4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1 ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ Ή ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παράγουσα ή αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης f(x) ορισμένη στο D(f) λέγεται η συνάρτηση F(x) για την οποία ισχύει F′(x)=f(x).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: F(x)= $\int f(x)dx = \int df(x)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού τότε υπάρχει η παράγουσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν F(x) και G(x) είναι διαφορετικές παράγουσες μιας συνάρτησης f(x) τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά c δηλαδή:

F(x)-G(x)=c.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ολοκλήρωση είναι η αντίθετη διαδικασία της παραγώγισης.

4.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1… $\int \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int f_i(x)dx$, λ_i σταθερές ποσότητες.

2… [$\int f(x)dx$]’ = f(x)

3… $\int f'(x)dx =$ f(x)+c, c σταθερή ποσότητα.

4.3 ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1… f(x)=0 ⇔ F(x)=c

2… f(x)=a ⇔ F(x)=ax+c

3… f(x)=x^k ⇔ F(x)= x^{k+1}/(k+1)+c, k≠-1

4… f(x)= e^x ⇔ F(x)= e^x+c

5… f(x)= 1/x ⇔ F(x)=ln|x|+c

6… f(x)= cos(x) ⇔ F(x)=sin(x)+c

7… f(x)= sin(x) ⇔ F(x)=-cos(x) +c

8… f(x)= 1/$\cos^2$(x) ⇔ F(x)=tan(x)+c

9… f(x)= 1/$\sin^2$(x) ⇔ F(x)=-ctan(x)+c

10… f(x)= 1/(1+x^2) ⇔ F(x)=arctan(x)+c

11… f(x)= 1/$\sqrt{1-x^2}$ ⇔ F(x)=arcsin(x)+c

12… f(x)= a^x ⇔ F(x)= a^x/ln(a)+c

4.4 ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

4.4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ:Έστω f συνεχής στο D(f) και u=g(x) με πεδίο τιμών R(g)=D(f) τότε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+c.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το παραπάνω θεώρημα μας βοηθάει να απλοποιήσουμε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις παραγώγους των σύνθετων συναρτήσεων.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ $\int G(x)dx$ **:**

ΒΗΜΑ 1: Γράφουμε την G(x) = f(g(x))g′(x).

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε u=g(x).

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε $\int G(x)dx = \int f(u)du$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: f(u) πρέπει να είναι εύκολα ολοκληρώσιμη.

4.4.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ όπου η f μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων h_1 και h_2 (δηλαδή $f(x)=h_1(x)h_2(x)$) και η παραγουσα H_1 της συνάρτησης h_1 είναι εύκολα παραγωγίσιμη τότε

$$\int f(x)dx = H_1(x)\, h_2(x) - \int H_1(x)h_2'(x)dx.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Ι): Αν $\int h_1(x)h_2'(x)dx$ είναι εύκολα υπολογίσιμη τότε έχουμε υπολογίσει και το $\int f(x)dx$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙ): Ο κανόνας παραγοντικής ολοκλήρωσης συνεπάγεται από την ιδιότητα

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

θέτοντας $H_1=f$ και $h_2=g$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙΙ): Η $h_2'(x)$ πρέπει να είναι πιο απλή συνάρτηση από την $h_2(x)$. Η $h_1(x)$ επιλέγεται ώστε να έχει εύκολα υπολογίσιμες παράγουσες.

4.4.3 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

1… $\int e^{ax+b} p(x)dx =$ α^{-1}e$^{αx+b}$p(x)-α^{-1} $\int e^{ax+b} p'(x)dx$

όπου p(x) είναι πολυωνυμική συνάρτηση

2… $\int \sin(ax+b)\, p(x)dx =$

=-α^{-1}cos(αx+b)p(x)+α^{-1} $\int \cos(ax+b)\, p'(x)dx$

3… $\int \cos(ax+b)\, p(x)dx =$

=α^{-1}sin(αx+b)p(x)-α^{-1} $\int \sin(ax+b)\, p'(x)dx$

4… $\int f(x)\ln(g(x))dx =$

= F(x)ln(x) - $\int \frac{f(x)}{g(x)} g'(x)dx$

όπου f,g είναι ρητές συναρτήσεις.

5… $\int e^{\alpha x+\beta} \sin(\gamma+\delta x)dx$, $\int e^{\alpha x+\beta} \cos(\gamma+\delta x)dx$

θεωρούμε σαν h_1(x)=e$^{αx+β}$ και εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα παραγοντικής ολοκλήρωσης.

