Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι Μιγαδικοί Αριθμοί

Ήδη από τον 16^o αιώνα εμφανίζονται αριθμοί της μορφή $a+b\sqrt{-1}$, $(a,\ b\in\mathbb{R})$. Ο Cardan τους χρησιμοποίησε για τη λύση εξισώσεων $2^{ου}$ και $3^{ου}$ βαθμού. Το 18^o αιώνα ο Euler έκανε χρήση των μιγαδικών αριθμών για τη λύση διαφορικών εξισώσεων.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είχαν «φτωχή φήμη» ως το 1830, έτυχαν όμως ευρύτερης αποδοχής κυρίως χάρη στη γεωμετρική τους αναπαράσταση και στον Gauss. Ο πρώτος πλήρης και αυστηρός ορισμός οφείλεται στον (σύγχρονο του Gauss) Hamilton.

Σχέση των μιγαδικών με τη Φυσική: Μηχανική των Ρευστών, Ηλεκτρομαγνητισμός, Θερμότητα, κλπ.

1.1 Το Σώμα των Μιγαδικών Αριθμών

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών $(a,\ b)$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό που ορίζονται ως εξής:

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$

$$(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

Ιδιότητες

Έστω $z_k=(a_k,\ b_k)$ τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

- $z_1+z_2=z_2+z_1$ *αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης*
- $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ *προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης*
- $(0,\ 0)$ *ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης*

  αντίθετος του $z=(a,\ b)$, είναι ο $-z=(-a,\ -b)$

Έστω $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$, $z,\ w\in\mathbb{C}$. Τότε

- $\lambda(\mu z)=(\lambda\mu)z$
- $(\lambda+\mu)z=(\lambda z+\mu z)$
- $\lambda(z+w)=\lambda z+\lambda w$
- $z_1z_2=z_2z_1$ *αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού*
- $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$ *προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού*
- $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ *επιμεριστικότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση*
- $(1,\ 0)$ *ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού*

  αντίστροφος του $z=(a,\ b)\neq(0,\ 0)$, είναι ο $\frac{1}{z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Συνεπώς το $\mathbb{C}$ είναι ένα σώμα (αντιμεταθετικός δακτύλιος με αντίστροφο πολλαπλασιασμού.)

Μια ιδιότητα του $\mathbb{R}$ που δεν μεταφέρεται στο $\mathbb{C}$ είναι εκείνη της διάταξης. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το $i = (0,\ 1)$ δεν μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε ως αρνητικό ή θετικό, χωρίς να υποπέσουμε σε αντίφαση.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $(a,\ 0)$ με τους πραγματικούς αριθμούς a. Φαίνεται αμέσως ότι αυτή η αντιστοιχία διατηρεί τις αριθμητικές πράξεις που ορίσαμε, κι έτσι δεν δημιουργείται σύγχυση αν αντικαταστήσουμε το $(a,\ 0)$ με το a. Μ' αυτή την έννοια λέμε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών της μορφής $(a,\ 0)$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}$. Έτσι, λέμε ότι το $(0,\ 1)$ είναι η τετραγωνική ρίζα του -1, αφού $(0,\ 1)\cdot(0,\ 1) = (-1,\ 0) = -1$.
Συμβολίζουμε με i το $(0, 1)$.
Παρατηρούμε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται ως εξής:

$$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b) = a + bi$$

και αυτή την τελευταία γραφή θα χρησιμοποιούμε στο εξής.

Επιστρέφοντας στο θέμα των τετραγωνικών ριζών, υπάρχουν δύο μιγαδικές τετραγωνικές ρίζες του -1: το i και το $-i$. Επιπλέον, υπάρχουν δύο μιγαδικές τετραγωνικές ρίζες κάθε μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού $a + bi$. Πράγματι:

$$(x+iy)^2 = (a+bi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x^4 - 4ax - b^2 = 0 \\ y = \frac{b}{2x} \end{array} \right.$$

οπότε

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

και έτσι

$$y = \frac{b}{2x} = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \cdot sgn(b),\ \text{όπου}\ sgn(b) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & b \geq 0 \\ -1, & b < 0 \end{array} \right.$$

Παραδείγματα

i) Οι τετραγωνικές ρίζες του $2i$ είναι οι $1 + i$ και $-1 - i$

ii) Οι τετραγωνικές ρίζες του $-5 - 12i$ είναι οι $2 - 3i$ και $-2 + 3i$

Παρατηρούμε, τέλος, ότι οποιαδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές δέχεται λύση στο $\mathbb{C}$. Πράγματι:

$$\begin{array}{l} az^2 + bz + c = 0 \\ a,\ b,\ c \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \end{array} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Αντίθετα, όπως γνωρίζουμε, το $x^2 + 1 = 0$, π.χ., δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$. Δηλ. το $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό (αφού το ανωτέρω ισχύει για κάθε πολυωνυμική εξίσωση.

1.2 Το Μιγαδικό Επίπεδο

$(a,\ b) \leftrightarrow a + ib$
άξονας των x $\leftrightarrow$ πραγματικός άξονας
άξονας των y $\leftrightarrow$ φανταστικός άξονας

(πρόσθεση)

(πολλαπλασιασμός)

Φτιάχνουμε ένα τρίγωνο με δύο πλευρές το 1 και το z_1. Μετά φτιάχνουμε ένα όμοιο τρίγωνο, με τον ίδιο προσανατολισμό, και το z_2 να αντιστοιχεί στο 1. Τότε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο z_1 είναι το $z_1 z_2$.

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιασμός επί i είναι γεωμετρικά ισοδύναμος με στροφή $90°$ αντίθετα με τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Τώρα, αν $z = x + iy$, έχουμε τους εξής όρους:

$Rez := x$: το πραγματικό μέρος του z.

$Imz := y$: το φανταστικό μέρος του z, $Imz \in \mathbb{R}$.

$\bar{z} := x - iy$: ο συζυγής του z.

$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$: η απόλυτη τιμή, ή μέτρο, ή νόρμα του z.

$Argz := \theta$: το όρισμα του z, οπότε

$\sin\theta = \frac{Imz}{|z|},\ \cos\theta = \frac{Rez}{|z|}$

Παραδείγματα

(i) $Rez > 0$

(ii) $\{z : z = \bar{z}\}$

(iii) $\{z : -\theta < argz < \theta\}$

(iv) $\{z : |z + 1| < 1\}$

(v) $\left\{z : \left|argz - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}\right\} = \{z : Imz > 0\}$

Πρόταση 1.2.1 Έστω $z,\ w \in \mathbb{C}$, τότε:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},\ w \neq 0$
4. $\bar{\bar{z}} = z$
5. $Rez = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
6. $Imz = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
7. $z\bar{z} = (Rez)^2 + (Imz)^2$

8. $-|z| \le Rez \le |z|$, $-|z| \le Imz \le |z|$

9. $z\bar{z} = |z|^2$, $|zw| = |z||w|$

10. $|z+w| \le |z| + |w|$: τριγωνική ανισότητα

11. $\Big||z| - |w|\Big| \le |z-w|$

12. $|z| \le |Rez| + |Imz|$

13. $|z_1w_1 + \cdots z_kw_k|^2 \le \Big(|z_1|^2 + \cdots + |z_k|^2\Big)\Big(|w_1|^2 + \cdots + |w_k|^2\Big)$

    ανισότητα Cauchy - Schwarz

    το ' = ' ισχύει $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} \exists \lambda,\ \mu \in \mathbb{C} : (\lambda,\ \mu) \neq (0,\ 0) \\ \text{και } \lambda z_j = \mu \bar{w}_j,\ j = 1,\ \ldots,\ k \end{array}$

14. $arg\bar{z} = -argz$

15. $arg(zw) = argz + argw \quad (mod 2\pi)$

16. $arg\frac{z}{w} = argz - argw \quad (mod 2\pi)$

1.3 Πολικές Συντεταγμένες

Ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός προσδιορίζεται πλήρως από την απόλυτη τιμή του και το όρισμά του.
Αν $z = x + iy$ με $|z| = r$ και $argz = \theta$, τότε

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad \text{και}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Τα $r,\ \theta$ λέγονται *πολικές συντεταγμένες* του z και η προηγούμενη σχέση δίνει την πολική μορφή του z.
Αυτή η μορφή είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς, αφού αν

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

τότε

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$
$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),\ n \in \mathbb{Z} \ \ (\textit{τύπος του } deMoivre)$$

Η τελευταία αυτή σχέση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση εξισώσεων της μορφής $z^n = z_0$.

Παράδειγμα: Η εύρεση των κυβικών ριζών της μονάδας.

$$\begin{aligned} z^3 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0) \\ &\Leftrightarrow \quad r = 1,\ 3\theta = 0\ (mod 2\pi) \\ &\Leftrightarrow \quad z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ &\qquad\quad z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\qquad\quad z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Η πολική μορφή των τριών αυτών ριζών δείχνει ότι είναι οι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο. Ομοίως, οι n-οστές ρίζες ενός $z \in \mathbb{C}$ είναι οι κορυφές κανονικού πολυγώνου με n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας $r^{\frac{1}{2}}$.

Συχνά χρησιμοποιείται οι τύπος του Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Παρατήρηση

Έστω $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin\theta + 2k\pi))$.

Το σύνολο των γωνιών $\theta + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}$ είναι το $argz$.

Κύρια τιμή του ορίσματος, $Argz$, είναι εκείνο το όρισμα που ανήκει στο $(-\pi,\ \pi]$. Ισχύει $argz = (Argz)(mod 2\pi)$.

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $arg_\lambda z$ εκείνη την τιμή του $argz$ για την οποία ισχύει $\lambda < arg_\lambda z \leq \lambda + 2\pi$.

Εύρεση του $Argz$

$z = x + iy,\ x^2 + y^2 = 0$
Θεωρούμε τον $z^* = |x| + i|y|$ και βρίσκουμε το $Argz^* = \phi$,

$$\phi = \arctan\frac{|y|}{|x|},\ \left(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Εν συνεχεία βρίσκουμε σε ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται ο z.

1.3.1 Παραδείγματα - Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το $arg_{\frac{3\pi}{2}}(-1 - i)$

   Λύση

   $z := -1 - i \Rightarrow z^* = 1 + i \Rightarrow$

   $Argz^* = \arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

   $Argz = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ και $argz = 2k\pi - \frac{3\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

Τώρα $\frac{3\pi}{2} < 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k \Rightarrow k = 2$, δηλαδή

$$arg_{\frac{3\pi}{2}}(-1-i) = 4\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$$

2. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε οι $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ να είναι συνευθειακοί.
   Λύση
   α) Έστω ότι τα $z_1,\ z_2,\ z_3$ είναι συνευθειακά. Η ευθεία που διέρχεται από τα $z_1,\ z_2$ έχει εξίσωση
   $$z = z_1 + \tau(z_1 - z_2),\ \tau \in \mathbb{R}, \quad \text{η οποία επαληθεύεται και από το } \ z_3$$
   $$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$
   β) Έστω ότι υπάρχει $\tau \in \mathbb{R} : z_3 - z_1 = \tau(z_1 - z_2)$. Τότε
   $$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + \tau(z_1 - z_2) \\ z_2 &= z_1 - (z_1 - z_2) \\ z_1 &= z_1 + 0(z_1 - z_2) \end{aligned}$$
   απ΄ όπου έπεται ότι τα $z_1,\ z_2,\ z_3$ βρίσκονται επί της ευθείας
   $$z = z_1 + \tau(z_1 - z_2),\ \tau \in \mathbb{R}$$

3. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση
   $$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k,\ k : \text{σταθ.},\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$
   Λύση
   Έστω $z_j = a_j + b_j i,\ j = 1,\ 2$. Τότε
   $$\frac{|x + yi - (a_1 + b_1 i)|}{|x + yi - (a_2 + b_2 i)|} = k \Rightarrow (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = k^2(x - a_2)^2 + k^2(y - b_2)^2 \Rightarrow$$
   $$(1 - k^2)x^2 + 2(k^2(a_2 - a_1)x + (1 - k^2)y^2 + 2(k^2 b_2 - b_1)y = k^2(a_2^2 + b_2^2) - (a_1^2 + b_1^2).$$
   α) $k = 1 \rightsquigarrow$
   $2(b_1 - b_2)y = 2(a_2 - a_1)x + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2,$
   που παριστάνει ευθεία (και μάλιστα τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα $z_1,\ z_2$).

β) $k \neq 1 \rightsquigarrow$
$\left(x + \frac{k^2 a_2 - a_1}{1-k^2}\right)^2 + \left(y + \frac{k^2 b_2 - b_1}{1-k^2}\right)^2 = A$, όπου

$$A := \frac{k^2(a_2^2 + b_2^2) - (a_1^2 + b_1^2)}{1 - k^2} + \left(\frac{k^2 a_2 - a_1}{1 - k^2}\right)^2 + \left(\frac{k^2 b_2 - b_1}{1 - k^2}\right)^2,$$

που παριστάνει κύκλο κέντρου

$$z_0 = \frac{a_1 - a_2 k^2}{1 - k^2} + i\frac{b_1 - b_2 k^2}{1 - k^2}$$

και ακτίνας $R = \sqrt{A}$.

4. Να αποδειχθεί ότι, αν $a,\ b \in \mathbb{R}$ και $\zeta \in \mathbb{C}$, η εξίσωση

$$az\bar{z} + \zeta z + \overline{\zeta z} + b = 0$$

παριστάνει ευθεία όταν $\{a = 0\ \&\ \zeta\bar{\zeta} > 0\}$ και κύκλο πεπερασμένης, μη μηδενικής ακτίνας όταν $\{a \neq 0\ \&\ \zeta\bar{\zeta} > ab\}$.

Λύση

Έστω $\zeta = \gamma + i\delta$ και $z = x + iy,\ (\gamma,\ \delta,\ x,\ y \in \mathbb{R})$. Τότε

$$\begin{aligned} \zeta z + \overline{\zeta z} &= 2Re(\zeta z) \\ &= 2Re\{(\gamma + i\delta)(x + iy)\} \\ &= 2(\gamma x - \delta y) \end{aligned}$$

κι έτσι

$$az\bar{z} + \zeta z + \overline{\zeta z} + b = a(x^2 + y^2) + 2\gamma x - 2\delta y + b = 0$$

(i) Αν $a = 0 \rightsquigarrow 2\gamma x - 2\delta y + b = 0$,
που παριστάνει ευθεία όταν $\gamma^2 + \delta^2 > 0 \Leftrightarrow \zeta\bar{\zeta} > 0$.

(ii) Αν $a \neq 0 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + 2\frac{\gamma}{a}x - 2\frac{\delta}{a}y + \frac{b}{a} = 0$

$$\rightsquigarrow \left(x + \frac{\gamma}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{\delta}{a}\right)^2 = r^2,\ \text{όπου } r^2 = \frac{\gamma^2 + \delta^2 - ab}{a^2},$$

που παριστάνει κύκλο όταν $r" > 0$, δηλαδή όταν $\zeta\bar{\zeta} = \gamma^2 + \delta^2 > ab$.

5. α) Να λυθεί η εξίσωση $z^8 = 1$
β) Να λυθεί η εξίσωση $z^5 = -32$

Υπενθυμίζουμε τον τύπο του **De Moivre:**

Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Για να λύσουμε την εξίσωση

$$z^n = w$$

υποθέτουμε ότι $z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ w = \varrho(\cos\phi + i\sin\phi)$
και έχουμε

$$r = \sqrt[n]{\rho} \ \text{ και } \ n\theta = \phi + 2k\pi \rightsquigarrow$$

$$z = \sqrt[n]{\rho}\Big\{\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\Big\}$$

Λύση

α) Αφού $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, έχουμε

$$\begin{aligned} z &= \cos\frac{2k\pi}{8} + i\sin\frac{2k\pi}{8},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \\ &= 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ -1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}},\ -i,\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} -32 &= 32\{\cos(\pi+2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)\},\ k\in\mathbb{Z} \\ &= 2^5\{\cos(\pi+2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)\} \end{aligned}$$

$$z = 2\Big\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\Big\},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

6. Αν $|z| = 1$, ν.δ.ο. $\left|\frac{w_1z+w_2}{\overline{w_2}z+\overline{w_1}}\right| = 1$, για οποιουσδήποτε $w_1,\ w_2 \in \mathbb{C}$.

Λύση

Έχουμε

$$\frac{w_1z+w_2}{\overline{w_2}z+\overline{w_1}} \stackrel{z\bar{z}=|z|^2=1}{=} \frac{w_1z+w_2}{(\overline{w_2}+\overline{w_1}\bar{z})z}$$

οπότε

$$\left|\frac{w_1z+w_2}{\overline{w_2}z+\overline{w_1}}\right| = \frac{|w_1z+w_2|}{|\overline{w_2}+\overline{w_1}\bar{z}||z|} \stackrel{|z|=|\bar{z}|}{=} \frac{|\overline{w_1z+w_2}|}{|\overline{w_1}\bar{z}+\overline{w_2}||z|} = \frac{|\overline{w_1}\bar{z}+\overline{w_2}|}{|\overline{w_1}\bar{z}+\overline{w_2}||z|} = 1$$

7. **Μιγαδικός Συμβολισμός**

Εξίσωση Ευθείας: $z = w_1 + w_2\tau,\ w_1,\ w_2 \in \mathbb{C},\ tau \in \mathbb{R}$

Εξίσωση Κύκλου: $|z-w| = r,\ w\in\mathbb{C},\ r>0$

Εξίσωση Έλλειψης: $|z-w|+|z+w| = 2a,\ w\in\mathbb{C},\ a>0$, εστίες: $\pm w$, μεγάλος ημιάξονας:a.

8. $z = re^{i\theta}$

   $ze^{ia} = re^{i\theta}e^{ia} = re^{i(\theta+a)}$

   Δηλαδή, z επί e^{ia} σημαίνει στροφή του z κατά τη θετική φορά κατά γωνία a.

9. i) Έστω $p + qi$ ρίζα της $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ με $a_0 \neq 0,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ p,\ q \in \mathbb{R}$. Τότε η $p - qi$ είναι επίσης ρίζα (θέσε $p + qi = re^{i\theta}$ και μετά γράψε τη συζυγή εξίσωση).

   ii) $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0 \Rightarrow z = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5-i)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow z = 2 - 3i$, ή $z = 1 + i$.

   ΟΧΙ συζυγείς ρίζες. (Εδώ οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί.)

1.3.2 Τοπολογικά θέματα σχετικά με το μιγαδικό επίπεδο

Ακολουθίες και Σειρές

Ορισμός 1.3.1 $z_n \to z \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} |z_n - z| \to 0$ (συγκλίνει στο $\mathbb{R}$)

Παρατηρούμε ότι $z_n \to z \Rightarrow \begin{matrix} Rez_n \to Rez \\ Imz_n \to Imz \end{matrix}$

Ορισμός 1.3.2 $\{z_n\}$ ακολουθία Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}:\ n,\ m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$

Πρόταση 1.3.1 Η $\{z_n\}$ είναι συγκλίνουσα $\Leftrightarrow$ η $\{z_n\}$ είναι Cauchy.

Ορισμός 1.3.3 Μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ συγκλίνει αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ συγκλίνει, όπου $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$. Το όριο, τότε, της $\{s_n\}$ λέγεται όριο της σειράς.

Ιδιότητες

(1) Το άθροισμα και η διαφορά συγκλινουσών σειρών συγκλίνει.

(2) Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ είναι: $z_n \to 0$ όταν $n \to \infty$.

(3) Ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ είναι η σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ (οπότε η $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα).

Παραδείγματα

(1) $z^n \to 0$ αν $|z| < 1$ αφού $|z^n - 0| = |z|^n \to 0$

(2) $\frac{n}{n+i} \to 1$ αφού $\left|\frac{n}{n+i} - 1\right| = \left|\frac{-i}{n+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \to 0$

(3) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+i}$ συγκλίνει, αφού $\left|\frac{i^k}{k^2+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ συγκλίνει.

(4) Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+i}$ αποκλίνει, αφού $\frac{1}{k+i}=\frac{k-i}{k^2+1}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}Re\Big(\frac{1}{k+i}\Big)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sum_{k=1}^{\infty}Re\Big(\frac{1}{k+i}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$.

Θέσε $a_k=\frac{1}{k+1},\ b_k=\frac{k}{k^2+1}$.

Τότε $b_k\geq a_k\geq 0$ για $k\geq 1$.

Εξάλλου η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ αποκλίνει. Από το Κριτήριο Σύγκλισης αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$.

1.3.3 Ακολουθίες - Ασκήσεις

1. Έστω $x_n=1+r\cos a+r^2\cos 2a+\cdots+r^n\cos na,\ r\in(0,\ 1)$. Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Λύση

Θέτω $y_n=1+r\sin a+r^2\sin 2a+\cdots+r^n\sin na$

και $z_n:=x_n+iy_n=1+r(\cos a+i\sin a)+\cdots+r^n(\cos na+i\sin na)$

Θέτω $w:=r(\cos a+i\sin a)$ και παρατηρώ ότι $|w|=r<1$.

Από τον τύπο του de Moivre έχω:

$$z_n=1+w+w^2+\cdots+w^n=\frac{1-w^{n+1}}{1-w}$$

και αφού $|w|<1:\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{1-w}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\lim x_n &= \lim(Re z_n)=Re(\lim z_n)=Re\left(\frac{1}{1-w}\right)=\\ &= Re\left(\frac{1}{1-r(\cos a+i\sin a)}\right)=Re\left(\frac{1}{(1-r\cos a)-ir\sin a)}\right)\\ &= Re\left(\frac{(1-r\cos a)+ir\sin a}{(1-r\cos a)^2+r^2\sin^2 a)}\right)=\frac{1-r\cos a}{1-2r\cos a+r^2}\end{aligned}$$

2. Να βρεθούν τα $\lim_{n\to\infty}\frac{i^n}{n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)^n}{n}$.

Λύση

α) $\left|\frac{i^n}{n}\right|=\frac{|i^n|}{n}=\frac{|i|^n}{n}=\frac{1}{n}<\varepsilon$, όταν $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

β) $u_n=\frac{(1+i)^n}{n}$

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(1+i)^{n+1}}{(1+i)^n}\frac{n}{n+1}\right|=\frac{n}{n+1}|1+i|=\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$

για κάθε $n\geq 3$ έχουμε

$\frac{n\sqrt{2}}{n+1}>\frac{3\sqrt{2}}{4}>1.05>1$

οπότε $|u_n|>(1.03)^{n-3}|u_3|$,

άρα η u_n δε συγκλίνει.

1.4 Σειρές

Πρόταση 1.4.1

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & |z| < 1 \\ \text{αποκλίνει}, & |z| \geq 1 \end{cases}$

Πρόταση 1.4.2 (Κριτήριο Σύγκρισης)

(i) $|z_k| \leq |w_k|$ και $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$: συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k$: συγκλίνει απολύτως.

(ii) $|z_k| \leq |w_k|$ και $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$: αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k$: αποκλίνει αλλά η $\sum w_k$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι.

Πρόταση 1.4.3 (Κριτήριο της p-σειράς)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο ∞ αν $p \leq 1$.

Πρόταση 1.4.4 (Κριτήριο του Λόγου)

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \begin{cases} < 1 \\ > 1 \\ = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \text{συγκλίνει απολύτως} \\ \text{αποκλίνει} \\ \text{δεν εφαρμόζεται το κριτήριο} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4.5 (Κριτήριο της Ρίζας)

$$lim_{n\to\infty}(|z_n|)^{\frac{1}{n}} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \\ = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \text{συγκλίνει απολύτως} \\ \text{αποκλίνει} \\ \text{δεν εφαρμόζεται το κριτήριο} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4.6 (Κριτήριο Cauchy)

(i) Μια ακολουθία $f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon \ \forall z \in A, \ \forall p = 1, \ 2, \ldots$$

(ii) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{p} g_k(z)\right| < \varepsilon \ \forall z \in A, \ \forall p = 1, \ 2, \ldots$$

Πρόταση 1.4.7 (Το M-κριτήριο του Weierstrass)

Έστω g_n ακολουθία συναρτήσεων που ορίζεται στο $A \in \mathbb{C}$. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $M_n \geq 0$:

(i) $|g_n(z)| \leq M_n, \ \forall z \in A$

(ii) η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα επί του A.

1.4.1 Παραδείγματα – Ασκήσεις

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ συγκλίνει απολύτως για $Rez > 1$ και ομοιόμορφα για $Rez \geq 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0$.

   Έστω $z = x+iy$. Τότε $n^z = e^{z\log n} = e^{(x+iy)\log n}$.

   $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{e^{x\log n}} = \frac{1}{n^x}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ συκγλίνει αν $x > 1$, δηλ. αν $Rez > 1$.

   Όταν $Rez \geq 1+\varepsilon$ θέτω $M_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ και η ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται από το M-κριτήριο του Weierstrass.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-inz}}{n^2+1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $Imz < -a$ για κάθε $a > 0$.

   Έστω $z = x+iy$. Τότε $\left|\frac{e^{-inz}}{n^2+1}\right| = \left|\frac{e^{-inx}e^{ny}}{n^2+1}\right| = \frac{e^{ny}}{n^2+1}$

   Αν $Imz = y < -a < 0$, τότε $e^{ny} < e^{-na}$ και έτσι $\left|\frac{e^{-inz}}{n^2+1}\right| \leq \left|\frac{e^{-na}}{n^2+1}\right| := M_n$.

   Εξετάζω τη σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{\infty}M_n$.

   Κριτήριο Λόγου: $\lim\frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim\left|\frac{e^{-(n+1)a}}{(n+1)^2+1}\frac{n^2+1}{e^{-na}}\right| = e^{-a}\lim\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = e^{-a} < 1$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

   Θέτω $A_\sigma = \{z : |z| \leq \sigma\},\ 0 \leq \sigma < 1$.

   Θέτω $g_n(z) = \frac{z^n}{n}$.

   Τότε $|g_n(z)| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{\sigma^n}{n} \leq \sigma^n := M_n$ και αφού $\sigma < 1$, η $\sum M_n$ συγκλίνει.

   Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A_σ.

   Η σειρά αυτή συγκλίνει σημειακά στο $A = \{z : |z| < 1\}$ αφού κάθε $z \in A$ βρίσκεται αρκετά κοντά σε κάποιο A_σ για σ αρκετά κοντα στο 1.

   Όμως η σειρά *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα επί του A. Αν συνέκλινε, η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ θα συνέκλινε ομοιόμορα επί του $[0,\ 1)$ που δεν ισχύει. (άσκηση).

Κεφάλαιο 2

2.1 Κατάταξη Συνόλων στο Μιγαδικό Επίπεδο

Ορισμός 2.1.1 .

- $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ ανοιχτός δίσκος, περιοχή του z_0.
- $C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$ κύκλος.
- S : ανοικτό $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ $\forall z \in S\ \exists \delta > 0 : D(z_0, \delta) \subseteq S$.
- $\tilde{S} = \mathbb{C} - S$ ($\tilde{S} = \{z \in \mathbb{C} : z \notin S\}$) συμπλήρωμα του S.
- S : κλειστό $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{S}$ ανοιχτό
  $\Leftrightarrow \{z_n\} \in S$ και $z_n \to z \Rightarrow z \in S$
- $\partial S = \{z : \forall \delta > 0 :\ D(z, \delta) \cap S = \emptyset$ και $D(z, \delta) \cap \tilde{S} \neq \emptyset\}$
- $\overline{S} = S \cup \partial S$
- S : φραγμένο $\Leftrightarrow \exists M > 0 :\ S \subseteq D(0, M)$
- S κλειστό και φραγμένο $\overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ S συμπαγές
- S μη συνεκτικό: υπάρχουν δύο ανοιχτά, ξένα σύνολα A και B που η ένωσή τους περιέχει το S ενώ ούτε το A ούτε το B περιέχουν το S.
- S συνεκτικό αν δεν είναι μη συνεκτικό.
- $[z_1, z_2]$: το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z_1, z_2.
- πολυγωνική γραμμή: πεπερασμένη ένωση ευθυγράμμων τμημάτων της μορφής $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n]$.
- Αν κάθε δύο σημεία του S μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή που περιέχεται στο S, τότε το S λέγεται πολυγωνικά συνεκτικό.

- πολυγωνικά συνεκτικό $\Rightarrow$ συνεκτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες για τα ανοιχτά σύνολα.

- τόπος $\overset{\text{ορς}}{=}$ ανοιχτό + συνεκτικό.

2.2 Συνεχείς Συναρτήσεις

Ορισμός 2.2.1 Μια συνάρτηση μιγαδικών τιμών $f(z)$ ορισμένη σε μια περιοχή του z_0, είναι συνεχής στο z_0, αν $z_n \to z_0$ συνεπάγεται ότι $f(z_n) \to f(z_0)$.

Διαφορετικά, η f είναι συνεχής στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε αν $|z - z_0| < \delta$ τότε $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Η F είναι συνεχής σε έναν τόπο D αν για κάθε ακολουθία $\{z_n\} \subseteq D$ και $z \in D$ τέτοια ώστε $z_n \to z$, να ισχύει $f(z_n) \to f(z)$.

Αν διασπάσουμε την f στο πραγματικό και φανταστικό της μέρος

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

όπου η u και η v παίρνουν πραγματικές τιμές, είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής τότε και μόνο τότε αν οι u και v είναι συνεχείς συναρτήσεις του (x, y).

Παραδείγματα.

1. Κάθε πολυώνυμο

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x^k y^j$$

   είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το επίπεδο.

2. Η $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ είναι συνεχής στο "επίπεδο"$\{z : z \neq 0\}$.

Ιδιότητες

Είναι προφανές ότι το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο (με μη μηδενικό παρονομαστή) συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Λέμε ότι $f \in \mathbb{C}^n$ αν και το Ref και το Imf έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $n-$τάξης. Μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο D, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ τέτοιο ώστε $n > N$ συνεπάγεται ότι $|f(z_n) - f(z)| < \epsilon$ για κάθε $z \in D$.
Αναφερόμενοι πάλι στα πραγματικά και φανταστικά μέρη των $\{f_n\}$, βλέπουμε ότι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
M-test. Αν f_k συνεχής στο D, $k = 1, 2\ldots$ και $|f_k(z)| \leq M_k$ στο D και αν η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο D.
Θυμίζουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση απεικονίζει συμπαγή/συνεκτικά σύνολα σε συμπαγή/συνεκτικά σύνολα, ενώ αυτό δε συμβαίνει για καμιά άλλη κατηγορία συνόλων. Π.χ. η

$f(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το φραγμένο σύνολο $0 < |z| < 1$ επί του μη φραγμένου συνόλου $|z| > 1$. Τέλος έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1 Έστω ότι η $u(x, y)$ έχει μερικές παραγώγους u_x και u_y που μηδενίζονται σε κάθε σημείο ενός τόπου D. Τότε η u είναι σταθερή στον D.

2.2.1 Στερεογραφική Προβολή

Είναι συχνά χρήσιμο να συμπεριλάβουμε στο μιγαδικό επίπεδο το **σημείο στο άπειρο**, που συμβολίζεται ∞. Για να αντιληφθούμε "οπτικά"το σημείο στο άπειρο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μιγαδικό επίπεδο περνάει από τον ισημερινό της μοναδιαίας σφαίρας με κέντρο το $z = 0$. Σε κάθε σημείο z του επιπέδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο P της επιφάνεις της σφαίρας, που βρίσκεται ως τομή της ευθείας zN (N ο βόρειος πόλος) με την επιφάνεια αυτή. Αντιστρόφως, σε κάθε σημείο P της επιφάνειας της σφαίρας, πλην του N, αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο z του επιπέδου. Αντιστοιχώντας στο N το σημείο στο άπειρο, πετυχαίνουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της επιφάνειας της σφαίρας και του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου. Αυτή η σφαίρα λέγεται **σφαίρα του Riemann** και η αντιστοιχία **στερεογραφική προβολή**, ή **προβολή του Πτολεμαίου**. Το σύνολο $|z| > \frac{1}{\epsilon}$ λέγεται περιοχή του ∞.

Ορισμός 2.2.2 Λέμε ότι $\{z_k\} \to \infty$ αν $|z_k| \to \infty$, δηλαδή αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{Z}$: $k > N$ συνεπάγεται ότι $|z_k| > M$. Ομοίως $f(z) \to \infty$ αν $|f(z)| \to \infty$.

2.3 Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z

2.3.1 Αναλυτικά Πολυώνυμα

Ένα πολυώνυμο $P(x, y)$ λέγεται αναλυτικό πολυώνυμο, αν υπάρχουν (μιγαδικές) σταθερές a_k έτσι ώστε:

$$P(x, y) = a_0 + a_1(x + iy) + a_2(x + iy)^2 + \ldots + a_N(x + iy)^N$$

Τότε θα λέμε ότι το P είναι πολυώνυμο ως προς z και θα το γράφουμε ως

$$P(x, y) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^N$$

Π.χ. Το πολυώνυμο $x^2 + y^2 + 2ixy$ είναι αναλυτικό ενώ εύκολα δείχνεται ότι το $x^2 + y^2 - 2ixy$ δεν είναι αναλυτικό.

Ορισμός 2.3.1 Έστω $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου u και v συναρτήσεις πραγματικών τιμών. Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι u_x, u_y, v_x, v_y ορίζουμε

$$f_x = u_x + iv_x, \quad f_y = u_y + iv_y$$

Αποδεικνύεται ότι ένα πολυώνυμο είναι αναλυτικό τότε και μόνο τότε αν $P_y = iP_x$.

Ορισμός 2.3.2 Μια συνάρτηση f με μιγαδικές τιμές που ορίζεται σε μια περιοχή του z, λέγεται διαφορίσιμη στο z αν υπάρχει το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(z)$. Το h δεν είναι απαραιτήτως πραγματικό.

Ικανοποιούνται οι γνωστοί τύποι για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Τέλος αποδεικνύεται ότι αν το P είναι αναλυτικό, τότε είναι διαφορίσιμο σε κάθε z. Μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων του z, είναι αυτές που δίνονται από άπειρα πολυώνυμα του z, ή αλλιώς δυναμοσειρές του z.

2.3.2 Δυναμοσειρές

Ορισμός 2.3.3 Δυναμοσειρά είναι μια σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

Για τη μελέτη της σύγκλισης δυναμοσειρών, μας χρειάζεται η έννοια του $\overline{lim}$ ($limsup$), μιας θετικής πραγματικής ακολουθίας:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Αφού το $\sup_{k\geq n} a_k$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του n, το όριο ή υπάρχει πάντα ή είναι ∞. Οι ιδιότητες του $\overline{lim}$ που θα χρειαστούμε είναι:
Αν $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$ τότε:

1. για κάθε N και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\kappa > N$ τέτοιο ώστε $a_k \geq L$

2. για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει N τέτοιο ώστε $a_k \leq L + \epsilon$, για κάθε $k > N$

Θεώρημα 2.3.1 Έστω ότι $\overline{\lim}|c_k|^{1/k} = L$.

1. Αν $L = 0$, η $\sum c_k z^k$ συγκλίνει για όλα τα z.

2. Αν $L = +\infty$, η $\sum c_k z^k$ συγκλίνει μόνο για $z = 0$.

3. Αν $0 < L < +\infty$, θέτουμε $R = \frac{1}{L}$. Τότε η $\sum c_k z^k$ συγκλίνει για $|z| < R$ και αποκλίνει για $|z| > R$. Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Παρατήρηση 2.3.1

1. Αν η $\sum c_k z^k$ έχει ακτίνα σύγκλισης R, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε μικρότερο δίσκο $|z| \leq R - \delta$ κι έτσι είναι συνεχής στο πεδίο σύγκλισής της.

2. Το άθροισμα συγκλινουσών δυναμοσειρών είναι συγκλίνουσα δυναμοσειρά.

3. Το γινόμενο Cauchy συγκλινουσών δυναμοσειρών είναι συγκλίνουσα δυναμοσειρά για $|z| < min(R_a, R_b)$, όπου R_a, R_b οι ακτίνες σύγκλισης των δύο δυναμοσειρών. Υπενθυμίζουμε ότι αν a_n, b_n είναι δύο ακολουθίες το γινόμενο Cauchy είναι η ακολουθία

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

.

4. Αν συμβεί να υπάρχει το $\lim \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, τότε

$$R = \frac{1}{\underline{\lim}|c_k|^{1/k}} = \lim \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|.$$

Αυτή η σχέση έχει μεγάλη πρακτική σημασία.

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.
Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για $|z| < 1$ και αποκλίνει για $|z| > 1$ αφού $n^{1/n} \to 1 \in (0, \infty)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.
Η δυναμοσειρά αυτή έχει, επίσης, ακτίνα σύγκλισης 1. Όμως, συγκλίνει και για $|z| = 1$, αφού $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \to 0$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε z, αφού $\frac{1}{(n!)^{1/n}} \to 0$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$.
$\lim \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = 0$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο $z = 0$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$.
Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι $R = \lim(2^n n^2)^{1/n} = \lim(2n^{2/n} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$ και κέντρο είναι το $\frac{1}{2}$.

Θεώρημα 2.3.2 Έστω $f(z) = \sum c_n z^n$ και ότι η σειρά συγκλίνει για $|z| < R$. Τότε υπάρχει η $f'(z)$ και ισούται με $\sum nc_n z^{n-1}$ στον $|z| < R$.

Πόρισμα 2.3.1 Οι δυναμοσειρές έχουν κάθε τάξης παράγωγο μέσα στο πεδίο σύγκλισής τους.

Πόρισμα 2.3.2 Αν η $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ έχει μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης, τότε $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ για κάθε n.

Θεώρημα 2.3.3 (Μοναδικότητας Δυναμοσειρών). Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ μηδενίζεται σε όλα τα σημεία μιας $\{z_k\} : z_k \to 0$ και $z_k \neq 0$. Τότε η δυναμοσειρά είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν.

Πόρισμα 2.3.3 Αν η $\sum a_n z^n$ και η $\sum b_n z^n$ συγκλίνουν και συμπίπτουν σε ένα σύνολο σημείων που έχει σημείο συσσώρευσης το 0, τότε $a_n = b_n$ για κάθε n.

Πόρισμα 2.3.4 Έστω $\overline{\lim}|c_n|^{1/n} < \infty$, θέτουμε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Τότε $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Θεώρημα 2.3.4 (Abel). Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο $z_1 \neq 0$. Τότε συγκλίνει απολύτως σε κάθε σημείο z: $|z| < |z_1|$. Έστω $r < |z_1|$. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| \leq r$.

2.3.3 Αναλυτικές Συναρτήσεις

Αναλυτικότητα και εξισώσεις Cauchy-Riemann

Πρόταση 2.3.1 Αν η $f = u + iv$ είναι διαφορίσιμη στο z, υπάρχουν οι f_x και f_y στο z και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.

$$f_y = i f_x,$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν διαφορίζονται σε ένα σημείο παρ'όλο που υπάρχουν εκεί οι μερικές παράγωγοί τους και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann.

Παράδειγμα 2.3.1 .

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

Η $f = 0$ και στους δύο άξονες και συνεπώς $f_x = f_y = 0$ στο μηδέν, όμως το

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

δεν υπάρχει. Πράγματι επί της ευθείας $y = ax$: $\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{a}{1+a^2}$ για $z \neq 0$ και συνεπώς το όριο εξαρτάται από το a!

Ισχύει εντούτοις το εξής μερικό αντίστροφο:

Πρόταση 2.3.2 Έστω ότι υπάρχουν σε μια περιοχή του z οι $f_x,\ f_y$. Τότε αν οι $f_x,\ f_y$ είναι συνεχείς στο z και ισχύει $f_y = if_x$ εκεί, η f είναι διαφορίσιμη στο z.

Ορισμός 2.3.4 Η f είναι **αναλυτική** (ολόμορφη) στο z, αν είναι διαφορίσιμη σε μια περιοχή του z. Η f είναι αναλυτική σε ένα σύνολο S αν είναι διαφορίσιμη σε όλα τα σημεία ενός ανοιχτού συνόλου που περιέχει το S. Μια αναλυτική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (σε όλο το $\mathbb{C}$) λέγεται **ακέραια** συνάρτηση.

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο διαφορίσιμων συναρτήσεων είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Ομοίως και η σύνθεση. Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις, η αντίστροφη μιας συνάρτησης μπορεί να μην είναι καν συνεχής. Ο επόμενος ορισμός, μας επιτρέπει να μιλάμε για διαφορισιμότητα των αντιστρόφων συναρτήσεων.

Ορισμός 2.3.5 Έστω S και T ανοιχτά σύνολα και έστω ότι η f είναι 1-1 στο S με $f(S) = T$. Η g είναι η αντίστροφη της f στο T, αν $f(g(z)) = z$ για $z \in T$. Η g είναι η αντίστροφη της f στο z_0, αν είναι η αντίστροφη της f σε κάποια περιοχή του z_0.

Πρόταση 2.3.3 Έστω ότι η g είναι η αντίστροφη της f στο z_0 και ότι η g είναι συνεχής στο z_0. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $g(z_0)$ και αν $f'(g(z_0)) \neq 0$, τότε η g είναι διαφορίσιμη στο z_0 και $g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}$.

Η αναλυτικότητα είναι μια εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα. Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα μαζί της σε επόμενα κεφάλαια. Για την ώρα δίνουμε δύο άμεσες συνέπειές της.

Πρόταση 2.3.4 Αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική σε έναν τόπο D και η u είναι σταθερή, τότε η f είναι σταθερή.

Πρόταση 2.3.5 Αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική σε έναν τόπο D και η $|f|$ είναι σταθερή εκεί, τότε η f είναι σταθερή.

Φυσική ερμηνεία της Διαφορισιμότητας

Έχουμε δει ότι για να είναι μια συνάρτηση διαφορίσιμη, πρέπει να ικανοποιείται μια συγκεκριμένη συνθήκη, που "αναλυτικά"εκφράζεται από τις συνθήκες Cauchy-Riemann. Θα δούμε τώρα τι σημαίνει αυτή η συνθήκη "φυσικά". Ποια είναι δηλαδή εκείνη η ξεχωριστή ιδιότητα του διανυσματικού πεδίου που διακρίνει μια διαφορίσιμη από μια μη διαφορίσιμη μιγαδική συνάρτηση;

Η καθαρότητα της απάντησης εξαρτάται πολύ από τον καλό συμβολισμό. Έστω z ένα μεταβλητό σημείο ενός δισδιάστατου διανυσματικού πεδίου και $\bar{s}$ το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο z. Έστω x, y οι συντεταγμένες του z και u, v οι συντεταγμένες του $\bar{w}$. Τότε

$$z = x + iy, \ \ \bar{w} = u + iv \ \text{ οπότε } w = u - iu.$$

Θεωρούμε το w ως συνάρτηση του z

$$w = u - iv = f(z) = f(x + iy)$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη, θα πρέπει να ισχύει (Πρόταση 2.3.1) $f_y = if_x$, δηλαδή

$$u_x - iv_x = \frac{1}{i}(u_y - v_y) \Leftrightarrow$$

$$u_x + v_y = 0 \tag{2.1}$$

$$v_x - u_y = 0 \tag{2.2}$$

Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν ότι η συνάρτηση που παριστάνεται από το διανυσματικό πεδίο είναι διαφορίσιμη.

1. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο μας ως πεδίο ροής και το $\bar{w}$ ως μια ταχύτητα, την ένταση του ρεύματος στο σημείο z. Τότε η έκφραση $u_x + v_y$ λέγεται απόκλιση του διανύσματος $\bar{w}$, συμβολίζεται με $\mathrm{div}\bar{w}$ και μετράει την εξερχόμενη ροή ανά μονάδα όγκου σε μια κλειστή περιοχή του σημείου z. Αν $\mathrm{div}\bar{w} > 0$ το σημείο z δρα ως "πηγή"(source), ενώ αν $\mathrm{div}\bar{w} < 0$ το z δρα ως "καταβόθρα"(sink). Αν η απόκλιση μηδενίζεται σε κάθε σημείο, το πεδίο λέγεται σωληνοειδές (sourceless). Έτσι η (2.1) γράφεται

   $$\mathrm{div}\bar{w} = 0$$

   και χαρακτηρίζει ένα σωληνοειδές πεδίο.

2. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο μας ως πεδίο δυνάμεων και το $\bar{w}$ ως μια δύναμη, την ένταση του πεδίου στο σημείο z. Η έκφραση $v_x - u_y$ λέγεται στροβιλισμός (curl) του $\bar{w}$ και μετράει το έργο ανά μονάδα επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, το έργο που παράγεται από το πεδίο όταν ένα μικρό σωματίδιο διαγράφει μια κλειστή καμπύλη που περικλείει το z διαιρείται με την επιφάνεια που περικλείει η καμπύλη. Όταν οι διαστάσεις της καμπύλης τείνουν στο μηδέν, αυτό το ανηγμένο έργο τείνει στο $\mathrm{curl}\bar{w}$. Αν το curl μηδενίζεται σε κάθε σημείο, το πεδίο λέγεται αστρόβιλο. Έτσι η (2.2) γράφεται

   $$\mathrm{curl}\bar{w} = 0$$

   και χαρακτηρίζει το πεδίο ως αστρόβιλο.

Συνοψίζοντας, λέμε ότι μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής παριστάνεται με ένα σωληνοειδές και αστρόβιλο πεδίο.

Η εξίσωση του Laplace

Μια πραγματική συνάρτηση h δύο πραγματικών μεταβλητών $x,\ y$ λέγεται **αρμονική** σε έναν τόπο του επιπέδου xy, αν παντού σε αυτόν τον τόπο έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\triangle h = \nabla^2 h = h_{xx} + h_{yy} = 0$$

που είναι γνωστή ως **εξίσωση του Laplace**. Από τις συνθήκες Cauchy Riemann που ικανοποιούν οι συντεταγμένες συναρτήσεις μιας αναλυτικής συνάρτησης $f = u + iv$, παραγωγίζοντας ως προς x, παίρνουμε ότι:

$$u_{xx} = v_{yx} \quad u_{yx} = -v_{xx}.$$

Παραγώγιση ως προς y, δίνει αντίστοιχα

$$u_{xy} = v_{yy} \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Η συνέχεια των μερικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι $v_{yx} = v_{xy}$ και $u_{xy} = u_{yx}$. Συνεπώς:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ και } v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Έχουμε, δηλαδή, ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Ασκήσεις

1. Αν οι $f,\ \bar{f}$ είναι αναλυτικές στον τόπο D τότε η f είναι σταθερή στον D.

   Λύση
   Έστω $f = u + iv$. Αφού η f είναι αναλυτική ισχύουν οι σχέσεις Cauchy-Riemann, δηλαδή $u_x = v_y$ και $v_x = -u_y$. Εξάλλου $\bar{f} = u - iv$. Αφού όμως είναι και η $\bar{f}$ αναλυτική, ισχύουν και για αυτήν οι συνθήκες Cauchy Riemann, δηλαδή $u_x = -v_y$ και $-v_x = -u_y$. Απ'αυτές έπεται ότι $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Άρα η f είναι σταθερή.

2. (Πολικές Συντεταγμένες) Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις.

   (α΄) Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

   (β΄) Η εξίσωση Laplace : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$.

   (γ΄) Παράγωγος : $f'(z) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz}\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

   Λύση
   Θα αποδείξουμε την πρώτη σχέση. Έχουμε ότι $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Άρα

   $$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r}\sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Από τις παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta.$$

Από τις συνθήκες C-R (για καρτεσιανές συντεταγμένες) παίρνουμε το αποτέλεσμα.

3. Έστω η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, αναλυτική στον τόπο D και υπάρχουν $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ώστε να ισχύει $au(x,y) + bv(x,y) = c$ στον D. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στον D.

   Λύση

   Παραγωγίζοντας την $au(x,y) + bv(x,y) = c$ θα έχουμε

   $$\left.\begin{array}{r} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{C-R}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} av_y + bv_x = 0 \\ -av_x + bv_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

   $$\left.\begin{array}{r} abv_y + b^2 v_x = 0 \\ abv_y - a^2 v_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a^2 + b^2) v_x = 0 \Rightarrow v_x = 0.$$

   Άρα και $v_y = 0$ και οι συνθήκες $C - R$ δίνουν ότι $u_x = u_y = 0$. Συνεπώς η f είναι σταθερή.

4. Η $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι αναλυτική.

   Λύση

   Έστω $z = x + yi$. Τότε $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x - iy$. Επομένως $u_x = 1$ και $v_y = -1$. Οι συνθήκες C-R δεν ισχύουν άρα η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική.

5. Συζυγείς συντεταγμένες.

   Λύση

   $z = x + yi$, $\bar{z} = x - iy$. Άρα $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Έχουμε ότι

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$$

   Άρα

   $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

   και

   $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

   Οι συνθήκες C-R είναι $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$

6. Έστω $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ αναλυτική. Είδαμε, τότε ότι οι u, v είναι αρμονικές, δηλαδή
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$
Οι u, v (πραγματικές συναρτήσεις) ορισμένες σε έναν τόπο D λέγονται συζυγείς αρμονικές αν η $f = u + iv$ (μιγαδική συνάρτηση) είναι αναλυτική στον G ή ισοδύναμα αν οι u, v είναι αρμονικές και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann.

   (α′) Η $\phi(x,y) = x^2 - y^2$ είναι αρμονική. Να βρεθεί η συζυγής της.
   Λύση
$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2\\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y \Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$
   Έστω w η συζυγής της. Θα πρέπει οι ϕ, w να ικανοποιούν τις συνθήκες C-R $w_y = \phi_x$ και $w_x = -\phi_y$. Άρα θα πρέπει $w_y = 2x \Rightarrow w = 2xy + \mu(x)$ όπου $\mu(x)$ σταθερή ως προς y. Άρα $w_x = 2y + \mu'(x) \Rightarrow -\phi_y = 2y + \mu'(x) \Rightarrow 2y = 2y + \mu'(x) \Rightarrow \mu'(x) = 0 \Rightarrow \mu_1(x) = c \Rightarrow w(x,y) = 2xy + c$.

   (β′) Να βρεθεί αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, από τις σχέσεις $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ και $f(2) = 0$.
   Λύση
   $v_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ και $v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Επειδή πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες C-R θα έχουμε: $u_y = -v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow u(x,y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy + \mu(x) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \mu(x)$. Έτσι παίρνουμε ότι $u_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} + \mu'(x)$ και αφού πρέπει $u_x = v_y \Rightarrow \mu(x) = c$. Από τη σχέση $f(2) = 0$ παίρνουμε ότι $\mu(x) = \mu(2) = \frac{1}{2}$, και έτσι τελικά
$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$$

2.4 Οι Στοιχειώδεις Συναρτήσεις

2.4.1 Η εκθετική συνάρτηση

Επιθυμούμε να ορίσουμε μια εκθετική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής z. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε μια αναλυτική συνάρτηση f τέτοια ώστε
$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$$
$$f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε ότι $f(z) = f(x+iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy)$. Θέτοντας $f(iy) = A(y) + iB(y)$ παίρνουμε
$$f(z) = e^x A(y) + ie^x B(y).$$

Για να είναι η f αναλυτική, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες C-R συνεπώς θα πρέπει $A(y) = B'(y)$ και $A'(y) = -B(y)$. Δηλαδή $A''(y) = -A(y)$. Έτσι έχουμε ότι

$$A(y) = a\cos y + b\sin y$$
$$B(y) = -A'(y) = -b\cos y + a\sin y.$$

Όμως $f(x) = e^x \Rightarrow A(0) = 1,\ B(0) = 0$. Εξάλλου $A(0) = a,\ B(0) = -b$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στην

$$f(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η f είναι ακέραια συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις που θέλαμε. Η f είναι συνεπώς ακέραια "επέκταση"της πραγματικής εκθετικής συνάρτησης. Γράφουμε $f(z) = e^z$.

Ιδιότητες της e^z

1. $|e^z| = e^x$
2. $e^{\bar{z}} = \bar{e^z}$
3. $e^{iy} = cosy + isiny$
4. Η εξίσωση $e^z = a$ έχει απείρου πλήθους λύσεις για κάθε $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{C})$
5. Το πεδίο τιμών της e^z είναι το $\mathbb{C} - \{0\}$.
6. $e^{z+2\pi i} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$
7. Στη λωρίδα $-\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi$ η e^z είναι 1-1.
8. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
9. $(e^z)' = e^z$
10. Η εκθετική συνάρτηση μπορεί να οριστεί ως $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

2.4.2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Για να ορίσουμε τα $\sin z$ και $\cos z$ παρατηρούμε ότι για $y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

οπότε

$$\sin y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) \text{ και } \cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right).$$

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ακέραιες επεκτάσεις των $\sin x$ και $\cos x$ θέτοντας

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{iz}\right)
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες

1. $\cos' z = -\sin z$
2. $\sin' z = \cos z$
3. $\cos(-z) = \cos z$, $\cos(z+2\pi) = \cos z$,$\cos(z+\pi) = -\cos z$
4. $\sin(-z) = -\sin z$, $\sin(z+2\pi) = \sin z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$
5. $\cos^2 z + \sin^z = 1$
6. $\cos z + i\sin z = e^{iz}$ (τύπος του Euler)
7. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
8. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
9. Αντίθετα με το $\sin x$ το $\sin z$ δεν φράσσεται κατ'απόλυτη τιμή από το 1.
   π.χ. $|\sin(10i)| = \frac{1}{2}\left(e^{10} - e^{-10}\right) > 10000$ (!)
10. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
11. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
12. οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο ορίζονται και ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\ \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

ενώ οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως εξής:

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),\ \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right),\ \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

κ.ο.κ.

Η άλγεβρα και ο λογισμός αυτών των συναρτήσεων γίνεται με βάση τους προηγούμενους ορισμούς. Οι τύποι που αποδεικνύονται είναι ίδιοι με αυτούς που γνωρίζουμε για τις αντίστοιχες συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

2.4.3 Η Λογαριθμική Συνάρτηση

Έστω $\operatorname{Log} r$ ο γνωστός φυσικός λογάριθμος ενός $r \in \mathbb{R}^+$, όπως ορίζεται στον απειροστικό λογισμό. Αν $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ και $r = |z|$, $\theta = \arg z$, ορίζουμε

$$\log z = \operatorname{Log} r + i\theta.$$

Αυτή είναι μια πλειότιμη συνάρτηση. Αν θ_0 συμβολίζει την κύρια τίμη του $\arg z$ $(-\pi < \theta_0 \leq \pi)$, τότε $\theta = \theta_0 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ και έτσι η αρχική εξίσωση γράφεται: $\log z = \operatorname{Log} r + i\,(\theta_0 + 2n\pi)$. Αν τώρα θέσουμε $n = 0$ στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε την κύρια τιμή του λογαρίθμου $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\theta_0$, $r > 0$, $-\pi < \theta_0 \leq \pi$. Η απεικόνιση $w = \log z$ είναι μονότιμη με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C} - \{0\}$ και πεδίο τιμών το $-\pi < Im(w) \leq \pi$. Προφανώς αν το πεδίο ορισμού περιοριστεί στο $\mathbb{R}^+$, ο $\operatorname{Log} z$ ανάγεται στο συνήθη φυσικό λογάριθμο.

Παρατήρηση 2.4.1 $w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = e^w$

Μελετώντας τις συνιστώσες συναρτήσεις $\operatorname{Log} r$ και θ_0 του $\operatorname{Log} z$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $\{(r, \theta) : r > 0, pi < \theta < \pi\}$ και ότι αυτό είναι το μέγιστο δυνατό σύνολο, όπου η $\operatorname{Log} z$ είναι συνεχής. Επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\operatorname{Log} z$ είναι αναλυτική στον παραπάνω τόπο. (Αυτό έπεται από τις συνθήκες C-R και πιο συγκεκριμένα από την πολική μορφή τους: $u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0)$, $\frac{1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0) = -v_r(r_0, \theta_0)$). Άμεσα προκύπτει η ιδιότητα

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}, \quad (|z| > 0,\ -\pi < Argz < \pi).$$

αν περιοριστούμε στο σύνολο $\{(r, \theta) : r > 0, a < \theta < a + 2\pi,\ a :\ \text{αυθαίρετος σταθερός αριθμός}\ \}$ η συνάρτηση $\log z = \operatorname{Log} r + i\theta$ είναι μονότιμη και συνεχής. Αποδεικνύεται, όπως παραπάνω, ότι είναι αναλυτική και ότι

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \ \ (|z| > 0,\ a < argz < a + 2\pi)$$

Ένας **κλάδος** μιας πλειότιμης συνάρτησης f είναι οποιαδήποτε μονότιμη συνάρτηση F που είναι αναλυτική σε κάποιον τόπο, σε κάθε σημείο z του οποίου η τιμή $F(z)$ είναι μια από τις τιμές $f(z)$. Ως προς αυτόν τον ορισμό, η συνάρτηση $\operatorname{Log} z$ ορισμένη στον τόπο $\{(r, \theta) : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ συνιστά έναν κλάδο της $\log z$. Αυτός ο κλάδος λέγεται **κύριος κλάδος**. Η συνάρτηση $\log z$ είναι ένας άλλος κλάδος της ίδιας πλειότιμης συνάρτησης.

Ιδιότητες της $\log z$

1. $e^{\log z} = z$
2. $\log e^z = z + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$
3. $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$
4. $\log\left(z^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log z$, $n \in \mathbb{N}$
5. $z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$, $n \in \mathbb{N}$
6. $\log z^n \neq n \log z$, $n \in \mathbb{N}$

2.4.4 Οι συναρτήσεις z^λ, λ^z, $\lambda \in \mathbb{C}$

Ορισμός 2.4.1 $z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$

Η συνάρτηση z^λ είναι μονότιμη και αναλυτική στον τόπο $\{(r, \theta : r > 0, a < \theta < a + 2\pi\}$. Η παράγωγος αυτού του κλάδου της z^λ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{d}{dz} z^\lambda = \lambda z^{\lambda - 1} \ \ (|z| > 0, a < \arg z < a + 2\pi)$$

Όταν $a = -\pi$, δηλαδή $-\pi < \arg z < \pi$, η συνάρτηση z^λ λέγεται κύριος κλάδος της πλειότιμης συνάρτησης z^λ. Κατ'αντιστοιχία με τον ορισμό της λ^z έχουμε

Ορισμός 2.4.2 $\lambda^z = \exp(z \log \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Όταν καθοριστεί μια τιμή της $\log \lambda$, η λ^z είναι ακέραια συνάρτηση του z. Εύκολα φαίνεται ότι

$$\frac{d}{dz} \lambda^z = \lambda^z \log \lambda, \quad \lambda \neq 0$$

Ισχύουν οι γνωστοί κανόνες άλγεβρας και λογισμού γι αυτές τις συναρτήσεις. Τέλος, ισχύει

$$(1 + z)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

όπου $\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}$.

2.4.5 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Έστω $z = \sin w$. Τότε $w = \arcsin z$. Έχουμε

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

όπου ως γνωστόν, η $(1 - z^2)^{1/2}$ είναι δίτιμη συνάρτηση του z. Παίρνοντας λογαρίθμους, έχουμε

$$w = \arcsin z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}].$$

Η $\arcsin z$ είναι πλειότιμη συνάρτηση με άπειρου πλήθους τιμές σε κάθε z. Όταν προσδιοριστούν συγκεκριμένοι κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας και του λογαρίθμου, η συνάρτηση αυτή γίνεται μονότιμη και αναλυτική (ως σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων). Ανάλογα ορίζονται οι συναρτήσεις

$$\arccos z = -i \log[z + i(1 - z^2)^{1/2}]$$
$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}$$

Οι παραγωγοί αυτών των τριών συναρτήσεων, μπορούν να βρεθούν από τις παραπάνω σχέσεις. Οι παράγωγοι των δύο πρώτων εξαρτώνται από τις τιμές που έχουν επιλεγεί για την τετραγωνική ρίζα:

$$\frac{d}{dz}\arcsin z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}, \quad \frac{d}{dz}\arccos z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Αντίθετα, η παράγωγος της τρίτης

$$\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2}$$

δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται μονότιμη η συνάρτηση. Με τον αντίστοιχο, τέλος, τρόπο ορίζονται οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις. Προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} z &= \log[z+(1+z^2)^{1/2}] \\
\operatorname{arccosh} z &= \log[z+(z^2-1)^{1/2}] \\
\operatorname{arctanh} z &= \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}
\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις $e^z = 1-i$, $e^z = -1+i$.
   Λύση
   Ως γνωστόν $e^w = z \Rightarrow w = \log|z| + i\arg z$. Συνεπώς

   (α′) $e^z = 1-i \Rightarrow z = \log\sqrt{2} + i\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}$

   (β′) $e^z = -1+i \Rightarrow z = \log\sqrt{2} + i\left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}$

2. Ενώ $|\sin x| \le 1$, $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι η $\sin z$, $z\in\mathbb{C}$ δεν είναι φραγμένη.
   Λύση
   Πράγματι, έστω $z = x+iy$. Τότε

   $$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| \ge \frac{|e^{-iz}|-|e^{iz}|}{2} = \frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

   Έστω $z = iy$, $y\in\mathbb{R}^+$. Τότε αν $z\to\infty \Rightarrow y\to\infty \Rightarrow |\sin z|\to\infty$.

3. Να επιλυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $\cos z = 2$.
   Λύση
   $\cos z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = \frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} = 2\pm\sqrt{3}$. Έστω $z = x+iy$. Τότε $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$. Άρα $e^{-y}\cos x = 2\pm\sqrt{3}$ και $e^{-y}\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Από την $e^{-y}\cos x = 2\pm\sqrt{3}$ έπεται ότι ο k πρέπει να είναι άρτιος, δηλαδή $k=2m$, αφού $e^{-y}>0$ και $2\pm\sqrt{3}>0$. Έτσι

   $$e^{-y} = 2\pm\sqrt{3} \Rightarrow y = -\log(2\pm\sqrt{3})$$

και συνεπώς (αφού $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$) έχουμε

$$z = 2m\pi - i\log(2\pm\sqrt{3}) = 2m\pi \pm i\log(2+\sqrt{3}), \quad m\in\mathbb{Z}.$$

4. Να βρεθούν οι λογάριθμοι των $(-1-i)(1-i),\ -1-i,\ 1-i$.
   Λύση

   (α′) $\log[(-1-i)(1-i)] = \log(-2) = \log 2 + \pi i + 2n\pi i,\ n\in\mathbb{Z}$
   (β′) $\log(-1-i) = \log\sqrt{2} + \frac{5\pi}{4}i + 2m\pi i,\ m\in\mathbb{Z}$
   (γ′) $\log(1-i) = \log\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4}i + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$

   Παρατηρούμε ότι $\log[(-1-i)(1-i)] = \log(-1-i) + \log(1-i) \bmod 2\pi i$.

5. Να υπολογιστούν οι τιμές των $3^{1/2}$, $i^{1/2}$, i^i, $(-1)^{\sqrt{2}}$.

   (α′) $3^{1/2} = e^{(1/2)\log 3} = e^{(1/2)(\log 3 + 2k\pi i)} = e^{(1/2)\log 3}e^{k\pi i} = \pm\sqrt{3}$.
   (β′) $i^{1/2} = e^{(1/2)\log i} = e^{(1/2)i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = \pm e^{\frac{\pi i}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
   (γ′) $i^i = e^{i\log i} = e^{i\left(\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\ k\in\mathbb{Z}$. (Δηλ. το $i^i\in\mathbb{R}$).
   (δ′) $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(-1)} = e^{\sqrt{2}(\log 1 + i(2k\pi+\pi))} = e^{\sqrt{2}i(2k\pi+\pi)} = \cos(\pi\sqrt{2} + 2k\pi\sqrt{2}) + i\sin(\pi\sqrt{2} + 2k\pi\sqrt{2})$

6. $\log z^n \neq n\log z$. Βλέπουμε μερικά παραδείγματα.

   (α′) $z=i,\ n=2:$
   $\log i^2 = \log(-1) = (2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.
   Ενώ $2\log i = (4k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.
   (β′) $\mathrm{Log}\left((1+i)^2\right) = 2\,\mathrm{Log}(1+i)$.
   (γ′) $\mathrm{Log}\left((-1+i)^2\right) \neq 2\,\mathrm{Log}(-1+i)$.
   (δ′) Αν $\log z = \mathrm{Log}\, r + i\theta\ \left(r>0,\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{9\pi}{4}\right) \Rightarrow \log i^2 = 2\log i$.
   (ε′) Αν $\log z = \mathrm{Log}\, r + i\theta\ \left(r>0,\ \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{11\pi}{4}\right) \Rightarrow \log i^2 \neq 2\log i$.

7. Έστω $A_{a_0} = \{z : a_0 \leq Im(z) < a_0 + 2\pi\},\ a_0\in\mathbb{R}$. Τότε η e^z απεικονίζει το A_{a_0} 1-1 και επί του $\mathbb{C}-\{0\}$.

   Λύση
   Αν $e^{z_1} = e^{z_2}$, τότε $e^{z_1-z_2} = 1 \Rightarrow z_1 - z_2 = 2\pi i k,\ k\in\mathbb{Z}$. Εφ' όσον $z_1,\ z_2\in A_{a_0}$, ισχύει $0\leq Im(z_1-z_2) < 2\pi$ και αφού $Re(z_1-z_2)=0$ θα έχουμε $z_1=z_2$, δηλαδή η e^z είναι

1-1. Έστω τώρα $w \in \mathbb{C} - \{0\}$. Θεωρούμε την $e^z = w$ στο A_{a_0}. Τότε αν $z = x + iy$ και $w = u + iv$ έχουμε $e^z = w \Leftrightarrow e^{x+iy} = u + iv \Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{c} e^x \cos y = u \\ e^x \sin y = v \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = u^2 + v^2 \\ \cos y + i \sin y = \frac{u+iv}{e^x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e^x = \sqrt{u^2+v^2} \\ e^{iy} = \frac{u+iv}{e^x} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} e^x = |w| \\ e^{iy} = \frac{w}{|w|} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcll} x & = & \log|w| & \text{(συνήθης λογάριθμος): μια ακριβώς λύση.} \\ y & = & \arg w & \text{στο } [a_0, a_0 + 2\pi] \text{ έχει ακριβώς μια λύση} \end{array}$$

Δηλαδή η e^z είναι επί του $\mathbb{C} - \{0\}$.

8. Η συνάρτηση $Argz$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$ και ασυνεχής στο $\mathbb{R}^-$. Ομοίως (φυσικά) και για την $\operatorname{Log} z$

2.5 Γεωμετρία των στοιχειωδών συναρτήσεων

2.5.1 $f_1(z) = z^2$

Ο z^2 έχει μήκος ίσο με $|z|^2$ και όρισμα $2 \arg z$. Δηλαδή η f_1 υψώνει στο τετράγωνο το μέτρο και διπλασιάζει το όρισμα.

2.5.2 $f_2(z) = \sqrt{z}$

Έστω ότι έχουμε διαλέξει έναν κλάδο, χρησιμοποιώντας το $0 \leq \theta < 2\pi$. Τότε $z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ με $0 \leq \frac{\theta}{2} < \pi$, οπότε η $\sqrt{z}$ βρίσκεται πάντα στο άνω ημιεπίπεδο και οι γωνίες υποδιπλασιάζονται. Η $f_2(z) = \sqrt{z}$ είναι η αντίστροφη της $f_1(z) = z^2$ όταν η τελευταία περιοριστεί σε περιοχή που είναι 1-1.

2.5.3 $f(z) = \sin z$

Απεικονίζει ευθείες παράλληλες προς τον πραγματικό άξονα σε ελλείψεις και ευθείες παράλληλες προς τον φανταστικό άξονα σε υπερβολές. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x + iy = \sin x \cos(iy) + \sin(iy) \cos x = \\ &= \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x, \end{aligned}$$

όπου $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, αφού ισχύει $\sin iy = \frac{e^{iiy} - e^{-iiy}}{2i} = i\frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \sinh y$ και αντιστοίχως $\cos(iy) = \cosh y$. Έστω, λοιπόν, πρώτα $y = y_0$ (ευθεία παράλληλη με τον άξονα των πραγματικών). Τότε αν $\sin z = u + iv$, έχουμε λόγω των προηγούμενων σχέσεων

$$\left.\begin{array}{l} u = \sin x \cosh y_0 \Rightarrow \sin x = \frac{u}{\cosh y_0} \\ v = \cos x \sinh y_0 \Rightarrow \cos y = \frac{v}{\sinh y_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1$$

που είναι έλλειψη στο uv επίπεδο.

Ομοίως, αν $x = x_0$ (ευθεία παράλληλη με τον άξονα των φανταστικών) βρίσκουμε (χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$) ότι $\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1$, που είναι υπερβολή.

2.6 Ολοκλήρωση

Το ολοκλήρωμα είναι εξαιρετικά σημαντικό στη μελέτη συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Η θεωρία ολοκλήρωσης διακρίνεται για τη μαθηματική της κομψότητα. Τα θεωρήματα είναι ισχυρότατα και οι πιο πολλές αποδείξεις είναι απλές. Η θεωρία ολοκλήρωσης είναι επιλέον ιδιαίτερα σημαντική για τη μεγάλη χρησιμότητά της στα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

2.6.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Προκειμένου να εισάγουμε το ολοκλήρωμα της $f(z)$ με έναν σχετικά απλό τρόπο, ορίζουμε αρχικά το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης F μιας πραγματικής μεταβλητής t. Έστω $F(t) = U(t) + iV(t)$, $t \in [a, b]$, όπου οι συναρτήσεις U και V είναι πραγματικές και κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις του t ορισμένες σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Λέμε τότε ότι η F είναι κατά τμήματα συνεχής και ορίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της F στο $[a, b]$ ως εξής:

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt.$$

οι συνθήκες που υποθέσαμε για τις U και V είναι ικανές για να εξασφαλίσουν την ύπαρξη των ολοκληρωμάτων τους. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα της F επί ενός μη φραγμένου διαστήματος ορίζεται ανάλογα και υπάρχει όταν συγκλίνουν και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα της U και της V. Η άλγεβρα και ο λογισμός των ορισμένων ολοκληρωμάτων ισχύουν ακριβώς όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις του t.

