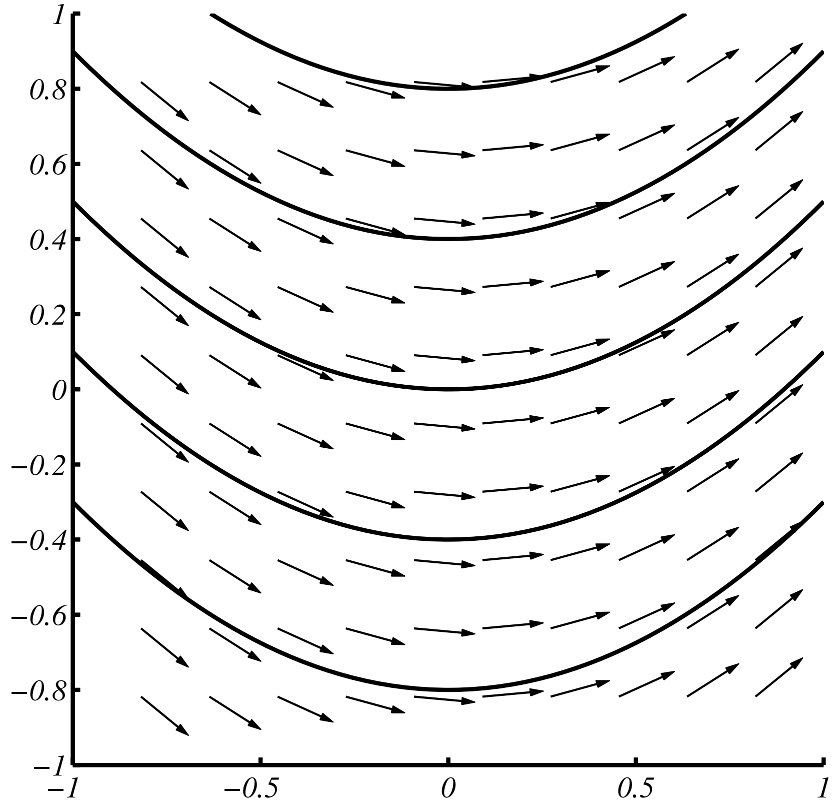
2. Τα προηγούμενα δύο παραδείγματα μας δείχνουν τι συμβαίνει σε δύο ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης $f(x, y)$, δηλαδή τις $f(x, y) = f(x)$ και $f(x, y) = y$. Για την γενική περίπτωση, δεν μπορούμε να βρούμε εύκολα τη μορφή των λύσεων.

3. Όμως, με τη βοήθεια των <u>πεδίων διευθύνσεων</u>, μπορούμε να έχουμε μια πολύ καλή διαισθητική κατανόηση οποιασδήποτε ΔΕ πρώτης τάξεως. Συγκεκριμένα, αν γνωρίζουμε ότι το γράφημα της λύσης $y(x)$ διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0), γνωρίζουμε ότι θα έχει κλίση εκεί ίση με $f'(x_0, y_0)$. Αν, για ένα πλέγμα σημείων (x_0, y_0), παραστήσουμε την κλίση με ένα διάνυσμα που δείχνει την διεύθυνση που «κινείται» το γράφημα, δημιουργούμε ένα πεδίο διεύθυνσης με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να αποκτήσουμε μια εικόνα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης.