4.4.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι ρητές συναρτήσεις αναφέρονται σε συναρτήσεις που γράφονται σαν λόγος δύο πολυωνύμων δηλαδή f(x)=p(x)/q(x).

ΜΕΡΙΚΑ ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1… $\int \frac{1}{\alpha x+\beta}dx =$ α^{-1}ln(αx+β) + c

2… $\int \frac{1}{(\alpha x+\beta)^k}dx =$ α^{-1} (αx+β)$^{-k+1}$/(-k+1) + c

3… $\int \frac{x}{(1+x^2)^k}dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-k+1}x}{-k+1}$ + c, k≠-1

4… $\int \frac{x}{1+x^2}dx =$ ln(1+x^2)/2 + c

5… $\int \frac{1}{1+x^2}dx =$ arctan(x) + c

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΒΗΜΑ 1: Ελέγχουμε αν ο βαθμός του p(x) είναι μικρότερου βαθμού από το q(x). Αν όχι διαιρούμε και προχωρούμε με το υπόλοιπο r(x) δηλαδή γράφουμε

$$p(x)/q(x) = k(x) + r(x)/q(x).$$

ΒΗΜΑ 2: Παραγοντοποιούμε την q(x).

ΒΗΜΑ 3: Για κάθε παράγοντα $(x-\alpha)^k$ γράφουμε

$$A_1/(x-\alpha) + A_2/(x-\alpha)^2 + \dots + A_k/(x-\alpha)^k.$$

Για κάθε παράγοντα $(x^2+bx+c)^m$ γράφουμε

$$(B_1x+\Gamma_1)/(x^2+bx+c) + \dots + (B_1x+\Gamma_1)/(x^2+bx+c)^k$$

ΒΗΜΑ 4: γράφουμε το p(x)/q(x) σαν άθροισμα των παραπάνω συντελεστών και βρίσκουμε τα A_1, B_1, Γ_1 … A_κ, B_κ, Γ_κ.

ΒΗΜΑ 5: Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα με βάση τα βασικά ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

4.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ (κατά Riemann): Έστω f(x) είναι συνεχής στο [a,b] και για οποιοδήποτε διαμερισμό του $[a,b]=[a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\dots\cup[x_k,b]$ με $x_0=a$ και $x_{k+1}=b$ και για οποιαδήποτε $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ για i=1, …, k+1 τότε το όριο $\lim_{\delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i$, $\delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ονομάζεται ολοκλήρωμα κατά Riemann και είναι ίσο με F(b)-F(a).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\int_a^b f(x)dx$ ή $\int_{[a,b]} f(x)dx$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Ι): Το ολοκλήρωμα από το α έως το β είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην f(x) και στην ευθεία y=0 (δηλαδή τον άξονα των Χ).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙ): Το ολοκλήρωμα είναι στην ουσία επέκταση των αθροισμάτων σε συνεχή διαστήματα.

4.5.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1… $\int_a^b \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_a^b f_i(x)dx$, λ_i σταθερές ποσότητες.

2… $\int_a^a f(x)dx = 0$

3… $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

4… Αν $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ τότε

$$\int_{x_1}^{x_k} f(x)dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

5… Αν $\alpha < \beta < \gamma$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε x τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\gamma f(x)dx$.

6… Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $\alpha < x < \beta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

4.6 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

4.6.1 ΠΡΩΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω f(x) είναι συνεχής στο $[a,+\infty]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ορίζεται σαν το όριο

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Ανάλογα έχουμε:

☆ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$

☆ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν τα παραπάνω όρια είναι ίσα με ένα πραγματικό αριθμό τότε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα συγκλίνει διαφορετικά αποκλίνει.

4.6.2 ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω f(x) είναι συνεχής στο (a,b) και [1] $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ή/και [2] $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ορίζεται σαν το όριο

☆ $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$ =F(b) - $\lim_{x\to a^+} F(x)$ αν ισχύει η [1]

☆ $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x)$ - F(α) αν ισχύει η [2]

☆ $\lim_{t_1\to a^+}\lim_{t_2\to b^-}\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x)$ - $\lim_{x\to a^+} F(x)$ αν ισχύουν και η [1] και η [2].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Ι): Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και συνδυασμούς Α και Β τύπου γενικευμένα ολοκληρώματα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (ΙΙ): Αν η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in$ (a,b) τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

4.6.3 ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν f(x) και g(x) είναι συνεχής στο [a,+∞) και 0≤f(x)≤g(x) για κάθε x≥a τότε

(1) αν $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.

(2) αν $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ αποκλίνει τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευτεί για όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα.