7 ΑΛΓΕΒΡΑ ΜΗΤΡΩΝ.

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Άλγεβρα των μητρών οι πινάκων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση συστημάτων καθώς επίσης στις επιστήμες της οικονομετρίας και της στατιστικής.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μήτρα ή πίνακας **Α** διάστασης m×n και με στοιχεία α_{ij} συμβολίζουμε μια σειρά από στοιχεία τα οποία γράφονται με μια συγκεκριμένη διάταξη σε m γραμμές και n στήλες.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: **Α**, $\underline{A}$, ή (α_{ij}) ή $[\alpha_{ij}]$ ή $\|\alpha_{ij}\|$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Ι): α_{ij} είναι το στοιχείο του πίνακα **Α** που αντιστοιχεί στην i γραμμή και j στήλη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙ): Σαν διάνυσμα διάστασης m μπορούμε να ονομάσουμε κάθε πίνακα με μία στήλη και m γραμμές.

7.2 ΜΗΤΡΕΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ (Ι)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τετραγωνική μήτρα ονομάζεται κάθε πίνακας ο οποίος έχει τόσες γραμμές όσες και στήλες.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Άνω (ή κάτω) τριγωνική μήτρα λέγεται κάθε τετραγωνικός πίνακας **Α** διάστασης n×n για την οποία $\alpha_{ij}=0$ για κάθε i>j (ή για κάθε για κάθε i<j).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Άνω Τριγωνική Μήτρα   Κάτω Τριγωνική Μήτρα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Διαγώνια μήτρα λέγεται κάθε τετραγωνικός πίνακας **Α** διάστασης n×n για την οποία $\alpha_{ij}=0$ για κάθε $i\neq j$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:

$$\mathrm{Diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μοναδιαίος Πίνακας $\mathbf{I}_n$ λέγεται κάθε τετραγωνικός πίνακας διάστασης n×n για τον οποίο $\alpha_{ij}=0$ για κάθε $i\neq j$ και $\alpha_{ii}=1$ για κάθε i=1,2,…,n.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μηδενικός Πίνακας **0** λέγεται κάθε τετραγωνικός πίνακας διάστασης m×n για τον οποίο $\alpha_{ij}=0$ για κάθε i,j=1,2,…,n.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο μήτρες **A** και **B** διάστασης m×n είναι ίσες αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα δηλαδή: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{ij} = \boldsymbol{\beta}_{ij}$ για κάθε i,j.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Συμμετρικός πίνακας είναι κάθε τετραγωνικός πίνακας διάστασης n×n για τον οποίο ισχύει $\alpha_{ij}= \alpha_{ji}$ για κάθε i,j=1,2,…,n.

7.3 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΗΤΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $\mathbf{A}=[\alpha_{ij}]$ και $\mathbf{B}=[\beta_{ij}]$ είναι μήτρες διάστασης m×n τότε το άθροισμά τους $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{\Gamma}=[\gamma_{ij}]$ είναι και αυτός διάστασης m×n και ισχύει $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$ για κάθε i=1,2,…, m και j=1,2,…,n.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όμοια αν $\mathbf{A}=[\alpha_{ij}]$ και $\mathbf{B}=[\beta_{ij}]$ και $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ τότε $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}-\beta_{ij}$ για κάθε i=1,2,…, m και j=1,2,…,n.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ο πίνακας **A** διάστασης m×n και ο αριθμός λ. Τότε ο πίνακας **B** για το οποίο $\mathbf{B}=\lambda\mathbf{A}$ έχει διάσταση m×n και τα στοιχεία του είναι ίσα με $\beta_{ij}=\lambda\alpha_{ij}$ για κάθε i=1,2,…, m και j=1,2,…,n.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{\Gamma}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{\Gamma})$
- $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})= \lambda\mathbf{A}+ \lambda\mathbf{B}$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{A}= \lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$
- $\lambda(\mu\mathbf{A})= (\lambda\mu)\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$ (**0** λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης)
- Αν $\lambda\mathbf{A}= \mu\mathbf{A} \Leftrightarrow \lambda=\mu$ αν $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$.
- Αν $\lambda\mathbf{A}= \lambda\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}=\mathbf{B}$ αν $\lambda\neq\mathbf{0}$.
- Αν $\lambda\mathbf{A}= \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

7.4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω οι μήτρες **A**=[α_{ij}] και **B**=[β_{ij}] διαστάσεων m×n και n×k αντίστοιχα τότε το γινόμενο **AB** είναι μία τρίτη μήτρα **Γ** διάστασης m×k της οποίας τα στοιχεία δίδονται ως εξής

$$\gamma_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}\beta_{lj}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\ldots+\alpha_{in}\beta_{nj}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- (**AB**)**C**=**A**(**BC**)
- λ(**AB**)= (λ**A**)**B**
- **A**(**B**+**C**)=**AB**+**AC**
- (**B**+**C**)**A**= **BA**+**CA**
- **ΠΡΟΣΟΧΗ AB≠ BA**
- **AI=IA=A** (**I**: ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)
- **A0=0A=0** (**0**: απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού)

7.5 ΜΗΤΡΕΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ (II)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας τετραγωνικός πίνακας **A** λέγεται ταυτοδύναμος αν και μόνο αν $\mathbf{A}^2$=**AA**=**A**.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ανάστροφος πίνακας ενός πίνακα **A** διάστασης m×n ονομάζεται ο πίνακας $\mathbf{A}^T$ ή **A΄** διάστασης n × m για τον οποίο $\alpha'_{ij}=\alpha_{ji}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$
- $(\lambda\mathbf{A})^T=\lambda\mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- Αν **A** συμμετρική μήτρα τότε $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αντίστροφη μήτρα ενός πίνακα **A** διάστασης n×n ονομάζεται ο πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ για τον οποίο ισχύει $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$.

7.6 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΜΗΤΡΑΣ

7.6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μετάθεση n αριθμών ονομάζεται μια τυχαία εναλλαγή της σειράς τους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το σύνολο των πιθανών μεταθέσεων n στοιχείων είναι n! .

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία μετάθεση λέγεται άρτια ή περιττή αν ο αριθμός των περιπτώσεων στις οποίες ένας μεγαλύτερος αριθμός προηγείται ενός μικρότερου είναι άρτιος ή περιττός αντίστοιχα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα **A** διάστασης n × n είναι μια συνάρτηση των στοιχείων του πίνακα και δίδεται ως εξής

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum (-1)^{\lambda} \alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}...\alpha_{nj_n}$$

όπου λ είναι 0 αν η μετάθεση $(j_1,j_2, \ldots, j_n)$ είναι άρτια και 1 αν η μετάθεση $(j_1,j_2, \ldots, j_n)$ είναι περιττή. Το άθροισμα είναι ως προς όλες τις δυνατές μεταθέσεις του στοιχείων 1,2,…,n.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο Υπολογισμός **για 2x2 και 3x3 πίνακες** γίνεται με τη μέθοδο των διαγωνίων.

7.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

- $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|$ αν A,B είναι nxn διάστασης
- $|\lambda\mathbf{A}|=\lambda^n|\mathbf{A}|$
- Αν αλλάξουμε δύο στήλες ή σειρές μεταξύ τους τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.
- Αν τα στοιχεία δύο γραμμών ή στηλών είναι ανάλογα τότε η ορίζουσα είναι 0.
- Αν πολλαπλασιάσουμε μια ορίζουσα με έναν αριθμό είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε μια στήλη η μία γραμμή με αυτόν τον αριθμό.
- Αν σε μια γραμμή ή στήλη προσθέσουμε το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης τότε η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.
- Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο της διαγωνίου.

7.6.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ 2Χ2 ΚΑΙ 3Χ3

ΜΟΝΟ για πίνακες 2x2 και 3x3 χρησιμοποιούμε την μέθοδο της χιαστής.

Έτσι για 2x2 έχουμε

$$|\mathbf{A}| = \begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ - \end{array} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Ενώ για 3x3 έχουμε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & & & \\ \left|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}\right| & \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \\ - & - & - & & & \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} \\ - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} \end{array}$$

7.6.4 Β ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω **A** τετραγωνικός πίνακας διάστασης n×n τότε

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \,|\, \mathbf{A}_{ij} \,| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \,|\, \mathbf{A}_{ij} \,|$$

όπου α_{ij} είναι το στοιχείο του πίνακα A που αντιστοιχεί στην i γραμμή και j στήλη και $\mathbf{A}_{ij}$ είναι ο πίνακας διάστασης (n-1)×(n-1) που σχηματίζεται από τον πίνακα A αν αφαιρέσουμε την i γραμμή και τη j στήλη.

