ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΜΕΡΟΣ

1 ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Γενικά

Τέσσερα εργοστάσια παραγωγής αυτοκινήτων *Α, Β, Γ* και *Δ* δίνουν για το τελευταίο μοντέλο τους ως προς πέντε τεχνικά χαρακτηριστικά τις εξής πληροφορίες:

Εργοστάσιο *Α*: Ισχύς 97 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 10,7 sec, τελική ταχύτητα 180 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 9,5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 10.

Εργοστάσιο *Β*: Ισχύς 100 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 12,9 sec, τελική ταχύτητα 191 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 11 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 11.

Εργοστάσιο *Γ*: Ισχύς 45 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 17,9 sec, τελική ταχύτητα 140 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km, 7,1 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 6.

Εργοστάσιο *Δ*: Ισχύς 174 DIN, χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h 7,6 sec, τελική ταχύτητα 225 km/h, κατανάλωση στην πόλη ανά 100 km 12,5 lit, φορολογήσιμοι ίπποι 20.

Τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να τις παρουσιάσουμε πιο οργανωμένα ως εξής:

Τεχνικά Χαρακτηρ. / Εργοστάσιο	Ισχύς DIN	Χρόνος για τη μεταβολή της ταχύτητας από 0-100 km/h	Τελική Ταχύτητα km/h	Κατανάλωση στην πόλη lit ανά 100 km	Φορολογήσιμοι ίπποι
Α	97	10,7	180	9,5	10
Β	100	12,9	191	11	11
Γ	45	17,9	140	7,1	6
Δ	174	7,6	225	12,5	20

Τα αριθμητικά δεδομένα της ορθογώνιας αυτής διάταξης, κλεισμένα μέσα σε αγκύλες,

$$\begin{bmatrix} 97 & 10{,}7 & 180 & 9{,}5 & 10 \\ 100 & 12{,}9 & 191 & 11 & 11 \\ 45 & 17{,}9 & 140 & 7{,}1 & 6 \\ 174 & 7{,}6 & 225 & 12{,}5 & 20 \end{bmatrix}$$

λέμε ότι σχηματίζουν έναν **πίνακα με 4 γραμμές και 5 στήλες** ή, συντομότερα, έναν πίνακα **τύπου 4×5** ή ακόμα έναν **4×5 πίνακα**.

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x-3y+2z-\ \omega=1 \\ 5x \qquad -2z+\ \omega=2 \\ \qquad y\ -7z+3\omega=3 \end{cases}.$$

Το σύστημα αυτό θα μπορούσε να παρασταθεί ως εξής:

Συντελεστής / Εξίσωση	του x	του y	του z	του ω	σταθ. όρος
1η	1	-3	2	-1	1
2η	5	0	-2	1	2
3η	0	1	-7	3	3

Έτσι οι συντελεστές των αγνώστων σχηματίζουν τον **3×4 πίνακα**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

και οι συντελεστές των αγνώστων μαζί με τους σταθερούς όρους τον **3×5 πίνακα**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια διάταξη $\mu\cdot\nu$ το πλήθος αριθμών σε μορφή ορθογωνίου σχήματος με μ γραμμές και ν στήλες, λέγεται **πίνακας τύπου** $\boldsymbol{\mu\times\nu}$ ή απλούστερα $\boldsymbol{\mu\times\nu}$ **πίνακας.**

Τους πίνακες τους συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα A, B, Γ κτλ. Οι αριθμοί με τους οποίους σχηματίζουμε έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα.
Το στοιχείο ενός $\mu \times \nu$ πίνακα A που ανήκει στην i-γραμμή και j-στήλη συμβολίζεται με α_{ij}.
Έτσι ο $\mu \times \nu$ πίνακας A γράφεται:

$$\begin{array}{cl} \quad\quad\quad\quad j \text{ στήλη} & \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu j} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

ή συντομογραφικά $[\alpha_{ij}]$, $1 \le i \le \mu$, $1 \le j \le \nu$.
Για παράδειγμα, ο 2×2 πίνακας $[\alpha_{ij}]$ με $\alpha_{ij} = i - j$ έχει στοιχεία $\alpha_{11} = 1 - 1 = 0$, $\alpha_{12} = 1 - 2 = -1$, $\alpha_{21} = 2 - 1 = 1$ και $\alpha_{22} = 2 - 2 = 0$. Επομένως, ο πίνακας αυτός γράφεται $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Η ισότητα μεταξύ των πινάκων ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δυο πίνακες A, B λέμε ότι είναι **ίσοι**, όταν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, τον ίδιο αριθμό στηλών (δηλαδή αν είναι του ίδιου τύπου) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.
Για να δηλώσουμε ότι δύο πίνακες είναι ίσοι γράφουμε $\boldsymbol{A = B}$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι δύο πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορεί να είναι ίσοι.
Αν ένας πίνακας έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή είναι τύπου $\nu \times \nu$ για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε ο πίνακας αυτός λέγεται **τετραγωνικός πίνακας**.
Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ ενός τετραγωνικού πίνακα A, λέμε ότι σχηματίζουν την **κύρια διαγώνιο** του A.
Αν τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα A που δεν βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι όλα 0, τότε ο A λέγεται **διαγώνιος πίνακας**.
Για παράδειγμα, οι πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι πίνακες.

Ένας πίνακας που έχει μία μόνο γραμμή, όπως ο $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας γραμμή**, ενώ ένας πίνακας που έχει μία μόνο στήλη, όπως ο $\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας στήλη**. Ένας πίνακας που έχει ένα μόνο στοιχείο, όπως ο $[-3]$ λέγεται **πίνακας στοιχείο**.

Τέλος, ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **τριγωνικός άνω**, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά και **τριγωνικός κάτω**, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\0 & -1 & 5\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & 2\\0 & 0 & 1 & 5\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

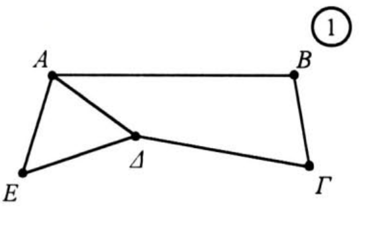
είναι τριγωνικοί άνω, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\5 & 7 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-3 & 1 & 5 & 0\\2 & 0 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικοί κάτω.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Το διπλανό σχήμα παριστάνει το οδικό δίκτυο που συνδέει τις πόλεις A, B, Γ, Δ και E. Να παρασταθεί το δίκτυο αυτό με έναν πίνακα του οποίου κάθε στοιχείο να φανερώνει το πλήθος των δυνατών τρόπων μετάβασης από πόλη σε πόλη, (όχι οπωσδήποτε διαφορετική πόλη), αφού προηγουμένως περάσουμε από μία μόνο πόλη, π.χ. ABA κτλ.



ΛΥΣΗ

Από την πόλη A στην A υπάρχουν 3 τρόποι: ABA, $A\Delta A$, AEA, από την A στην B δεν υπάρχει τρόπος, αφού πρέπει να περάσουμε από μία μόνο πόλη, από την A στην Γ υπάρχουν 2 τρόποι $A\Delta\Gamma$, $AB\Gamma$, από την A στη Δ υπάρχει ένας τρόπος $AE\Delta$, από την A στην E υπάρχει 1 τρόπος $A\Delta E$ κτλ.

Έτσι το οδικό δίκτυο μπορεί να παρασταθεί με τον πίνακα διπλής εισόδου.

ΑΠΟ \ ΣΤΗΝ	*Α*	*Β*	*Γ*	*Δ*	*Ε*
Α	3	0	2	1	1
Β	0	2	0	2	1
Γ	2	0	2	0	1
Δ	1	2	0	3	1
Ε	1	1	1	1	2

ή απλά με τον 5×5 πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές των x, y για τις οποίες ισχύουν:

i) $\begin{bmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{bmatrix}$ **ii)** $\begin{bmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

i) Η ισότητα $\begin{bmatrix} x(3x+5) & 1 \\ 3x-1 & 16x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3x^2+5 \end{bmatrix}$ ισχύει, αν και μόνο αν συναληθεύουν οι ισότητες $\begin{cases} x(3x+5) = 2 \\ 1 = 1 \\ 3x - 1 = 0 \\ 16x = 3x^2 + 5 \end{cases}$

Η τρίτη ισότητα αληθεύει για $x = \frac{1}{3}$. Η τιμή αυτή του x επαληθεύει και τις άλλες δύο ισότητες. Επομένως, οι παραπάνω ισότητες συναληθεύουν για $x = \frac{1}{3}$.

ii) Η ισότητα $\begin{bmatrix} 3x-5 & 2y+6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & x+4 \\ x-2y & 7 \end{bmatrix}$ ισχύει, αν και μόνο αν συναληθεύουν οι ισότητες $\begin{cases} 3x-5 = -11 \\ 2y+6 = x+4 \\ 6 = x-2y \\ 7 = 7 \end{cases}$.

Η δεύτερη και τρίτη ισότητα γράφονται $\begin{cases} x-2y = 2 \\ x-2y = 6 \end{cases}$ και προφανώς δεν συναληθεύουν για καμία τιμή των x και y. Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές των x, y για τις οποίες οι πίνακες αυτοί να είναι ίσοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο διπλανός πίνακας δείχνει για τρεις ομάδες ποδοσφαίρου τους αγώνες A, τις νίκες N, τις ήττες H, τις ισοπαλίες I, τα τέρματα E που πέτυχε η ομάδα, τα τέρματα Δ που δέχτηκε η ομάδα και τους βαθμούς B που έχει. Αν $A=[\alpha_{ij}]$ είναι ο πίνακας αυτός, τότε να βρείτε:

$$\begin{array}{l} \text{ΟΜΑΔΕΣ} \\ \text{ΝΙΚΗ} \\ \text{ΘΥΕΛΛΑ} \\ \text{ΔΑΦΝΗ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & N & H & I & E & \Delta & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 3 & 13 & 6 & 15 \\ 12 & 7 & 2 & 3 & 10 & 4 & 17 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 4 & 11 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

i) Ποιος είναι ο τύπος του πίνακα.

ii) Ποιες πληροφορίες μας δίνουν τα στοιχεία $\alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{24}$ και α_{37}.

2. Δίνεται συντομογραφικά ο 4×4 πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ όπου $\alpha_{ij}=|i-j|$. Να παραστήσετε τον πίνακα αυτόν, αφού βρείτε τα στοιχεία του.

3. Να βρείτε τα x, y για τα οποία ισχύει:

i) $\begin{bmatrix} 2x-1 & 1 & 0 \\ x-y & 3 & 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 & x+y \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} x^2+y & y \\ -x^2+x & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & y \end{bmatrix}$.

4. Για ποια τιμή του θετικού αριθμού x ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & \ln^2 x-1 \\ \ln^2 x-\ln x & 2 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος.

5. Να βρεθούν οι τιμές των $x\in[0,2\pi)$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 2\eta\mu^2 x & \eta\mu 2x \\ \varepsilon\varphi x & \sigma\upsilon\nu 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ - ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ

Πρόσθεση πινάκων

Μία εταιρεία πουλάει τηλεοράσεις, ψυγεία, κουζίνες και πλυντήρια σε Αθήνα, Θεσσαλονίκη και Πάτρα. Οι πωλήσεις τους μήνες Σεπτέμβριο και Οκτώβριο παρουσίασαν την εξής κίνηση:

	Σεπτέμβριος			**Οκτώβριος**		
	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα	Αθήνα	Θεσ/κη	Πάτρα
Τηλεοράσεις	18	16	13	20	18	15
Ψυγεία	12	10	9	15	13	12
Κουζίνες	9	11	8	13	10	10
Πλυντήρια	14	12	10	17	16	8

Επομένως, τους δυο αυτούς μήνες οι συνολικές πωλήσεις της εταιρείας ήταν οι εξής:

	Αθήνα	Θεσ/νίκη	Πάτρα
Τηλεοράσεις	(18+20)	(16+18)	(13+15)
Ψυγεία	(12+15)	(10+13)	(9+12)
Κουζίνες	(9+13)	(11+10)	(8+10)
Πλυντήρια	(14+17)	(12+16)	(10+8)

Αν τώρα θεωρήσουμε τους πίνακες των παραπάνω πωλήσεων έχουμε:

Για το Σεπτέμβριο: $A=\begin{bmatrix} 18 & 16 & 13 \\ 12 & 10 & 9 \\ 9 & 11 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \end{bmatrix}$

Για τον Οκτώβριο: $B=\begin{bmatrix} 20 & 18 & 15 \\ 15 & 13 & 12 \\ 13 & 10 & 10 \\ 17 & 16 & 8 \end{bmatrix}$

και για τις συνολικές πωλήσεις:

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 18+20 & 16+18 & 13+15 \\ 12+15 & 10+13 & 9+12 \\ 9+13 & 11+10 & 8+10 \\ 14+17 & 12+16 & 10+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 38 & 34 & 28 \\ 27 & 23 & 21 \\ 22 & 21 & 18 \\ 31 & 28 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας Γ λέγεται **άθροισμα** των πινάκων A και B και συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, δηλαδή $\Gamma=A+B$.
Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Άθροισμα δυο $\mu\times\nu$ πινάκων $A=[\alpha_{ij}]$ και $B=[\beta_{ij}]$ λέγεται ο $\mu\times\nu$ πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. Δηλαδή,

$$A+B=[\alpha_{ij}+\beta_{ij}]$$

Δεν ορίζουμε άθροισμα πινάκων διαφορετικού τύπου.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 9\\ 8 & 4 & 5\\ 5 & -7 & -2\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}7 & -1 & 3\\ 0 & 9 & 6\\ 6 & -4 & 2\end{bmatrix}$ που είναι του ίδιου τύπου 3×3, με βάση τον παραπάνω ορισμό, μπορούν να προστεθούν και το άθροισμά τους είναι

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 9\\ 8 & 4 & 5\\ 5 & -7 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & -1 & 3\\ 0 & 9 & 6\\ 6 & -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2 & 12\\ 8 & 13 & 11\\ 11 & -11 & 0\end{bmatrix},$$

ενώ οι πίνακες $\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$ και $\Delta=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, που δεν είναι του ίδιου τύπου δεν μπορούν να προστεθούν.

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το άθροισμα δύο πινάκων λέγεται *π ρ ό σ θ ε σ η π ι ν ά κ ω ν*.

Ιδιότητες της πρόσθεσης των πινάκων

Η πρόσθεση των πινάκων έχει ιδιότητες ανάλογες με την πρόσθεση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα:

- Αν A, B, Γ είναι $\mu\times\nu$ πίνακες, τότε

$A+B=B+A$	αντιμεταθετική
$A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$	προσεταιριστική

- Αν $\mathbb{O}$ είναι ο $\mu\times\nu$ πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν, τότε για κάθε $\mu\times\nu$ πίνακα A ισχύει

$$\boxed{A+\mathbb{O}=\mathbb{O}+A=A}$$

Ο πίνακας $\mathbb{O}$ λέγεται **μηδενικός πίνακας**.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ είναι μηδενικοί.

- Αν με $-A$ συμβολίσουμε τον πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων ενός πίνακα A, τότε ισχύει

$$\boxed{A+(-A)=(-A)+A=\mathbb{O}}$$

Ο πίνακας $-A$ λέγεται **αντίθετος του πίνακα** A.

Για παράδειγμα, ο αντίθετος του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε $A+B+\Gamma$ για καθένα από τα ίσα αθροίσματα $A+(B+\Gamma)$, $(A+B)+\Gamma$. Ομοίως, αν A,B,Γ,Δ είναι πίνακες του ίδιου τύπου, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}[(A+B)+\Gamma]+\Delta &= (A+B)+(\Gamma+\Delta) = [A+(B+\Gamma)]+\Delta = A+[B+(\Gamma+\Delta)] \\ &= A+[(B+\Gamma)+\Delta] = [(B+A)+\Gamma]+\Delta \quad \text{κτλ.}\end{aligned}$$

και επομένως, μπορούμε να γράφουμε $A+B+\Gamma+\Delta$ για καθένα από τα αθροίσματα αυτά. Γενικά, επειδή ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι το άθροισμα τριών ή περισσοτέρων πινάκων $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί η πρόσθεση και συμβολίζεται με $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu$.

Αφαίρεση πινάκων

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, έτσι και στους πίνακες η αφαίρεση ορίζεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, αν A,B είναι δύο $\mu \times \nu$ πίνακες, τότε η διαφορά $A-B$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{A-B = A+(-B)}$$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε

$$A-B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, ο πίνακας $A-B$ προκύπτει με αφαίρεση των στοιχείων του B από τα αντίστοιχα στοιχεία του A.

Από τους παραπάνω ορισμούς της πρόσθεσης και της αφαίρεσης προκύπτει ότι:

$$\boxed{X+B = A \Leftrightarrow X = A-B}$$

Πράγματι:

— Αν $X+B=A$, τότε $X+B-B=A-B$, οπότε $X=A-B$, ενώ

— Αν $X=A-B$, τότε $X+B=A-B+B$, οπότε $X+B=A$.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ο παρακάτω πίνακας Α περιγράφει τις τιμές πώλησης σε ευρώ τριών ηλεκτρικών ειδών μιας βιομηχανίας σε δυο υποκαταστήματα.

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array}\begin{array}{c}\text{Τηλεορ.}\quad\text{Βίντεο}\quad\text{Στερεοφ.}\\ \begin{bmatrix} 500 & 300 & 600 \\ 450 & 280 & 550 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ 1^{\text{ο}}\text{ υποκατάστημα} \\ 2^{\text{ο}}\text{ υποκατάστημα}\end{array}$$

Αν κατά την περίοδο των εκπτώσεων, ο βιομήχανος προτίθεται να κάνει έκπτωση 20% στα προϊόντα του, τότε πρέπει να διαμορφώσει τις νέες τιμές στο 80% των προηγουμένων. Οι νέες τιμές πώλησης θα προκύψουν αν πολλαπλασιάσουμε τις παλιές τιμές με 0,8, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 0,8\cdot 500 & 0,8\cdot 300 & 0,8\cdot 600 \\ 0,8\cdot 450 & 0,8\cdot 280 & 0,8\cdot 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 240 & 480 \\ 360 & 224 & 440 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας B λέγεται **γινόμενο του αριθμού 0,8 με τον πίνακα A** και συμβολίζεται με $\mathbf{0,8\cdot A}$, δηλαδή είναι $B = 0,8A$. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$, λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με λ. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $\boldsymbol{\lambda\cdot A}$ ή $\boldsymbol{\lambda A}$. Δηλαδή,

$$\lambda\cdot A = [\lambda\alpha_{ij}]$$

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το γινόμενο αριθμού με πίνακα λέγεται *π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς α ρ ι θ μ ο ύ μ ε π ί ν α κ α.*

Για παράδειγμα, το γινόμενο του αριθμού $\lambda = -3$ με τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας:

$$-3A = -3\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot 2 & (-3)\cdot(-5) & -3\cdot 1 \\ (-3)\cdot(-2) & (-3)\cdot(-1) & -3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 15 & -3 \\ 6 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

Αν A, B είναι $\mu\times\nu$ πίνακες και κ, λ πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού:

1. $(\kappa+\lambda)A = \kappa A + \lambda A$
2. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
3. $\kappa(\lambda A) = (\kappa\lambda)A$
4. $1A = A$

Επιπλέον, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\lambda A = \mathbb{O} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } A = \mathbb{O}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί ο πίνακας X για τον οποίο ισχύει:

$$2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}-3X=5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}.$$

(Μια τέτοια ισότητα είναι μια *εξίσωση με πίνακες*).