Θα δείξουμε μια βασική ιδιότητα:

$$\left|\int_a^b F(t)dt\right| = \int_a^b |F(t)|dt.$$

(η ίδια ιδιότητα ισχύει βέβαια και τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty}$) Έστω $\int_a^b F(t)dt = z \in \mathbb{C}$ και έστω $z = re^{i\theta}$. Τότε

$$r = \int_a^b e^{-i\theta}F(t) \Rightarrow r = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}F(t)\right] dt$$

αφού $\mathrm{Re}\left[\int_a^b G(t)dt\right] = \int_a^b \mathrm{Re}[G(t)]dt$ και αφού η πρώτη σχέση είναι σχέση πραγματικών αριθμών. Όμως

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta}F(t)\right] \leq \left|e^{-i\theta}F(t)\right| = |e^{-i\theta}||F(t)| = |F|,$$

οπότε

$$r < \int_a^b |f(t)dt$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

2.6.2 Καμπύλες

Θα ασχοληθούμε με κλάσεις καμπυλών που μας χρειάζονται στη μελέτη ολοκληρωμάτων συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Καμπύλη C είναι ένα σύνολο σημείων $z = (x, y)$ του $\mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$ όπου οι x και y είναι συνεχείς συναρτήσεις της πραγματικής παραμέτρου t. Περιγράφουμε τα σημεία της C με την εξίσωση $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ και αφού οι x, y είναι συνεχείς, είναι και η z. Η καμπύλη C λέγεται απλή καμπύλη ή καμπύλη Jordan αν δεν τέμνει τον εαυτό της (δηλαδή $z(t_1) \neq z(t_2)$ για $t_1 \not= t_2$). Μια καμπύλη που είναι απλή, εκτός από τα άκρα της όπου $z(a) = z(b)$, λέγεται απλή κλειστή καμπύλη ή καμπύλη Jordan. Αν οι x, y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t, η z είναι επίσης διαφορίσιμη συνάρτηση του t και έχουμε

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} := x'(t) + iy'(t).$$

Μια καμπύλη λέγεται λεία, αν υπάρχει, είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$ η $z'(t)$. Το μήκος μιας λείας καμπύλης εκφράζεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b |z'(t)|dt, \quad (|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2})$$

και είναι αναλλοίωτο από μεταβολές της παραμετρικής αναπαράστασης της C της μορφής

$$t = \phi(s),$$

όπου $\phi : [c, d] \to [a, b]$ είναι επί, συνεχής έχει συνεχή παράγωγο και $\phi'(s) > 0$ για κάθε s. Κατά τμήματα λεία καμπύλη είναι μια καμπύλη που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος λείων καμπυλών που ενώνονται τα άκρα τους. Αν η $z(t) = x(t) + iy(t)$ παριστάνει μια κατά τμήματα λεία καμπύλη, οι x και y είναι είναι συνεχείς, ενώ οι πρώτες παράγωγοί τους είναι κατά τμήματα συνεχείς. Το μήκος μιας κατά τμήματα λείας καμπύλης είναι το άθροισμα των μηκών των λείων καμπυλών που την αποτελούν.

Σε κάθε απλή κλειστή καμπύλη ή απλή κλειστή κατά τμήματα καμπύλη C αντιστοιχούν δύο σύνολα που κάθε ένα έχει ως σύνορο μόνο την C. Το ένα από αυτά που λέγεται εσωτερικό της C είναι φραγμένο, ενώ το άλλο (εξωτερικό) είναι μη φραγμένο. Η απόδειξη δεν είναι απλή και η πρόταση αυτή λέγεται θεώρημα καμπύλης Jordan.

2.6.3 Ολοκλήρωμα μιγαδικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός 2.6.1 Έστω C κατά τμήματα λεία καμπύλη που δίνεται από την $z(t)$, $t \in [a, b]$. Έστω ότι η f είναι μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο C. Το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της C ορίζεται ως

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος της C δεν εξαρτάται μόνο από τα σημεία της C, αλλά και από τη διεύθυνση. Όμως δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη παραμετρικοποίηση.

Ορισμός 2.6.2 Οι δύο καμπύλες $C_1 : z(t)$, $t \in [a,b]$, $c_2 : w(t)$, $t \in [c,d]$ είναι **ομαλά ισοδύναμες** αν υπάρχει μια 1-1, C^1 απεικόνιση $\Psi(t) : [c,d] \to [a,b]$ τέτοια ώστε $\Psi(c) = a$, $\Psi(d) = b$ και $w(t) = z(\Psi(t))$.

Πρόταση 2.6.1 Αν οι C_1 και C_2 είναι ομαλά ισοδύναμες, τότε $\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$.

Ορισμός 2.6.3 Έστω ότι η καμπύλη C δίνεται από την $z(t)$, $t \in [a,b]$. Τότε η $-C$ ορίζεται από την $z(b+a-t)$, $t \in [a,b]$.

Πρόταση 2.6.2 $\int_{-C} f = -\int_C f$

Πρόταση 2.6.3 Έστω C λεία καμπύλη, f και g συνεχείς στην C και $a \in \mathbb{C}$. Τότε

- $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
- $\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz$

Πρόταση 2.6.4 Έστω C λεία καμπύλη μήκους L, f συνεχής στην C και $|f| \leq M$ στην C. Τότε

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML.$$

Πρόταση 2.6.5 Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί της λείας καμπύλης C. Τότε

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to+\infty} \int_C f_n(z)dz.$$

Η ακόλουθη γενίκευση του Θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού είναι πολύ σημαντική.

Πρόταση 2.6.6 Έστω F αναλυτική επί της λείας καμπύλης C και f η παράγωγος της F. Τότε

$$\int_C f(z) = F(z(b)) - F(z(a))$$

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το $I_1 = \int_{C_1} z^2 dz$, όπου C_1 το ευθύγραμμο τμήμα OB από το $z = 0$ στο $z = 2 + i$.
   Λύση
   Παρατηρούμε ότι τα σημεία της C_1 βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 2y$. Αν, λοιπόν, η συντεταγμένη y θεωρηθεί ως παράμετρος, μια παραμετρική εξίσωση της C_1 είναι $z(y) = 2y + iy$.

   Επί της C_1, το z^2 γίνεται: $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 3y^2 + i4y^2$. Οπότε $I_1 = \int_o^1 (3y^2 + i4y^2)(2+i)dy = (3+4i)(z+i)\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$.

2. Να βρεθεί το $I_2 = \int_{C_2} z^2 dz$, όπου C_2 το OAB του σχήματος.
   Λύση
   $I_2 = \int_{C_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$. Μια παραμετρική αναπαράσταση του OA είναι

   $$z(x) = x, \quad x \in [0,2]$$

   ενώ για το AB μπορούμε να γράψουμε

   $$z(y) = 2 + iy, \quad y \in [0,1].$$

   Τότε $I_2 = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2+iy)^2 i dy = \frac{8}{3} + i\left[\int_0^1 (4-y^2)dy + 4i\int_0^1 y dy\right] = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$. Μια παραμετρική αναπαράσταση του OAB είναι η

   $$z(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,2] \\ 2 + i(t-2), & t \in [2,3] \end{cases}$$

   Παρατηρούμε ότι $I_2 = I_1$ και συνεπώς $\int_C z^2 dz = 0$, όπου $C = OABO$, πράγμα που δεν είναι τυχαίο αλλά οφείλεται στο ότι η z^2 είναι αναλυτική στο εσωτερικό και επί της καμπύλης όπως θα δούμε αργότερα.

3. Να βρεθούν τα $I_3 = \int_{C_3} \bar{z} dz$ και $I_4 = \int_{C_4} \bar{z} dz$, όπου C_3 : το άνω ημικύκλιο του $|z| = 1$ (από $z = -1$ εώς $z = 1$) και C_4 : το κάτω ημικύκλιο.
   Λύση
   Μια παραμετρική εξίσωση του $-C_3$ είναι η

   $$z(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0,\pi].$$

   Συνεπώς $I_3 = \int_{C_3} \bar{z} dz = -\int_{-C_3} \bar{z} dz = -\int_o^\pi e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = -\pi i$. Αντίθετα μια παραμετρική εξίσωση του C_4 είναι η

   $$z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \pi \le \theta \le 2,$$

   οπότε $I_4 = \int_{C_4} \bar{z} dz = \int_\pi^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = \pi i$. Παρατηρούμε ότι $I_3 \neq I_4$ και ακόμα ότι το ολοκλήρωμα $I_C = \int_C \bar{z} dz$, όπου C ολόκληρος ο κύκλος, δεν είναι 0: $I_C = I_4 - I_3 = 2\pi i$. Τέλος επί του C ισχύει ότι $|z| = 1$ οπότε $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$ και έτσι $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

4. Έστω C_5 το ευθύγραμμο τμήμα από το $z = i$ στο $z = 1$. Χωρίς να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_5 = \int_{C_5} \frac{dz}{z^4}$ να βρεθεί ένα άνω φράγμα της απόλυτης τιμής του.
Λύση
Το C_5 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = 1 - x$. Αν $z \in C_5$, έχουμε $|z^4| = (x^2 + y^2)^2 = (x^2 + (1 - x)^2)^2 = (2x^2 - 2x + 1)^2$, οπότε $|z^4| = \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)\right)^2 \geq \frac{1}{4}$, αφού $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Συνεπώς, για κάθε $z \in C_5$: $\left|\frac{1}{z^4}\right| \leq 4$. Θέτουμε λοιπόν $M = 4$ στην πρόταση 2.6.4. Εξάλλου το μήκος L του C_5 είναι προφανώς $L = \sqrt{2}$. Τελικά παίρνουμε $|I_5| \leq 4\sqrt{2}$.

2.7 Το θεώρημα Cauchy-Goursat

2.7.1 Το θεώρημα Cauchy

Έστω ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοι τους είναι συνεχείς σε έναν τόπο R που αποτελείται από τα σημεία που περιβάλλονται από μια απλή κλειστή καμπύλη C και επί της C. Θεωρούμε ότι η καμπύλη έχει θετική διεύθυνση. Από το θεώρημα Green έχουμε ότι

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint (Q_x - P_y)dxdy.$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ που είναι αναλυτική στον R. Θεωρούμε επιπλέον ότι **η** $f'(z)$ **είναι συνεχής στον** $\mathbb{R}$**.** Τότε οι u και v, καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοί τους είναι επίσης συνεχείς στον $\mathbb{R}$. Έτσι

$$\int_C udx - vdy = -\iint_R (v_x + u_y)dxdy$$
$$\int_C vdx + udy = \iint_R (u_x - v_y)dxdy.$$

Λόγω των συνθηκών Cauchy-Riemann και τα δύο διπλά ολοκληρώματα μηδενίζονται, οπότε $\int_C vdx + udy = \int_R (u_x - v_y)dxdy$. Όμως, αν $f = u + iv$, $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt = \\ &= \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (v_{x'} + uy'))dt = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy, \end{aligned}$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\int_C f(z)dz = 0$. Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται θεώρημα Cauchy.

2.7.2 Το θεώρημα Cauchy-Goursat

Ο Goursat απέδειξε ότι η υπόθεση της συνέχειας της $f'(z)$ μπορεί να παραληφθεί. Η νέα μορφή του προηγουμένου θεωρήματος που προκύπτει έτσι είναι

Θεώρημα 2.7.1 Αν η f είναι αναλυτική στον R και επί της C, τότε $\int_C f(z)dz = 0$.