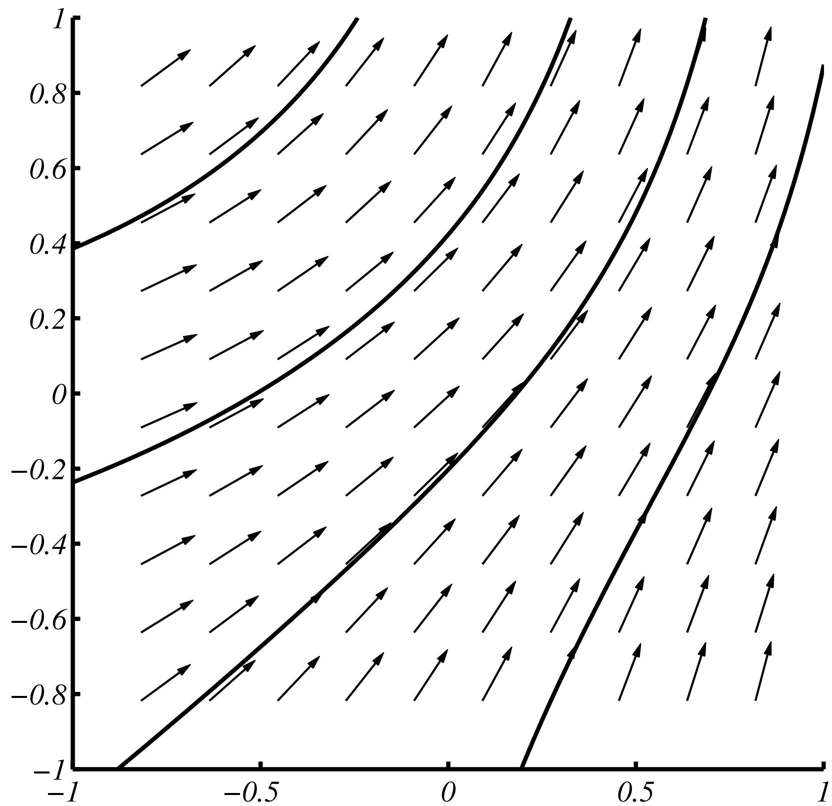
Παράδειγμα 3 *Στα παρακάτω σχήματα, έχουμε σχεδιάσει (με τυχαία σειρά) πεδία διευθύνσεων για τις ακόλουθες ΔΕ:*
$$y' = y, \quad y' = x, \quad y' = x - y, \quad y' = (1 + y^2)e^x.$$
Έχουμε επίσης σχεδιάσει μερικές ενδεικτικές λύσεις. Μπορείτε να βρείτε το πεδίο που αντιστοιχεί σε κάθε ΔΕ;


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

2 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Ορισμός 2 (Γραμμικές ΔΕ Πρώτης Τάξεως)
Καλούμε γραμμική ΔΕ πρώτης τάξεως κάθε ΔΕ της μορφής

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

που ισχύει σε ένα διάστημα I.

Παρατήρηση: Το αριστερό μέλος είναι *σχεδόν* της μορφής $f'g+gf' = (fg)'$. Αν ήταν *ακριβώς* της μορφής αυτής, θα μπορούσαμε να βρούμε εύκολα τη γενική λύση της ΔΕ. Με τη βοήθεια όμως της Θείας Επιφοίτησης, παρατηρούμε πως αν πολλαπλασιάσουμε το αριστερό σκέλος με την ποσότητα $\exp[R(x)]$, όπου $R'(x) = P(x)$, δηλαδή η R είναι παράγουσα της P, έχουμε:

$$\begin{aligned}\exp[R(x)](y(x)' + P(x)y(x)) &= \exp[R(x)]y'(x) + \exp[R(x)]P(x)y(x) \\ &= y'(x)\exp[R(x)] + y(x)\exp[R(x)]R'(x) = (\exp[R(x)]y(x))'.\end{aligned}$$

Βάσει της άνω παρατήρησης, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1 (Γενική και Μερική Λύση Γραμμικών ΔΕ Πρώτης Τάξεως)
Έστω η ΔΕ

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \tag{3}$$

σε ένα διάστημα I, όπου οι $P(x)$, $Q(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έστω $R(x)$ μια οποιαδήποτε παράγουσα της $P(x)$, δηλαδή $R'(x) = P(x)$, και $S(x)$ μια οποιαδήποτε παράγουσα της $Q(x)\exp[R(x)]$, δηλαδή $S'(x) = Q(x)\exp[R(x)]$.

1. *Η γενική λύση της ΔΕ είναι το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής*

$$y(x) = [S(x) + C]\exp[-R(x)], \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

2. *Υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί την ΔΕ μαζί με την οριακή συνθήκη $y(x_0) = y_0$, και αυτή είναι η*

$$y(x) = \left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u} P(t)\,dt\right]\,du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\right].$$

Λύση:

1. Έστω $Y(x)$ παραγωγίσιμη. Παρατηρήστε πως:

$$\begin{aligned}
&Y'(x)+P(x)Y(x)=Q(x)\\
&\quad\Leftrightarrow Y'(x)\exp[R(x)]+P(x)Y(x)\exp[R(x)]=Q(x)\exp[R(x)]\\
&\qquad\Leftrightarrow [Y(x)\exp[R(x)]]'=S'(x)\\
&\qquad\quad\Leftrightarrow Y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)],\quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

   Άρα, αν η $Y(x)$ ικανοποιεί την ΔΕ, θα είναι της μορφής (4) για κάποιο $C \in \mathbb{R}$, ενώ, αντιστρόφως, αν είναι της μορφής (4), τότε θα ικανοποιεί την ΔΕ.

2. Η μερική λύση θα έχει τη μορφή (4) για κάποιο C, και για αυθαίρετες παράγουσες $R(x)$ (της $P(x)$) και $S(x)$ (της $Q(x)\exp[R(x)]$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, παίρνουμε

$$R(x)=\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt,\quad S(x)=\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]\,du.$$

   Άρα, η γενική λύση αποκτά τη μορφή

$$y(x)=\left\{\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]\,du+C\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right].$$

   Με αντικατάσταση $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$, προκύπτει πως $C=y_0$. Θέτοντας $C=y_0$ στην άνω, προκύπτει το ζητούμενο.

■

Παρατηρήσεις

1. Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα, μπορούμε να επιλέξουμε οποιεσδήποτε παράγουσες $S(x), R(x)$, θέλουμε.

2. Δεν έχουν όλες οι ΔΕ ακριβώς μια μερική λύση για κάθε αρχική συνθήκη. (Γενικά μιλώντας, η γραμμικότητα της ΔΕ κάνει τις λύσεις να έχουν διάφορα χρήσιμα χαρακτηριστικά, ένα εκ των οποίων είναι και αυτό).

3. Το θεώρημα έχει την ιδιαιτερότητα ότι είναι πιο εύκολο να εφαρμόζουμε την απόδειξη αυτούσια στις ασκήσεις, παρά να θυμόμαστε το αποτέλεσμα. Πράγματι, για την εύρεση της γενικής λύσης, το μόνο που έχουμε να κάνουμε, είναι να φέρουμε το αριστερό μέλος στη μορφή $fg'+f'g$, πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη εκθετική συνάρτηση. Έχοντας τη γενική λύση, μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε μερική, με αντικατάσταση των x_0, y_0 και εύρεση του συντελεστή C. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 4 *Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης*

$$xy' = x^2 + 3y, \quad x > 0,$$

καθώς και την μερική λύση που διέρχεται από το σημείο $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Λύση: Καταρχήν, αφού το $I = (0, +\infty)$, μπορούμε να διαιρέσουμε με το x:

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

Μια αντιπαράγωγος του $\left(-\frac{3}{x}\right)$ είναι η $-3\log x$. Άρα, πολλαπλασιάζω και τα δύο σκέλη με το $\exp[-3\log x] = x^{-3}$:

$$\frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^4}y = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x^3}\right)' = \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$$
$$\Leftrightarrow y(x) = x^3\left(C - \frac{1}{x}\right), \quad C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x) = Cx^3 - x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Αν αντικαταστήσουμε στην άνω γενική λύση τις τιμές $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, προκύπτει πως $C = 2$. Άρα, η μερική λύση που ψάχνουμε είναι η

$$y(x) = 2x^3 - x^2.$$

■

Παράδειγμα 5 *Επαναλάβετε το άνω παράδειγμα για τις ακόλουθες εξισώσεις και αρχικές τιμές:*

1. $y' + 4y = 2$, *με αρχική συνθήκη* $x_0 = 1,\ y_0 = 1$.
2. $y' + \frac{1}{x}y = \cos x$, *όπου* $x > 0$, *με αρχική συνθήκη* $x_0 = \pi,\ y_0 = 0$.
3. $y' + x^2 y = x^2$, *με αρχική συνθήκη* $x_0 = 0,\ y_0 = 0$.