7.6.5 Γ ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των οριζουσών για μετατρέψουμε τον πίνακα σε διαγώνιο ή να τον απλοποιήσουμε**.**

7.7 ΙΧΝΟΣ ΜΗΤΡΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ίχνος ενός πίνακα **A** ονομάζεται το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: tr(**A**)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $tr(\lambda_1\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{B}) = \lambda_1 tr(\mathbf{A})+\lambda_2 tr(\mathbf{B})$
- $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$

7.8 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΜΗΤΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αντίστροφη μήτρα ενός τετραγωνικού πίνακα **A** ονομάζουμε τον πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$ για τον οποίο ισχύει: $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \Rightarrow |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| \Leftrightarrow |\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ: $\mathbf{A}^{-1} = adj(\mathbf{A})/|\mathbf{A}|$

Όπου $adj(\mathbf{A}) = [\,(-1)^{i+j}\,|\mathbf{A}_{ij}|\,]^T$ με $\mathbf{A}_{ij}$ είναι οι πίνακες που σχηματίζονται αν αφαιρέσουμε από τον πίνακα **A** την i γραμμή και τη j στήλη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για να υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας πρέπει $|\mathbf{A}| \neq 0$.

7.9 ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΜΗΤΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία τετραγωνική μήτρα **Α** ονομάζεται ορθογώνια αν και μόνο αν:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{T}=\mathbf{A}^{T}\,\mathbf{A}=\mathbf{I}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν Α είναι ορθογώνια μήτρα τότε $\mathbf{A}^{T}=\mathbf{A}^{-1}$.

7.10 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω το σύστημα:

$$\alpha_{11}X_1+\alpha_{12}X_2+\ldots+\alpha_{1n}X_n=\beta_1$$
$$\alpha_{21}X_1+\alpha_{22}X_2+\ldots+\alpha_{2n}X_n=\beta_2$$
$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{n1}X_1+\alpha_{n2}X_2+\ldots+\alpha_{nn}X_n=\beta_n$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{AX}=\boldsymbol{\beta}$$

με $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$.

Μία και μοναδική λύση υπάρχει αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας (δηλαδή αν $|\mathbf{A}|\neq 0$) και η λύση δίδεται αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά και τα δύο μέρη με τον αντίστροφο πίνακα

$$\mathbf{AX}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\mathbf{IX}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$$

7.11 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έστω το σύστημα:

$$\alpha_{11}X_1+\alpha_{12}X_2+\ldots+\alpha_{1n}X_n=\beta_1$$

$$\alpha_{21}X_1+\alpha_{22}X_2+\ldots+\alpha_{2n}X_n=\beta_2$$

$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n1}X_1+\alpha_{n2}X_2+\ldots+\alpha_{nn}X_n=\beta_n$$

Τότε οι λύσεις του συστήματος δίδονται ως εξής:

$$X_i=|\mathbf{A}_{Xj}|\,/\,|\mathbf{A}|$$

Όπου $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ και $\mathbf{A}_{Xj}$ ο πίνακας που σχηματίζεται από τον πίνακα Α αν αντικαταστήσουμε την j στήλη με το διάνυσμα **β**,

όπου $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$.

7.12 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα **Α** διάστασης n×n ονομάζονται οι τιμές λ για τις οποίες υπάρχει n×1 διάνυσμα $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. Το διάνυσμα **x** που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή λέγεται ιδιοδιάνυσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}-\lambda\mathbf{I}\mathbf{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Αν $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|\neq 0$ τότε υπάρχει μία και μοναδική λύση για το **x** και είναι $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Άρα εμείς θέλουμε $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το πολυώνυμο $p(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα **Α** και οι ρίζες του μας δίνουν τις ιδιοτιμές του πίνακα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\mathbf{A}^r=\mathbf{S}\mathrm{diag}(\lambda_i^r)\mathbf{S}^{-1}$

Όπου λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα **Α** και **S** ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του **Α**.

7.13 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Αν **x**,**y** είναι διανύσματα διάστασης n×1 τότε η ποσότητα $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων. Αν **y**=**x** τότε $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ είναι ένα άθροισμα τετραγώνων. Αυτή η απλή τετραγωνική μορφή μπορεί να γενικευτεί με τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε άθροισμα της μορφής $Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ είναι ίσο με $Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ και ονομάζεται τετραγωνική μορφή του πίνακα **A**, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}>0$ τότε η μήτρα A ονομάζεται θετικά ορισμένη μήτρα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα **A** είναι θετικές τότε η μήτρα A είναι θετικά ορισμένη.