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}-3X=5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow -3X=5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -7\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -3X=\begin{bmatrix}15 & 5\\ -10 & 0\\ 20 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4\\ -10 & 14\\ 0 & -2\end{bmatrix} \Leftrightarrow -3X=\begin{bmatrix}17 & 1\\ -20 & 14\\ 20 & -7\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(-3)X=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}17 & 1\\ -20 & 14\\ 20 & -7\end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-\frac{17}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{20}{3} & -\frac{14}{3}\\ -\frac{20}{3} & \frac{7}{3}\end{bmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το άθροισμα $A+B$ και την διαφορά $A-B$, εφόσον φυσικά ορίζονται:

i) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}6 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

ii) $A=\begin{bmatrix}6 & 7 & 8 & 9\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

iii) $A=[4\ \ 5\ \ 6]$, $B=[-4\ \ -5\ \ -6]$

iv) $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 6 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

v) $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ x & y & \omega\\ \kappa & \lambda & \mu\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1-\alpha & -\beta & -\gamma\\ -x & 1-y & -\omega\\ -\kappa & -\lambda & 1-\mu\end{bmatrix}$.

2. Αν είναι $A_1=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ και $A_4=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, να βρείτε το άθροισμα $A_1+A_2+A_3+A_4$.

3. Να βρείτε τα x, y, ω για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\ -3 & 2-x\\ 2 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & -3\\ y-3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & \omega-5\\ 1 & 6\\ 7 & 10\end{bmatrix}.$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $5\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 5 & 3\end{bmatrix}$ ii) $4\begin{bmatrix}-3 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}$

iii) $\lambda\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 2\lambda\\ 3\lambda & -\lambda & \lambda\end{bmatrix}$.

5. Αν $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 0 & 2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$, να βρείτε τους πίνακες:

i) $2A$ ii) $2(-3A)$ iii) $5B-2A$ iv) $3A-\frac{1}{2}B$.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3X+\begin{bmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -4\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

ii) $6\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}-7X=5\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$.

7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha\\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha\end{bmatrix}+\eta\mu\alpha\begin{bmatrix}\eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha\\ -\sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha\end{bmatrix}$$

είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

8. Αν $X=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ και $Y=\begin{bmatrix}-\alpha & 2\beta\\ -\gamma & 3\delta\end{bmatrix}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ώστε να ισχύει:

$$2X-5Y=\begin{bmatrix}14 & -8\\ 21 & 13\end{bmatrix}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα x, y για τα οποία ισχύει:

i) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x+y & 3y\\ x^2 & y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}x^2-3x & x+y\\ -1 & y^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

2. Να βρείτε τους πίνακες X, Y για τους οποίους ισχύει:

$$3X+Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 5X+2Y=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

3. Αν $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, να λύσετε την εξίσωση

$$3(X+B)=2\left(\frac{1}{2}X+A\right)-5B.$$

4. Μια βιομηχανία που κατασκευάζει τηλεοράσεις, βίντεο και φωτογραφικές μηχανές έχει δύο εργοστάσια παραγωγής Π_1 και Π_2. Το κόστος παραγωγής ανά συσκευή δίνεται σε δεκάδες ευρώ στους παρακάτω πίνακες.

$$\Pi_1=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{Φωτ. Μηχ} & \text{Βιντ} & \text{Τηλεορ}\end{array}\\ \begin{bmatrix}30 & 28 & 40\\ 25 & 32 & 36\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{Υλικά}\\ \text{Εργασία}\end{array} \qquad \Pi_2=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{Φωτ. Μηχ.} & \text{Βιντ.} & \text{Τηλεορ}\end{array}\\ \begin{bmatrix}38 & 30 & 42\\ 23 & 28 & 38\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{Υλικά}\\ \text{Εργασία}\end{array}$$

Να βρείτε τον πίνακα $\frac{1}{2}(\Pi_1+\Pi_2)$ και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

5. Μια βιομηχανία έχει τέσσερα εργοστάσια παραγωγής Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4, καθένα από τα οποία παράγει δύο προϊόντα E_1 και E_2. Το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής σε μονάδες προϊόντων δίνεται στον επόμενο πίνακα:

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array}\begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ \left[\begin{matrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{matrix}\right. & & & \left.\right] \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 180 & 140 & 60 \\ 80 & 40 & 120 & 120 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}.$$

i) Να βρείτε το ημερήσιο επίπεδο παραγωγής, αν αυτή αυξηθεί κατά 10%.

ii) Να βρείτε το σύνολο της παραγωγής ανά προϊόν σε 5 μήνες, αν υποτεθεί ότι τα εργοστάσια δούλεψαν 2 μήνες με το προηγούμενο επίπεδο και 3 μήνες με το νέο επίπεδο παραγωγής (1 μήνας = 30 μέρες).

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός του γινομένου δύο πινάκων

Ας υποθέσουμε ότι για την κατασκευή δύο ειδών γλυκισμάτων Γ_1 και Γ_2 χρειαζόμαστε τα υλικά σε kg που φαίνονται στον παρακάτω 2×3 πίνακα:

$$\begin{array}{ccc} \text{Αλεύρι} & \text{Ζάχαρη} & \text{Βούτυρο} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_1 \ \text{γλύκισμα} \\ \Gamma_2 \ \text{γλύκισμα} \end{matrix}.$$

Έστω επίσης ότι το κόστος σε ευρώ των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 2001και 2002, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας:

$$\begin{array}{cc} 2001 & 2002 \end{array}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{αλεύρι} \\ \text{ζάχαρη} \\ \text{βούτυρο} \end{matrix}$$

Για να βρούμε το κόστος σε ευρώ των υλικών του γλυκίσματος Γ_1 πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά. Δηλαδή το κόστος του Γ_1 το 2001 ήταν

$$1{,}2\cdot 1 + 0{,}6\cdot 0{,}8 + 0{,}3\cdot 3 = 2{,}58$$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη βοήθεια των πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix}1,2 & 0,6 & 0,3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0,8\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,2\cdot 1+0,6\cdot 0,8+0,3\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2,58\end{bmatrix}$$

Ο 1×1 πίνακας $\begin{bmatrix}2,58\end{bmatrix}$ λέγεται **γινόμενο** της πρώτης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B. Αναλόγως, το κόστος του Γ_1 το 2002 ήταν:

$$1,2\cdot 1,2+0,6\cdot 1+0,3\cdot 4=3,24$$

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την δεύτερη στήλη του B.

$$\begin{bmatrix}1,2 & 0,6 & 0,3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1,2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3,24\end{bmatrix}$$

Ομοίως, το κόστος του Γ_2 το 2001 ήταν:

$$1,4\cdot 1+0,8\cdot 0,8+0,4\cdot 3=3,24 \text{ ή}$$

$$\begin{bmatrix}1,4 & 0,8 & 0,4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0,8\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3,24\end{bmatrix}$$

ενώ το 2002 ήταν:

$$1,4\cdot 1,2+0,8\cdot 1+0,4\cdot 4=4,08 \text{ ή}$$

$$\begin{bmatrix}1,4 & 0,8 & 0,4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1,2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4,08\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\Gamma=\begin{bmatrix}2,58 & 3,24\\3,24 & 4,08\end{bmatrix}$ δείχνει το κόστος των γλυκισμάτων κατά τα έτη 2001 και 2002. Ο πίνακας Γ που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ή $\boldsymbol{AB}$, δηλαδή

$$\Gamma=\begin{bmatrix}1,2 & 0,6 & 0,3\\1,4 & 0,8 & 0,4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1,2\\0,8 & 1\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2,58 & 3,24\\3,24 & 4,08\end{bmatrix}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $A=[\alpha_{ik}]$ είναι ένας $\mu\times\nu$ πίνακας και $B=[\beta_{kj}]$ είναι ένας $\nu\times\rho$ πίνακας, τότε ορίζουμε ως **γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B** και το συμβολίζουμε με $A\cdot B$ ή με AB τον $\mu\times\rho$ πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο γ_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των ν στοιχείων της i-γραμμής του A με τα αντίστοιχα ν στοιχεία της j-στήλης του B. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{i\nu}\beta_{\nu j}}$$

Σχηματικά

$$\begin{array}{cccc}
 & & j\text{-στήλη} & \\
i-\text{γραμμή} & \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{i\nu}\\ \vdots & & & \vdots\\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1\rho}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2\rho}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ & & & & & \\ & & & & & \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & & \beta_{\nu j} & & \beta_{\nu\rho}\end{bmatrix} & = \begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1\rho}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{2\rho}\\ \vdots & & & & & \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \cdots & \gamma_{ij} & \cdots & \gamma_{i\rho}\\ \vdots & & & & & \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \cdots & \gamma_{\mu j} & \cdots & \gamma_{\mu\rho}\end{bmatrix}
\end{array}$$

Για παράδειγμα, το γινόμενο $\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\gamma_{11}&=2\cdot4+1(-1)+(-3)\cdot1=4, \\ \gamma_{21}&=3\cdot4+0(-1)+1\cdot1=13\end{aligned}\qquad \text{και}\qquad \begin{aligned}\gamma_{12}&=2\cdot2+1\cdot5+(-3)\cdot0=9\\ \gamma_{22}&=3\cdot2+0\cdot5+1\cdot0=6\end{aligned}.$$

Επομένως,

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 13 & 6\end{bmatrix}.$$

Τονίζεται ότι το γινόμενο AB ορίζεται όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα B.
Σχηματικά:

$$\begin{array}{ccccc}(A & , & B) & \rightarrow & AB\\ \mu\times\nu & & \nu\times\rho & & \mu\times\rho\end{array}$$

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$,

τότε, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ορίζονται τα γινόμενα $AB, BA, A\Gamma$ και είναι

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 13 & 5 & 8 \\ -14 & 3 & -6 & 8 \end{bmatrix},$$

ενώ δεν ορίζονται τα γινόμενα $B\Gamma, \Gamma B$ και ΓA.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των πινάκων

- Αν λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί και A, B είναι πίνακες, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες με την προϋπόθεση οτι ορίζονται οι πράξεις που σημειώνονται.

$$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma \qquad \textit{προσεταιριστική}$$

$$A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma \quad \text{και} \quad (B+\Gamma)A = BA + \Gamma A \qquad \textit{επιμεριστική}$$

$$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$$

- Αν με I_ν συμβολίσουμε τον $\nu \times \nu$ διαγώνιο πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ του

οποίου κάθε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου είναι ίσο με 1, τότε για κάθε τετραγωνικό $\nu \times \nu$ πίνακα A ισχύει:

$$\boxed{AI_\nu = I_\nu A = A}$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται **μοναδιαίος πίνακας.**

Για παράδειγμα, οι πίνακες $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίοι.

Τον πίνακα I_ν θα τον συμβολίζουμε απλούστερα με I, όταν είναι προφανής ο τύπος του.

Αν τώρα A είναι ένας $\mu \times \nu$ πίνακας, τότε ισχύουν

$$\boldsymbol{AI_\nu = A} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{I_\mu A = A}.$$

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}.$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε $ΑΒΓ$ για καθένα από τα ίσα γινόμενα $Α(ΒΓ)$, $(ΑΒ)Γ$. Ομοίως, αν $Α,Β,Γ,Δ$ είναι πίνακες τέτοιοι, ώστε να ορίζονται τα γινόμενα $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ τότε έχουμε

$$[(ΑΒ)Γ]Δ=(ΑΒ)(ΓΔ)=Α[Β(ΓΔ)]=Α[(ΒΓ)Δ]=[Α(ΒΓ)]Δ$$

και μπορούμε να γράφουμε $ΑΒΓΔ$ για καθένα από τα γινόμενα αυτά.
Γενικά, επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, μπορεί να αποδειχτεί ότι όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό πινάκων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεστεί ο πολλαπλασιασμός, χωρίς όμως να αλλάξει η σειρά των παραγόντων και συμβολίζεται με $A_1A_2...A_\nu$.
Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ορίζονται τα γινόμενα AA, AAA, $AAAA$, κτλ. και τα συμβολίζουμε με μορφή δυνάμεων ως εξής: $A^2, A^3, A^4, ...,$ αντιστοίχως. Ορίζουμε επίσης $A^1=A$.
Αν p, q είναι θετικοί ακέραιοι, και κ πραγματικός αριθμός, αποδεικνύεται ότι:

$$A^p\cdot A^q=A^{p+q}, \quad (A^p)^q=A^{pq} \quad \text{και} \quad (\kappa A)^p=\kappa^p A^p.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύει, επιπλέον, και η αντιμεταθετική ιδιότητα. Δηλαδή, ισχύει $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ για οποιουσδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η ιδιότητα, όμως, αυτή **δεν** ισχύει για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού υπάρχουν πίνακες A, B με $AB\neq BA$. Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}$, τότε $AB\neq BA$, αφού:

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\5 & 7\end{bmatrix}, \quad \text{ενώ} \quad BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8\\-5 & -3\end{bmatrix}.$$

Επειδή, λοιπόν, δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα οι ισότητες:

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2, \qquad (A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3,$$

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B), \qquad A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2) \text{ κτλ.}$$

δεν ισχύουν πάντοτε. Στην περίπτωση, όμως, που $AB=BA$ οι παραπάνω ισότητες ισχύουν.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ **και** $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$. **Να αποδειχτεί ότι:**

i) $A^2=I$, $B^2=-I$ **και** $A^2+B^2=\mathbb{O}$

ii) $AB+BA=I$

iii) $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι $A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

$$B^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$$

Άρα $A^2+B^2=\mathbb{O}$.

ii) Είναι $AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Άρα $AB+BA=I$.

iii) Είναι

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=I+AB+BA-I$$

$$=AB+BA=I \qquad \text{(λόγω της ii))}$$

$$A^2+B^2+2AB=2AB=2\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad \text{(λόγω της ii)).}$$

Άρα, $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$.

Αντιστρέψιμοι πίνακες

• Γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$ υπάρχει ο αντίστροφός του, που συμβολίζεται με $\frac{1}{\alpha}$ ή α^{-1}, για τον οποίο ισχύει $\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=1$.

Είναι λογικό τώρα να ρωτήσουμε: "Αν δοθεί ένας πίνακας A μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα B τέτοιον ώστε να ισχύει $AB = BA = I$;"
Σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό που ορίσαμε μια τέτοια ερώτηση έχει νόημα μόνο αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας τύπου $\nu\times\nu$. Αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας B τύπου $\nu\times\nu$, τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I$, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος πίνακας** και ο B **αντίστροφος** του A.

Αν ένας πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αποδεικνύεται ότι αυτός είναι μοναδικός και συμβολίζεται με A^{-1}. Έτσι έχουμε:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Άρα, ο B είναι ο αντίστροφος του A.

● Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A, όταν $AB = I$ και $BA = I$. Αποδεικνύεται, όμως, ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για δυο $\nu\times\nu$ πίνακες A, B ισχύει μια από τις ισότητες

$$AB = I \qquad \text{και} \qquad BA = I,$$

τότε θα ισχύει και η άλλη.

Με βάση αυτό το θεώρημα, για να αποδείξουμε ότι ένας $\nu\times\nu$ πίνακας B είναι αντίστροφος ενός $\nu\times\nu$ πίνακα A, αρκεί να αποδείξουμε μία μόνο από τις ισότητες $AB = I$ και $BA = I$.

● Τέλος, αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\text{(i) } AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$
$$\text{(ii) } XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

Πράγματι, για την (i) έχουμε:

— Αν $AX = B$, τότε $A^{-1}AX = A^{-1}B$, οπότε $X = A^{-1}B$.

— Αν $X = A^{-1}B$, τότε $AX = AA^{-1}B$, οπότε $AX = B$.
Ομοίως αποδεικνύεται και η (ii).

ΣΧΟΛΙΟ

Γνωρίζουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών ισχύει επιπλέον και η ιδιότητα: "αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$". Η ιδιότητα, όμως, αυτή **δεν ισχύει** για τον πολλαπλασιασμό των πινάκων, αφού π.χ. για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ισχύει $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ χωρίς, ωστόσο, να είναι $A = \mathbf{O}$ ή $B = \mathbf{O}$. Δηλαδή:

"Μπορεί ένα γινόμενο πινάκων να ισούται με το μηδενικό πίνακα, χωρίς κανένας να είναι μηδενικός".

Στην περίπτωση όμως που ισχύει $AB = \mathbf{O}$ και ο ένας από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμος, τότε ο άλλος είναι μηδενικός. Πράγματι, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$AB = \mathbf{O}$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O}$$

$$IB = \mathbf{O}$$

$$B = \mathbf{O}.$$

Αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα

Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας. Θα εξετάσουμε πότε αυτός αντιστρέφεται και θα βρούμε τον αντίστροφό του.

Για να αντιστρέφεται ο A, πρέπει και αρκεί να υπάρχει πίνακας $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $AX = I$ ή, ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta\omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = 1 \\ \gamma x + \delta z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma_1) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha y + \beta\omega = 0 \\ \gamma y + \delta\omega = 1 \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

Αρκεί, επομένως, τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) να έχουν λύση. Τα συστήματα αυτά έχουν

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

και

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \delta \end{vmatrix} = \delta, \quad D_z = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\gamma, \quad D_y = \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ 1 & \delta \end{vmatrix} = -\beta, \quad D_\omega = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha.$$

Επομένως:

- Αν $\boldsymbol{D \neq 0}$, τότε τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) έχουν μοναδική λύση, οπότε ο πίνακας A αντιστρέφεται. Η λύση του (Σ_1) είναι το ζεύγος (x, z) με

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\delta}{D} \quad \text{και} \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-\gamma}{D},$$

ενώ η λύση του (Σ_2) είναι το ζεύγος (y, ω) με

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\beta}{D} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{D_\omega}{D} = \frac{\alpha}{D}.$$

Άρα $X = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{D} & \frac{-\beta}{D} \\ \frac{-\gamma}{D} & \frac{\alpha}{D} \end{bmatrix}$, οπότε ο αντίστροφος του A είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

- Αν $\boldsymbol{D = 0}$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι αδύνατο, οπότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται. Πράγματι

  α) Αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ ή $D_z \neq 0$ ή $D_\omega \neq 0$, τότε ένα τουλάχιστον από τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) θα είναι αδύνατο.

  β) Αν $D_x = D_y = D_z = D_\omega = 0$, τότε $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, οπότε και πάλι τα δύο συστήματα θα είναι αδύνατα.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

- Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

- Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}}, \quad \text{όπου} \quad D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Για παράδειγμα:

α) Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ αντιστρέφεται, γιατί $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$ και ο αντίστροφός του είναι ο

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

β) Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ δεν αντιστρέφεται, γιατί $\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}11 & 3\\ 22 & -1\end{bmatrix}$

i) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A

ii) Να λυθεί η εξίσωση $AX=B$

ΛΥΣΗ

i) Για τον πίνακα A έχουμε $D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=11\neq 0$. Άρα

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \tag{1}$$

ii) Επειδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, έχουμε:

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} X=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}11 & 3\\ 22 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα γινόμενα AB και BA σε όποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ορίζονται:

i) $A=[3 \quad 2 \quad 1]$, $B=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ ii) $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$

iii) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\0 & 4 & 2\\5 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\4 & 1 & -2\\0 & -1 & 3\end{bmatrix}$

iv) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\-3 & -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\-4 & 7 & 1\end{bmatrix}$.

2. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

Να βρείτε τους πίνακες: i) AB ii) $AB-\Gamma$ iii) $AB\Gamma$.

3. Τα στοιχεία για τις αμοιβές και τον αριθμό των εργατών σε δύο οικοδομικές εταιρείες A και B έχουν με μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{cc} \text{Αριθμός εργατών} & \\ \text{Ειδικευμένοι} & \text{Ανειδίκευτοι} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\begin{bmatrix}60 & 75\\30 & 60\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r}\text{Ημερήσιες αποδοχές (σε ευρώ)}\\ \text{Ειδικευμένοι} \\ \text{Ανειδίκευτοι}\end{array}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}50\\40\end{bmatrix}\end{array}.$$

Να εκφράσετε με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού των πινάκων το σύνολο των αμοιβών των εργατών στις δύο εταιρείες.

4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A.

i) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$ ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 5 & -3\\-3 & 2 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14 & -8 & -1\\-17 & 10 & 1\\-19 & 11 & 1\end{bmatrix}$

5. Να βρείτε τον αντίστροφο, εφόσον υπάρχει, καθενός από τους παρακάτω πίνακες:

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta\\ \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta\end{bmatrix}$.

6. i) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $\begin{bmatrix}\eta\mu\alpha & -\sigma\upsilon\nu\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\alpha & \eta\mu\alpha\end{bmatrix}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{bmatrix} ημα & -συνα \\ συνα & ημα \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} συνα & ημα \\ -ημα & -συνα \end{bmatrix}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, τότε:

i) Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $A^2 = xA + yI$.

ii) Να υπολογίσετε τους πίνακες A^3 και A^4.

2. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε να ισχύει

$$A^3 - 10A - xI = \mathbb{O}.$$

3. Να βρείτε τους πίνακες $X = \begin{bmatrix} α & 1 \\ 0 & β \end{bmatrix}$, $α, β \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $X^2 = I$.

4. Αν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

i) $A^2 = I$, $B^2 = I$ ii) $(A-B)^2 = \mathbb{O}$, $(A+B)^2 = 4I$.

iii) $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$

5. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

i) Ο πίνακας A αντιστρέφεται και να βρείτε τον A^{-1}.

ii) $(A + A^{-1})^ν = 2^ν I$, $ν \in \mathbb{N}^*$.

6. Αν $A(x) = \begin{bmatrix} συνx & -ημx \\ ημx & συνx \end{bmatrix}$, $B(x) = \begin{bmatrix} ημx & συνx \\ -συνx & ημx \end{bmatrix}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $A^2(x) = A(2x)$, $B^2(x) = -A(2x)$

ii) Να αποδείξετε ότι $A^2(x) + B^2(x) = \mathbb{O}$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $A^2(x) - B^2(x) = 2I$.

7. Μια βιομηχανία επίπλων κουζίνας έχει δύο εργοστάσια E_1 και E_2. Οι πίνακες M και N δίνουν τις ώρες εργασίας που απαιτούνται για την κατασκευή κάθε επίπλου και τις ωριαίες αμοιβές του προσωπικού σε ευρώ αντιστοίχως.

$$M=\begin{array}{c}\text{Κατασκευή}\quad\text{Βάψιμο}\quad\text{Συσκευασία}\\ \begin{bmatrix}0,6 & 0,6 & 0,2\\ 1 & 0,9 & 0,3\\ 1,5 & 1,2 & 0,4\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{Πάγκος}\\ \text{Καρέκλα}\\ \text{Τραπέζι}\end{array},\quad N=\begin{array}{c}E_1\quad E_2\\ \begin{bmatrix}5 & 6\\ 6 & 7\\ 4 & 5\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{Κατασκευή}\\ \text{Βάψιμο}\\ \text{Συσκευασία}\end{array}$$

i) Να βρείτε τον πίνακα MN και να εξηγήσετε τι εκφράζει.

ii) Ποιο είναι το κόστος εργασίας για την παραγωγή μιας καρέκλας στο εργοστάσιο E_1 και ενός πάγκου στο εργοστάσιο E_2;

8. Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}$, να αποδείξετε ότι:

i) $A^3=\mathbb{O}$ και γενικά $A^\nu=\mathbb{O}$, $\nu\geq 3$

ii) $B^2=I$, $B^3=B$ και γενικά $B^\nu=\begin{cases}I & \text{αν } \nu \text{ άρτιος θετικός}\\ B & \text{αν } \nu \text{ περιττός θετικός}\end{cases}$.

9. Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\dfrac{1}{\text{συν}x}\begin{bmatrix}1 & \text{ημ}x\\ \text{ημ}x & 1\end{bmatrix}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

i) Να αποδείξετε ότι $A^{-1}(x)=A(-x)$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=I$.

10. Αν $A(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

i) Να αποδείξετε ότι $A(x)A(y)=A(x+y)$

ii) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των x,y ώστε ο πίνακας $A(y)$ να είναι αντίστροφος του $A(x)$.

iii) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα $M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

11. Αν $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1+\lambda\\ 1-\lambda & -\lambda\end{bmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $A^2=I$, $A^3=A$ και γενικά ότι $A^\nu=\begin{cases}I, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ A, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

ii) Αν $\lambda = 2$, να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίο ισχύει $A^{1993}X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{10}.$$

12. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

i) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A

ii) Να βρείτε τον πίνακα X σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ β) $AXA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ γ) $AX = A^2 + 2A$.

13. Αν $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $A^3 = -I$ και γενικά ότι $A^{3\nu} = \begin{cases} I & \text{, αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -I & \text{, αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$.

ii) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει

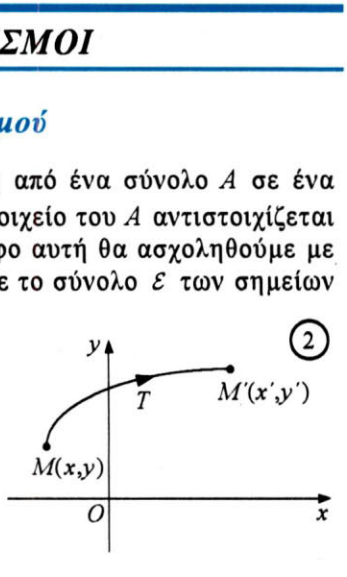
$$x^2 A^{1992} + (x+2)A^{1989} = \mathbb{O}.$$

1.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Η Έννοια του Γεωμετρικού Μετασχηματισμού

● Γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ότι συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό στοιχείο του B. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις για τις οποίες τα A και B συμπίπτουν με το σύνολο $\mathcal{E}$ των σημείων ενός καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο επίπεδο** ή, απλά, **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί**. Δηλαδή, γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι οποιαδήποτε συνάρτηση

$$T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$



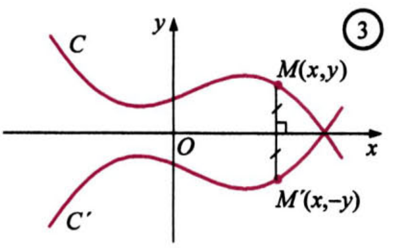
Ως προς τη συνάρτηση αυτή η εικόνα, $T(M)$, του σημείου $M(x,y)$ θα συμβολίζεται με $M'(x',y')$.

Ένα παράδειγμα γεωμετρικού μετασχηματισμού είναι η συνάρτηση

$$T:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$$

$$M(x,y)\to M'(x,-y),$$

η οποία αντιστοιχίζει κάθε σημείο M στο συμμετρικό του M' ως προς τον άξονα $x'x$.



● Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν τα σημεία $M(x,y)$ στα $M'(x',y')$ των οποίων οι συντεταγμένες δίνονται από ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{cases}x'=\alpha x+\beta y+\mu\\ y'=\gamma x+\delta y+\nu\end{cases}$$

ή, ισοδύναμα, από μια εξίσωση της μορφής

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix} \qquad (1)$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu$ πραγματικοί αριθμοί.
Αν $\mu=0$ και $\nu=0$, τότε η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \qquad (2)$$

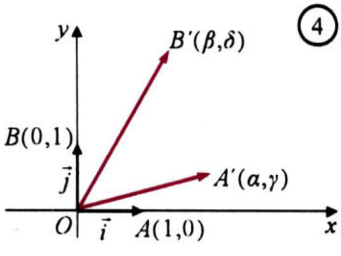
Στην περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός μετασχηματισμός λέγεται **γραμμικός μετασχηματισμός** και ο πίνακας $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας** του γραμμικού μετασχηματισμού.
Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός που ορίζεται από το σύστημα $\begin{cases}x'=7x+3y\\ y'=2x+2y\end{cases}$ ή, ισοδύναμα, από την εξίσωση $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα τον $\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$. Με αυτόν τον μετασχηματισμό το σημείο $A(1,2)$ απεικονίζεται στο $A'(13,6)$, ενώ το σημείο $B(1,-2)$ στο $B'(1,-2)$, δηλαδή στον εαυτό του.

● Ας θεωρήσουμε τώρα το γραμμικό μετασχηματισμό

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i} = (1,0)$ και $\vec{j} = (0,1)$. Τότε, η εικόνα A' του πέρατος $A(1,0)$ του διανύσματος $\vec{i}$ έχει συντεταγμένες (α, γ), αφού

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix},$$



ενώ η εικόνα B' του πέρατος $B(0,1)$ του διανύσματος $\vec{j}$ έχει συντεταγμένες (β, δ), αφού

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι:

Οι συντεταγμένες της εικόνας του πέρατος, $A(1,0)$, του διανύσματος $\vec{i} = (1,0)$ είναι η πρώτη στήλη, ενώ οι συντεταγμένες της εικόνας του πέρατος, $B(0,1)$, του διανύσματος $\vec{j}$ είναι η δεύτερη στήλη του πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού.

Για παράδειγμα, ο γραμμικός μετασχηματισμός, που απεικονίζει τα πέρατα $A(1,0)$ και $B(0,1)$ των διανυσμάτων $\vec{i} = (1,0)$ και $\vec{j} = (0,1)$ στα σημεία $A'(3,1)$ και $B'(1,2)$ αντιστοίχως, έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Τέλος, είναι προφανές ότι:

Ο γραμμικός μετασχηματισμός T απεικονίζει το σημείο $O(0,0)$ στο $O(0,0)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) Να βρεθούν οι εικόνες $A'(x_1', y_1')$ και $B'(x_2', y_2')$ των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ αντιστοίχως.

ii) Να αποδειχτεί ότι $(A'B') = (AB)$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

Επομένως, οι εικόνες των $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι τα σημεία $A'(-y_1, x_1)$ και $B'(-y_2, x_2)$ αντιστοίχως.

ii) Είναι

$$(A'B') = \sqrt{(-y_2 + y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (AB).$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί τις αποστάσεις. Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν τις αποστάσεις λέγονται **ισομετρίες**.

2. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί:

i) Το πρότυπο του σημείου $A'(2,0)$, δηλαδή το σημείο $A(x, y)$ που απεικονίζεται στο $A'(2,0)$.

ii) Η εικόνα της ευθείας $\varepsilon: y = -2x + 1$.

ΛΥΣΗ

i) Ισχύει

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο πίνακας $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον αντίστροφό του, που είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα το σημείο A έχει συντεταγμένες $(2,-2)$.

ii) Αρκεί να βρούμε την εξίσωση η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των εικόνων των σημείων της ευθείας ε και μόνο απ' αυτές. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

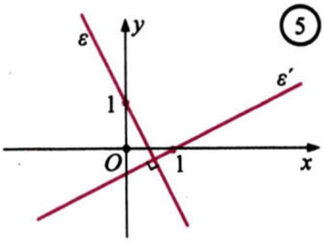
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' - 3y' \\ -x' + 4y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = -x' + 4y' \end{cases} \qquad (1)$$

Επομένως, αν το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 1 \\ -x' + 4y' &= -2x' + 6y' + 1 \\ -2y' &= -x' + 1 \\ y' &= \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Άρα, το σημείο $M'(x',y')$ ανήκει στην ευθεία ε': $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Αλλά και *αντιστρόφως*, αν το σημείο $M'(x',y')$ ανήκει στην ευθεία ε': $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, τότε το $M(x,y)$ ανήκει στην ευθεία ε: $y = -2x + 1$.

Συνεπώς, η εικόνα της ευθείας ε: $y = -2x + 1$ είναι η ευθεία ε': $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός, του οποίου ο πίνακας **αντιστρέφεται**, απεικονίζει:

— ευθείες σε ευθείες

— ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τις εικόνες των άκρων

— πολύγωνα σε πολύγωνα με κορυφές τις εικόνες των κορυφών.

Για παράδειγμα, με το μετασχηματισμό

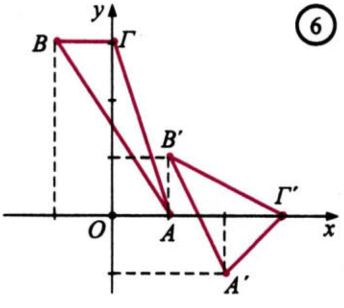
$$T:\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,0)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(0,3)$ απεικονίζεται στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ που έχει ως κορυφές τις εικόνες $A'(2,-1)$, $B'(1,1)$ και $\Gamma'(3,0)$ των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Είναι βολικό, πολλές φορές, ένα πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ να το παριστάνουμε με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_\nu \\ y_1 & y_2 & \dots & y_\nu \end{bmatrix},$$

που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των κορυφών του. Τον πίνακα αυτόν θα τον λέμε **πίνακα του πολυγώνου**. Έτσι, ο πίνακας του $AB\Gamma$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, ενώ του $A'B'\Gamma'$ ο $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Είναι φανερό ότι

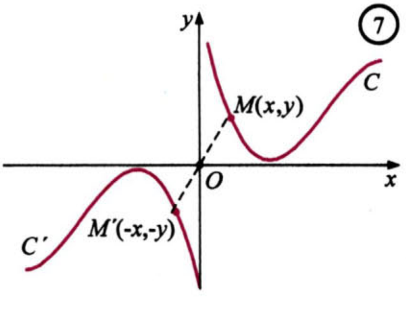


$$\begin{array}{ccc} A' & B' & \Gamma' \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A & B & \Gamma \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο πίνακας του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού με τον πίνακα του τριγώνου $AB\Gamma$. Αυτό ισχύει και για οποιοδήποτε πολύγωνο.

Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

1. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων



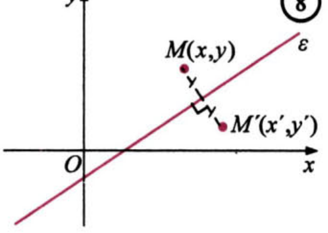
Καλούμε συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του $M'(x',y')$ ως προς την αρχή των αξόνων. Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1x + 0y \\ y' = \ \ 0x - 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{I}$.

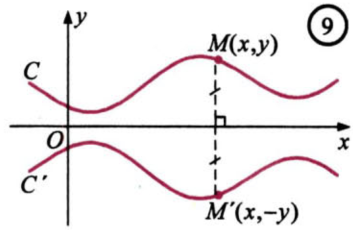
2. Συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία ε.

Καλούμε συμμετρία ως προς άξονα μια ευθεία ε, το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του, $M'(x',y')$, ως προς την ευθεία ε.



Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$, τη συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$ και τη συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$.

2α. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$.

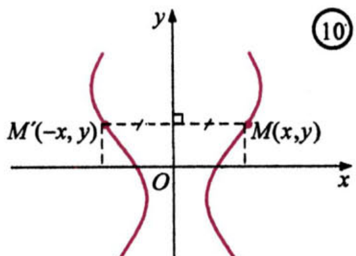


Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1x+0y \\ y'=0x-1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$.

2β. Συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.

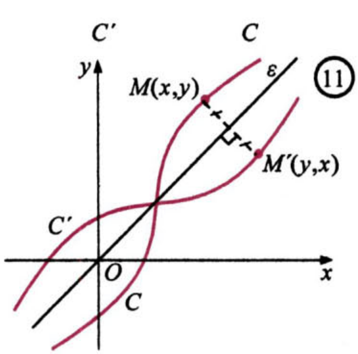


Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-1x+0y \\ y'=\ \ 0x+1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα η συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

2γ. Συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία $y=x$.



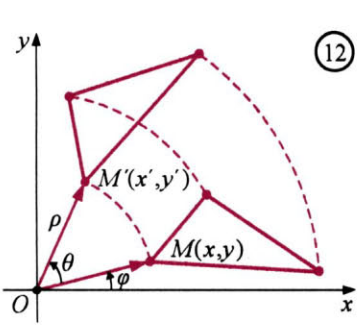
Όπως γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ισχύει:

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=0x+1y \\ y'=1x+0y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία $y=x$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Οι παραπάνω γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι όλοι **ισομετρίες**.

3. Στροφή με κέντρο Ο και γωνία θ.



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και θ μια θετική ή αρνητική γωνία. Καλούμε στροφή με κέντρο O και γωνία θ το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο πέρας $M'(x',y')$, του διανύσματος $\overrightarrow{OM'}$ που είναι η τελική θέση του $\overrightarrow{OM}$, αν αυτό στραφεί γύρω από το O κατά γωνία θ. Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ με τον άξονα $x'x$ και ρ το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, τότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{συν}\varphi \\ y = \rho\,\text{ημ}\varphi \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x' = \rho\,\text{συν}(\varphi+\theta) \\ y' = \rho\,\text{ημ}(\varphi+\theta) \end{cases} \quad (2).$$

Έτσι, θα ισχύει

$$\begin{cases} x' = \rho(\text{συν}\varphi\,\text{συν}\theta - \text{ημ}\varphi\,\text{ημ}\theta) \\ y' = \rho(\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\theta + \text{συν}\varphi\,\text{ημ}\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (\rho\,\text{συν}\varphi)\text{συν}\theta - (\rho\,\text{ημ}\varphi)\text{ημ}\theta \\ y' = (\rho\,\text{ημ}\varphi)\text{συν}\theta + (\rho\,\text{συν}\varphi)\text{ημ}\theta \end{cases}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x' = x\,\text{συν}\theta - y\,\text{ημ}\theta \\ y' = x\,\text{ημ}\theta + y\,\text{συν}\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, η στροφή με κέντρο O και γωνία θ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\text{συν}\theta} & \boldsymbol{-\text{ημ}\theta} \\ \boldsymbol{\text{ημ}\theta} & \boldsymbol{\text{συν}\theta} \end{bmatrix}$. Ειδικότερα:

α) Η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

β) Η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \pi$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

και είναι η συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = \frac{3\pi}{2}$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

δ) Τέλος, η στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = 2\pi$ έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

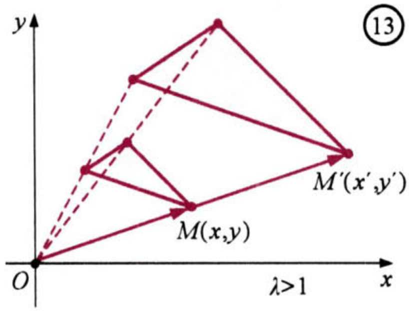
και είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι και η στροφή είναι μια ισομετρία.

4. Ομοιοθεσία.

Καλούμε **ομοιοθεσία** με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ το μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο σημείο $M'(x',y')$ που ορίζεται από την ισότητα

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}.$$



Επειδή $\overrightarrow{OM} = (x,y)$ και $\overrightarrow{OM'} = (x',y')$, έχουμε:

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow (x',y') = \lambda(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda x + 0y \\ y' = 0x + \lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

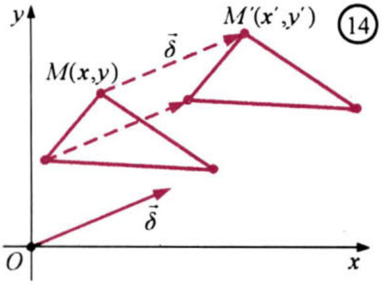
Άρα,η ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων και λόγο $\lambda \neq 0$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda I}$.

ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

Για να θυμόμαστε τον πίνακα των παραπάνω γραμμικών μετασχηματισμών, αρκεί να θυμόμαστε ότι η πρώτη στήλη του είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του σημείου $A(1,0)$, ενώ η δεύτερη στήλη του είναι οι συντεταγμένες της εικόνας του $B(0,1)$. Για παράδειγμα, ο πίνακας της συμμετρίας ως προς τον άξονα $x'x$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ που έχει για πρώτη και δεύτερη στήλη τις συντεταγμένες των συμμετρικών ως προς τον άξονα $x'x$ των σημείων $A(1,0)$ και $B(0,1)$ αντιστοίχως.

5. Παράλληλη μεταφορά.

Έστω $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Καλούμε παράλληλη μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$ το γεωμετρικό εκείνο μετασχηματισμό με τον οποίο κάθε σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου αντιστοιχίζεται στο σημείο $M'(x',y')$ που ορίζεται από την ισότητα $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$ (Σχ. 14).



Επειδή $\overrightarrow{MM'} = (x'-x, y'-y)$, έχουμε

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta} \Leftrightarrow (x'-x, y'-y) = (\delta_1, \delta_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = \delta_1 \\ y'-y = \delta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+\delta_1 \\ y' = y+\delta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}.$$

Άρα, η παράλληλη μεταφορά **δεν** είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Είναι, όμως, **ισομετρία.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Έστω T ο μετασχηματισμός "στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = -\frac{\pi}{4}$". Να βρεθεί η εικόνα C' της καμπύλης $C: y = \frac{1}{x}$ ως προς το μετασχηματισμό T.**

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του επιπέδου και $M'(x',y')$ η εικόνα του ως προς το μετασχηματισμό T. Τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}\frac{\pi}{4} & \text{ημ}\frac{\pi}{4} \\ -\text{ημ}\frac{\pi}{4} & \text{συν}\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

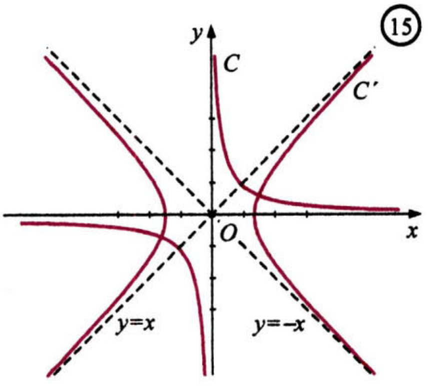
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}. \qquad (1)$$

Επομένως, αν το $M(x, y)$ ανήκει στην καμπύλη C, τότε θα ισχύει:

$$xy = 1$$

$$\frac{1}{2}\left[(x')^2 - (y')^2\right] = 1$$

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$



οπότε το σημείο $M'(x', y')$ θα είναι σημείο της ισοσκελούς υπερβολής

$$C' : \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Αλλά και *αντιστρόφως*, αν το $M'(x', y')$ ανήκει στην καμπύλη C', τότε το $M(x, y)$ θα ανήκει στην C.

Άρα, η εικόνα της $C: y = \frac{1}{x}$, ως προς τη στροφή με κέντρο O και γωνία $\theta = -\frac{\pi}{4}$, είναι η υπερβολή $C': \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$. Συνεπώς, η καμπύλη $C: y = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή που προκύπτει αν στρέψουμε την C' κατά γωνία $-\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. Έστω T_1 και T_2 οι γραμμικοί μετασχηματισμοί με πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

αντιστοίχως. Να βρεθεί ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού που προκύπτει, αν εφαρμόσουμε πρώτα τον T_1 και έπειτα τον T_2, δηλαδή του μετασχηματισμού $T_2 \circ T_1$.

ΛΥΣΗ

Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο του επιπέδου. Αν $M'(x', y')$ είναι η εικόνα του M μέσω του μετασχηματισμού T_1 και $M''(x'', y'')$ η εικόνα του M' μέσω του μετασχηματισμού T_2, τότε θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

οπότε θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα, ο πίνακας του $T_2 \circ T_1$ είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ που είναι το γινόμενο $A_2 \cdot A_1$ των πινάκων των μετασχηματισμών T_2 και T_1. Γενικά:

"Αν A_1, A_2 είναι πίνακες δύο γραμμικών μετασχηματισμών, T_1 και T_2 αντιστοίχως, τότε ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού $T_2 \circ T_1$ είναι ο $A_2 \cdot A_1$, ενώ του $T_1 \circ T_2$ είναι ο $A_1 \cdot A_2$".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τους πίνακες των γραμμικών μετασχηματισμών:

$$T_1 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \quad T_2 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}, \quad T_3 : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$$

και να βρείτε τις εικόνες των σημείων $A(1,0)$ και $B(0,1)$.

2. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα πέρατα $A(1,0)$ και $B(0,1)$ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ στα σημεία (i) $(1,2)$ και $(-1,3)$ αντιστοίχως, (ii) $(-1,1)$ και $(2,1)$ αντιστοίχως.

3. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τις εικόνες των σημείων $O(0,0)$ και $A(3,4)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ο T δεν είναι ισομετρία.

4. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

i) Να βρείτε την εικόνα $A'B'\Gamma'\Delta'$ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που έχει πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

ii) Να αποδείξετε ότι το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο.

5. Δίνεται ο μετασχηματισμός:

$$T:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

Να βρείτε

i) το πρότυπο του σημείου $A'(0,5)$

ii) την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: y=x+1$.

6. Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι γραμμικοί μετασχηματισμοί που έχουν πίνακα:

i) $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&1/2\\-1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix}$, ii) $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

iii) $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, iv) $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

v) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, vi) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

i) Να αποδείξετε ότι ο T απεικονίζει όλα τα σημεία του επιπέδου στην ευθεία $\varepsilon: y=2x$.

ii) Να βρείτε τα πρότυπα του σημείου $O(0,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A'(1,1)$ δεν έχει πρότυπο.

2. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$T:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

και δύο οποιαδήποτε σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι

i) Ο T δεν είναι ισομετρία, δηλαδή ότι $(A'B')\neq(AB)$.

ii) Ο T απεικονίζει το μέσο του ευθ. τμήματος AB στο μέσο της εικόνας του $A'B'$.

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με το εμβαδό της εικόνας του $O'A'B'$.

3. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα σημεία $A(1,1)$ και $B(1,-1)$ στα σημεία:

i) $A'(0,1)$ και $B'(2,1)$ αντιστοίχως

ii) $A'(6,3)$ και $B'(2,1)$ αντιστοίχως.

Σε καθεμιά περίπτωση να βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon{:}y=-2x$.

4. Να αποδείξετε ότι καθένας από τους παρακάτω γεωμετρικούς μετασχηματισμούς είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

i) Η συμμετρία ως προς την ευθεία $y=-x$.

ii) Η προβολή πάνω στον άξονα $x'x$.

iii) Η προβολή πάνω στον άξονα $y'y$.

iv) Η προβολή πάνω στην ευθεία $y=x$.

Στη συνέχεια να βρείτε σε καθεμία περίπτωση την εικόνα του τετραγώνου $ΟΑΓΒ$ με πίνακα $\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ και να επιβεβαιώσετε γεωμετρικά την απάντησή σας.

5. Δίνεται ο μετασχηματισμός T με πίνακα $A=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{bmatrix}$, όπου $\alpha>\beta>0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του κύκλου $C{:}x^2+y^2=1$ είναι η έλλειψη $C'{:}\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

ii) Αφού βρείτε την εικόνα $O'A'\Gamma'B'$ του τετραγώνου $ΟΑΓΒ$, που έχει πίνακα $\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, να δείξετε ότι $(O'A'\Gamma'B')=\alpha\beta\cdot(OA\Gamma B)$.

1.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

• Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_\nu x_\nu=\beta$, όπου $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu$ β είναι πραγματικοί αριθμοί και $x_1,x_2,\dots,x_\nu$ άγνωστοι, λέγεται **γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους**. Οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_\nu$ λέγονται **συντελεστές των αγνώστων** και ο **β σταθερός όρος**.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $x-3y=-3$ είναι μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους. Επίσης, η $x_1-\sqrt{2}x_2+x_3-5x_4=1$ είναι γραμμική εξίσωση με τέσσε-

ρις αγνώστους, ενώ οι εξισώσεις $2x^2 - y = 1$ και $2\sqrt{x} - 3y = 2$ δεν είναι γραμμικές.
Κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών $(s_1, s_2, ..., s_\nu)$ που επαληθεύει μια γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους λέγεται **λύση της εξίσωσης**.
Για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα $(-1, 0, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης $3x - 2y + \omega = -1$, αφού $3(-1) - 2 \cdot 0 + 2 = -3 + 2 = -1$.