Λύση: Κατ' οίκον εργασία. ■

3 Διαχωρίσιμες Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Ορισμός 3 (Διαχωρίσιμη ΔΕ Πρώτης Τάξεως)
Μια ΔΕ πρώτης τάξεως καλείται διαχωρίσιμη όταν είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Παρατήρηση: Αν η $h(y) \neq 0$, η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow a(y)\frac{dy}{dx} = g(x),$$

όπου $a(y) \triangleq \frac{1}{h(y)}$. Παρατηρήστε ότι αν $A' = a$, τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας, το αριστερό σκέλος της εξίσωσης είναι η παράγωγος της $A(y(x))$, οπότε, αν μπορώ να βρω και μια αντιπαράγωγο της $g(x)$, τότε έχω λύσει την ΔΕ. Πιο αυστηρά, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2 (Γενική Λύση Διαχωρίσιμων ΔΕ Πρώτης Τάξεως)
Έστω η διαχωρίσιμη ΔΕ

$$a(y)y' = g(x) \tag{5}$$

σε ένα διάστημα I. Έστω πως η $g(x)$ έχει παράγουσα G στο I, και πως η a έχει παράγουσα A στο δικό της πεδίο ορισμού. Η Y είναι λύση της ΔΕ, ανν η Y ικανοποιεί την εξίσωση

$$A(Y(x)) = G(x) + C, \tag{6}$$

για κάποια σταθερά $C \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Έστω καταρχήν πως η $Y(x)$ είναι λύση. Θα ισχύει παντού στο I:

$$\begin{aligned} a(Y(x))Y'(x) = g(x) \Rightarrow A'(Y(x))Y'(x) = G'(x) & \\ \Rightarrow (A(Y(x))' = G'(x) \Rightarrow A(Y(x)) = G(x) + C. \end{aligned}$$

Η δεύτερη συνεπαγωγή προκύπτει με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, ενώ η τρίτη με χρήση του Πορίσματος Μηδενικής Παραγώγου.

Αντιστρόφως, αν ισχύει η (6), τότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη προκύπτει η (5). ∎

Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα είναι πολύ απλό στην εφαρμογή του. Πρακτικά, αν μας δίνεται η ΔΕ $a(y)y' = g(x)$ και γνωρίζουμε παράγουσες A, G, για τις a, g αντίστοιχα, τότε το θεώρημα λέει πως μπορούμε να γράψουμε:

$$a(y)y' = g(x) \Leftrightarrow a(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow a(y)dy = g(x)dx$$
$$\Leftrightarrow \int a(y)dy = \int g(x)dx \Leftrightarrow A(y) = G(x) + C.$$

2. Η σταθερά C μπορεί να απαλειφθεί με χρήση μιας αρχικής συνθήκης.

3. Οι λύσεις που βρίσκουμε είναι σε πεπλεγμένη μορφή! Μερικές φορές είναι αδύνατο να λύσουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς y.

Παράδειγμα 6 *Έστω η ΔΕ*

$$y^2\frac{dy}{dx} = x + 3x^2.$$

Βρείτε μια λύση y για την οποία $y(0) = 6$.

Λύση:

$$y^2\frac{dy}{dx} = x + 3x^2 \Leftrightarrow y^2dy = (x + 3x^2)dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{x^2}{2} + x^3 + C$$
$$\Leftrightarrow y = \left[\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 3C\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Αν στην άνω γενική λύση θέσουμε $x = 0$, $y = 6$, εύκολα προκύπτει πως $C = 72$, άρα τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$y = \left[\frac{x^2}{2} + x^3 + 216\right]^{\frac{1}{3}}.$$

■

Παράδειγμα 7 *Βρείτε τις λύσεις των ακόλουθων ΔΕ:*

1. $2\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} = 1, x, y > 0,$

2. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y},$

3. $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}.$

Λύση: Άσκηση κατ' οίκον. ■

4 Η Μέθοδος του Euler

Παρατηρήσεις

1. Πολλές ΔΕ, ακόμα και πρώτης τάξεως, δεν μπορούν αν λυθούν σε κλειστή μορφή.
2. Πολλές άλλες ΔΕ μπορούν να λυθούν, αλλά δεν μας ενδιαφέρει η λύση τους σε κλειστή μορφή, παρά μόνο μια γραφική απεικόνιση.
3. Για τους άνω λόγους, η *αριθμητική* επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι τεράστια περιοχή έρευνας.
4. Εδώ θα δούμε την απλούστερη μέθοδο επίλυσης, τη μέθοδο του Euler.

Βασική Ιδέα

1. Έστω η διαφορική εξίσωση $y' = f(x, y)$. Έστω πως θέλουμε να βρούμε προσεγγιστικά μια λύση $y(x)$ που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0).
2. Μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της $y(x)$ στο (x_0, y_0): είναι η $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.
3. Έστω μικρό Δx. Τότε, *κατά προσέγγιση*, η τιμή της $y(x_0 + \Delta x)$ θα ισούται με
$$y(x_0 + \Delta x) \simeq y_0 + \Delta x \times y'(x_0, y_0).$$
4. Άρα, *προσεγγιστικά*, βρήκα άλλο ένα σημείο, το
$$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x y'(x_0, y_0))$$
5. Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί από το νέο σημείο που βρήκαμε.

Αλγόριθμος

```
INPUT: f(*,*), Dx, x(0), y(0), y'(0)=f(x(0),y(0)), N
for i=1:N,
  x(i)=x(i-1)+Dx;
  y(i)=y(i-1)+Dx*f(x(i-1),y(i-1));
END
OUTPUT: x(*), y(*)
```

Παρατηρήσεις

1. Με τη μέθοδο αυτή, βρίσκουμε ένα σύνολο σημείων που προσεγγίζουν το γράφημα της άγνωστης συνάρτησης.

2. Μπορούμε επίσης να μετακινηθούμε προς τα αριστερά, αντί για τα δεξιά, θέτοντας αρνητικό Δx.

3. Ένα παράδειγμα της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 1, για την εξίσωση $y' = y$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, y_0 = e$. (Ποια είναι η συνάρτηση y;) Επειδή έχουμε επιλέξει αρκετά μεγάλο βήμα, το σφάλμα, μετά από μόνο πέντε επαναλήψεις του αλγόριθμου, είναι υπολογίσιμο.

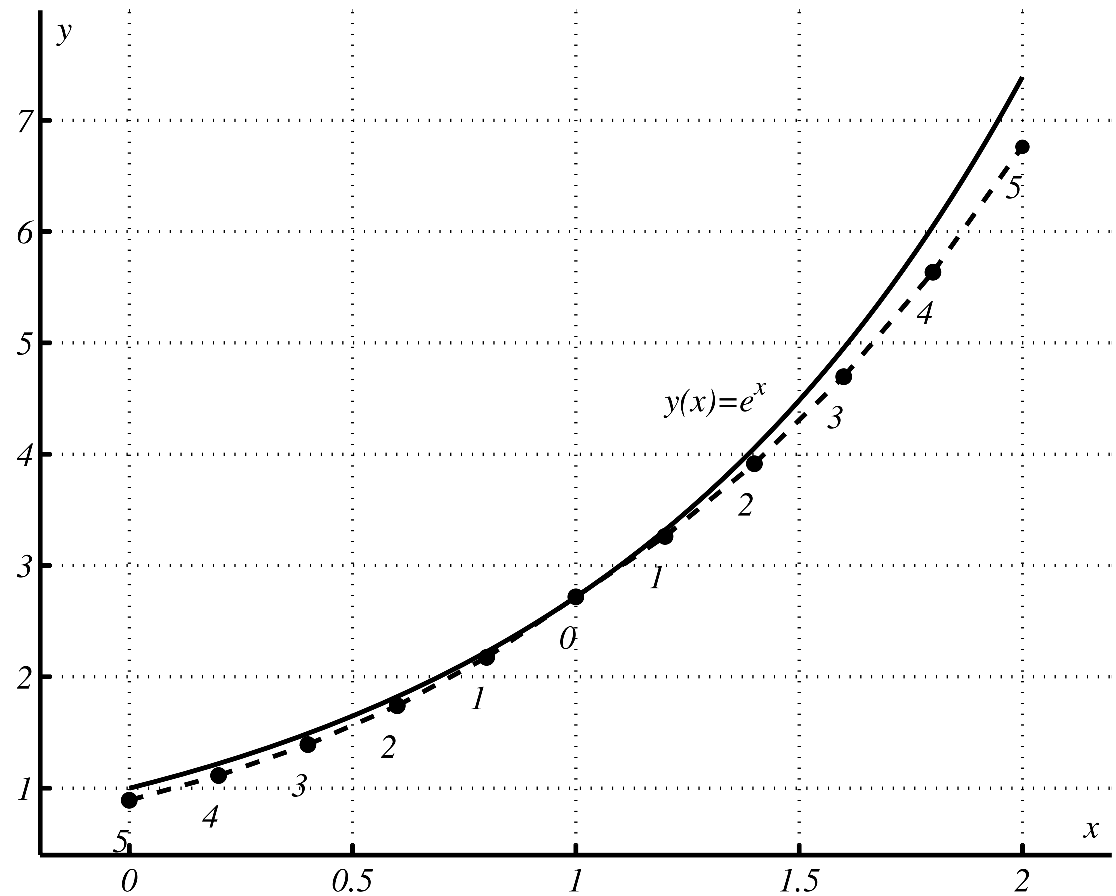
4. Αν έχουμε επιλέξει αρκετά μικρό βήμα Δx, ελπίζουμε ότι το σφάλμα θα είναι αρκετά μικρό ακόμα και μετά από αρκετό αριθμό βημάτων. Μπορούμε να δείξουμε θεωρητικά ότι το σφάλμα στην τελευταία επανάληψη του αλγόριθμου είναι ανάλογο του βήματος.

5. Ένα άλλο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 2, όπου έχει λυθεί αριθμητικά η $y' = \cos x$ στο διάστημα $[0, 10]$, για αρχική συνθήκη $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, και για μειούμενο μέγεθος βήματος. Έχουμε επίσης σχεδιάσει την ακριβή λύση, που μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. (Ποια είναι;).

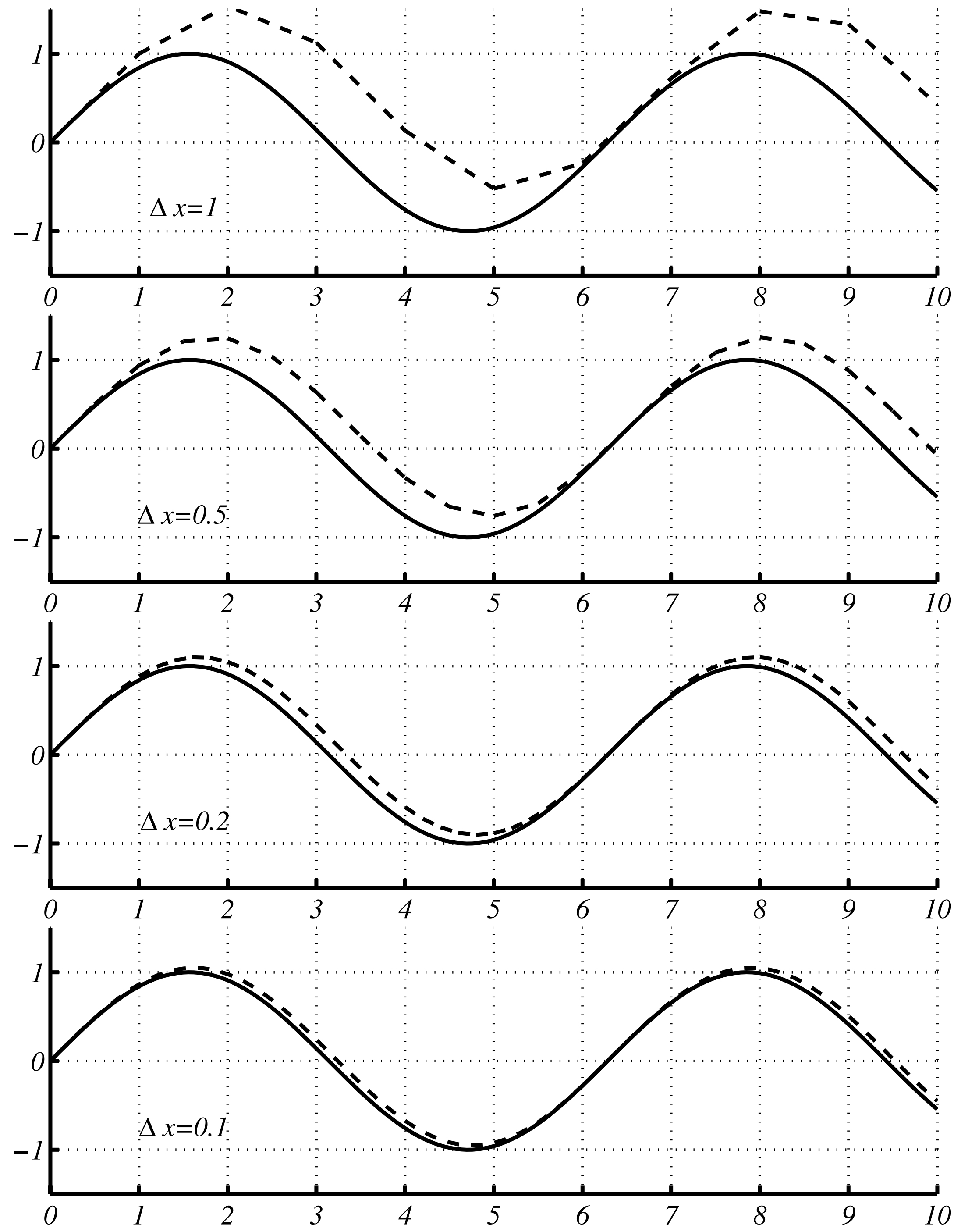
6. Η μέθοδος γενικεύετε και για άλλα είδη ΔΕ.

7. Η μέθοδος είναι πολύ απλή αλλά με μέτρια επίδοση, και υπάρχουν πολύ καλύτερες. Για παράδειγμα, η μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξεως έχει σφάλμα ανάλογο της τέταρτης δύναμης του βήματος.

8. Περισσότερα σε μαθήματα Αριθμητικής Ανάλυσης.



Σχήμα 1: Αριθμητική επίλυση της ΔΕ $y'(x) = y(x)$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 1, y_0 = e$, στο διάστημα $[0, 2]$. Έχουμε εκτελέσει 5 επαναλήψεις προς τα αριστερά, και 5 προς τα δεξιά. Παρατηρήστε ότι καθώς αυξάνουν οι επαναλήψεις, αυξάνει και το σφάλμα ανάμεσα στην συνάρτηση που υπολογίζουμε αριθμητικά, και την πραγματική λύση $y(x) = e^x$.



Σχήμα 2: Αριθμητική επίλυση της ΔΕ $y' = \cos x$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0, y_0 = 0$, και για διάφορα μεγέθη βημάτων, στο διάστημα $[0, 10]$. Παρατηρήστε ότι καθώς μικραίνει το μέγεθος του βήματος, μειώνεται και το σφάλμα ανάμεσα στην συνάρτηση που υπολογίζουμε αριθμητικά (και που έχουμε σχεδιάσει με διακεκομμένη γραμμή), και την πραγματική λύση $y = \sin x$ (που έχουμε σχεδιάσει με συνεχόμενη γραμμή).

