ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ
(3η ΕΡΓΑΣΙΑ)

1. Να βρεθεί η μετασχηματισμένη $Fourier$ της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{-\sqrt{2}\,x}.$$

2. Να βρεθεί η μετασχηματισμένη $Laplace$ της συνάρτησης:

$$f(t) = e^{-\sqrt{3}\,t}, \quad t \geq 0 \quad \text{για} \quad s > 0.$$

3. Να αναπτυχθεί σε σειρά $Fourier$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & \alpha\nu \ -\pi < x < 0 \\ 0, & \alpha\nu \ x = 0 \\ \pi, & \alpha\nu \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

4. Θεωρούμε μία χορδή μήκους 40cm στερεωμένη στα δύο άκρα της. Ανυψώνουμε κατά 2cm, το σημείο που απέχει 10cm από το αριστερό άκρο της χορδής και την αφήνουμε να ταλαντώνεται ελεύθερα. Να διατυπωθεί και να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών - μερικών διαφορικών εξισώσεων, που αντιστοιχεί στην περίπτωση αυτή.

5. Να υπολογιστούν οι συντελεστές $Legendre$ $\mathrm{A_n}$, $\mathrm{n} = 0,1,2,3$ για τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x, \text{ όπου } -1 \leq x \leq 1.$$

6. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης $Laplace$ στη σφαίρα ακτίνας r, όπου $0 \leq r \leq 1$, με συνοριακή συνθήκη: $U(1,\theta) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \alpha\nu \ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$.

Δίνεται ότι: $[(1 - x^2)\mathrm{P}_\mathrm{n}'\,]' = -\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)\,\mathrm{P}_\mathrm{n}$

7. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών ($Dirichlet$):

$$(E): \ U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + U_{zz} = 0\,, \qquad 0 < r < 2, \ \ 0 < z < 1$$

$$(\Sigma): \ \begin{cases} U(r,0) = U(r,1), & 0 < r < 2 \\ U(2,z) = \dfrac{1}{2}, & 0 < z < 1 \end{cases}$$