5 Κατηγοροποίηση Διαφορικών Εξισώσεων

Παρατήρηση: Οι ΔΕ που έχουμε δη μέχρι τώρα είναι ένα πολύ μικρό δείγμα των ΔΕ που μελετούνται από μαθηματικούς. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τις ακόλουθες κατηγοριοποιήσεις:

Ορισμός 4 (Είδη ΔΕ)

1. *Διαφορική Εξίσωση καλείται μια εξίσωση που συνδέει μια συνάρτηση με τις παραγώγους της.*

2. *Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι μιας μεταβλητής, τότε η ΔΕ καλείται συνήθης. Αλλιώς, καλείται μερική.*

3. *Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι βαθμωτή, τότε η ΔΕ καλείται βαθμωτή. Αλλιώς, αν η άγνωστη συνάρτηση είναι διανυσματική, η ΔΕ καλείται διανυσματική.*

4. *Η ΔΕ καλείται n-οστής τάξεως αν εμφανίζονται παράγωγοι μέχρι και n-οστής τάξεως.*

5. *Η ΔΕ καλείται γραμμική αν είναι της μορφής*
$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$
αλλιώς ονομάζεται μη γραμμική.

6. *Μια γραμμική ΔΕ καλείται ομογενής αν $g(x) = 0$.*

7. *Μια γραμμική ΔΕ καλείται σταθερών συντελεστών αν τα $a_i(x)$ είναι σταθερές.*

Ορισμός 5 (Μερική Παράγωγος)
Έστω συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ορίζω την μερική παράγωγο ως προς την x_i στο σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το όριο
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

Παρατηρήσεις

1. Η μερική παράγωγος ταυτίζεται με την απλή παράγωγο αν θεωρήσουμε όλες τις μεταβλητές σταθερές, εκτός από την x_i. Συνεπώς, διατηρεί όλες τις ιδιότητες που έχουν οι παράγωγοι. Για να μην υπάρχει σύγχυση με την περίπτωση της απλής παραγώγου, τη συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ αντί για $\frac{df}{dx_i}$.

2. Οι περισσότεροι φυσικοί νόμοι εκφράζονται ως μερικές ΔΕ, όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ο χρόνος t και μια ή περισσότερες από τις συντεταγμένες x, y, z.

Παράδειγμα 8 (Φυσικοί Νόμοι)

1. *Η εξίσωση του Poisson*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon(x, y, z)}$$

ικανοποιείται από το ηλεκτρικό δυναμικό $f(x, y, z)$ εντός χώρου με διηλεκτρική σταθερά $\epsilon(x, y, z)$ και χωρική κατανομή φορτίου $\rho(x, y, z)$ Coulomb *ανά* m^3. *Στην ειδική περίπτωση που $\rho(x, y, z) = 0$, παίρνουμε την εξίσωση του Laplace:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Αν περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις, λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

2. *Η κυματική εξίσωση*

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{8}$$

περιγράφει ένα κύμα $f(x, t)$ κατά μήκος μιας χορδής, συναρτήσει της θέσης x πάνω στη χορδή και του χρόνου t.

3. *Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας*

$$c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{9}$$

πρέπει να ικανοποιείται από τη θερμοκρασία $f(x, t)$ που έχει μια ράβδος τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα x, στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t.

4. *Άλλα παραδείγματα είναι οι εξισώσεις του Maxwell, οι νόμοι της δυναμικής του Νεύτωνα, οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, που περιγράφουν τα βαρυτικά πεδία υπό τη γενική θεωρία της σχετικότητας, και οι εξισώσεις Navier-Stokes της υδροδυναμικής. Πρακτικά, ο μόνοι φυσικοί νόμοι που δεν περιγράφονται μέσω συνήθων ή μερικών ΔΕ είναι οι νόμοι του Murphy.*