● Ένα πλήθος μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, λέγεται **γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους** ή απλούστερα **$\mu \times \nu$ γραμμικό σύστημα**.
Για παράδειγμα, το

$$\begin{cases} 2x - y + 3\omega = 1 \\ x + 3y - \omega = -2 \end{cases} \qquad (\Sigma_1)$$

είναι ένα 2×3 γραμμικό σύστημα.
Γενικά, ένα $\mu \times \nu$ γραμμικό σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu \end{cases} \qquad (\Sigma_2)$$

Ο 1ος δείκτης i του συντελεστή α_{ij} δείχνει την εξίσωση στην οποία ανήκει ο α_{ij}, ενώ ο 2ος δείκτης j δείχνει τον άγνωστο με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ο α_{ij}. Για παράδειγμα, ο α_{32} είναι ο συντελεστής του αγνώστου x_2 στην τρίτη εξίσωση ενός συστήματος.
Κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών η οποια επαληθεύει όλες τις εξισώσεις ενός $\mu \times \nu$ γραμμικού συστήματος, λέγεται **λύση** του συστήματος. Για παράδειγμα, η διατεταγμένη τριάδα $(-1, 0, 1)$ είναι λύση του συστήματος (Σ_1), αφού $2(-1) - 0 + 3 \cdot 1 = 1$ και $-1 + 3 \cdot 0 - 1 = -2$.
Η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε τις λύσεις ενός συστήματος λέγεται **επίλυση** του συστήματος.
Ένα σύστημα που έχει μια τουλάχιστον λύση λέγεται **συμβιβαστό**, ενώ ένα σύστημα που δεν έχει καμία λύση λέγεται **αδύνατο**.
Τέλος, δύο γραμμικά συστήματα που έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις λέγονται **ισοδύναμα**.

● Με τη βοήθεια των πινάκων το σύστημα (Σ_1) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2x - y + 3\omega \\ x + 3y - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Το 1ο μέλος όμως της ισότητας αυτής είναι το γινόμενο του 2×3 πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ των συντελεστών των αγνώστων με τον 3×1 πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}$ των αγνώστων. Επομένως το σύστημα (Σ_1) γράφεται

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, το $\mu\times\nu$ γραμμικό σύστημα (Σ_2) γράφεται

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}.$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με A τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, με X τον πίνακα-στήλη των αγνώστων και με B τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων, τότε το (Σ_2) γράφεται $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

Αν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι όλοι ίσοι με το μηδέν, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές** και σύντομα γράφεται $\boldsymbol{AX}=\mathbf{O}$.

Τέλος ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array}\right]$$

που αποτελείται από τον πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων, συμπληρωμένο με τη στήλη των σταθερών όρων λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο πίνακας αυτός παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συστήματος. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή στον επαυξημένο πίνακα προστίθεται απλώς για να ξεχωρίζει τη στήλη των σταθερών όρων.

1.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Αποδεικνύεται ότι, αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις επόμενες διαδικασίες, τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα:

— Εναλλαγή της θέσης δύο εξισώσεων

— Πολλαπλασιασμός των μελών μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

— Πρόσθεση των μελών μιας εξίσωσης (πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό) στα μέλη μιας άλλης.

Έτσι, όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα προσπαθούμε, εφαρμόζοντας τις προηγούμενες διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα του οποίου η λύση να είναι προφανής.

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζονται και πως συμβολίζονται οι τρεις αυτές διαδικασίες.

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 2x-y+5\omega=-3 \\ 3x+y+2\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης E_1 του (Σ_1) με -2 και τα προσθέτουμε στα αντίστοιχα μέλη της 2ης εξίσωσης E_2 του (Σ_1). Έτσι, απαλείφεται από την E_2 ο άγνωστος x.

$$E_2 \to E_2 - 2E_1 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 3x+y+2\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_2)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της E_1 του (Σ_2) με -3 και τα προσθέτουμε στα μέλη της E_3. Έτσι, απαλείφεται από την E_3 ο άγνωστος x.

$$E_3 \to E_3 - 3E_1 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ 3y+3\omega=-3 \\ 7y-\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_3)$$

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της E_2 του (Σ_3) με $\frac{1}{3}$. Έτσι, ο συντεστής του y γίνεται 1.

$$E_2 \to \frac{1}{3}E_2 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ 7y-\omega=1 \end{cases} \quad (\Sigma_4)$$

Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαδικασίες που παριστάνουμε πλέον μόνο συμβολικά:

$$E_3 \to E_3 - 7E_2 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ -8\omega=8 \end{cases} \quad (\Sigma_5)$$

$$E_3 \to -\frac{1}{8}E_3 \qquad \begin{cases} x-2y+\omega=0 \\ y+\omega=-1 \\ \omega=-1 \end{cases} \quad (\Sigma_6)$$

$$E_2 \to E_2 - E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y + \omega = 0 \\ \quad\;\; y \quad\;\; = 0 \\ \qquad\quad \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_7)$$

$$E_1 \to E_1 - E_3 \qquad \begin{cases} x - 2y \quad\;\; = 1 \\ \quad\;\; y \quad\;\; = 0 \\ \qquad\quad \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_8)$$

$$E_1 \to E_1 + 2E_2 \qquad \begin{cases} x \qquad\quad\; = 1 \\ \quad\;\; y \quad\;\; = 0 \\ \qquad\quad \omega = -1 \end{cases} \qquad (\Sigma_9)$$

Επειδή το σύστημα (Σ_9) είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (Σ_1), συμπεραίνουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(1, 0, -1)$.

Μπορούμε να περιγράψουμε απλούστερα τη διαδικασία επίλυσης ενός $\mu \times \nu$ γραμμικού συστήματος, αν σκεφτούμε ως εξής: Αφού κάθε εξίσωση παριστάνεται με μια γραμμή του επαυξημένου πίνακα, αρκεί οι παραπάνω μετατροπές των εξισώσεων να γίνονται στις γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_\mu$ του επαυξημένου πίνακα. Οι μετατροπές αυτές λέγονται **γραμμοπράξεις** και είναι οι εξής:

Γραμμοπράξη	**Συμβολισμός**
1. Εναλλαγή της θέσης δύο γραμμών	$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$
2. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό	$\Gamma_i \to \lambda\Gamma_i,\ \lambda \neq 0$
3. Πρόσθεση των στοιχείων μιας γραμμής, πολλαπλασιασμένων με έναν αριθμό, στα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής.	$\Gamma_i \to \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$

Όταν έχουμε δύο πίνακες A, B που ο ένας προκύπτει από τον άλλο με γραμμοπράξεις, τότε οι πίνακες αυτοί λέγονται **γραμμοϊσοδύναμοι** ή απλώς **ισοδύναμοι** και γράφουμε $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. Είναι προφανές ότι, αν οι επαυξημένοι πίνακες δύο συστημάτων είναι ισοδύναμοι, τότε και τα συστήματα είναι ισοδύναμα, αφού καθεμιά γραμμοπράξη ξεχωριστά οδηγεί σε σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό. Έτσι, η επίλυση του προηγούμενου συστήματος μπορεί να γίνει ως εξής:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 7\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to -\frac{1}{8}\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα $\begin{cases} x & = 1 \\ \quad y & = 0 \\ \qquad \omega & = -1 \end{cases}$.

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(1, 0, -1)$.

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας. Έτσι μπορούμε να "διαβάσουμε" αμέσως τη λύση του συστήματος.

Για να απλοποιήσουμε και να συντομεύσουμε ακόμη περισσότερο τη διαδικασία επίλυσης ενός συστήματος, πολλές φορές στο ίδιο βήμα εφαρμόζουμε περισσότερες από μία γραμμοπράξεις.

Ας λύσουμε τώρα και το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}.$$

Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{l}\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1\end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & -14 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 4\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to -\Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{l}\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 6\Gamma_3\end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 5\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 3 \\ x_4 & = -1 \\ x_5 & = 2 \end{cases}.$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς x_1 (αυτό μας διευκολύνει, αφού ο συντελεστής του αγνώστου αυτού είναι 1) και έχουμε

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}.$$

Επειδή ο άγνωστος x_1 εκφράζεται ως συνάρτηση των x_2, x_3, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε αυθαιρέτως τις τιμές των x_2, x_3. Δηλαδή, το γραμμικό σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τις διατεταγμένες πεντάδες $(3-2x_2+x_3, x_2, x_3, -1, 2)$, όπου οι x_2, x_3 μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές.

Π.χ. για $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ έχουμε τη λύση (1, 1, 0, −1, 2) του συστήματος.

Ο τελευταίος από τους παραπάνω ισοδύναμους επαυξημένους πίνακες είναι, όπως λέμε, ένας **ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας**. Γενικά, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός**(1), αν ισχύουν συγχρόνως τα παρακάτω:

α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές.

β) Το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1 και βρίσκεται δεξιότερα του αντίστοιχου 1 της προηγούμενης γραμμής.

γ) Το πρώτο από αριστερά 1 κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Έτσι π.χ. οι πίνακες

---

(1) Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας λέγεται, απλώς, **κλιμακωτός**, αν

α) Οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πριν από τις μηδενικές και

β) Το πρώτο από τα αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από το αντίστοιχο στοιχείο της προηγούμενης γραμμής, χωρίς να είναι κατανάγκη ίσο με 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

Σχετικά με τους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πίνακας μετατρέπεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα με την εκτέλεση ενός πεπερασμένου πλήθους γραμμοπράξεων.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτός ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι και μοναδικός.
Ο παρακάτω αλγόριθμος μας δίνει μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε κάθε φορά το μοναδικό αυτόν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΒΗΜΑ 1ο: Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.

ΒΗΜΑ 2ο: Μεταφέρουμε στον πίνακα πρώτη τη γραμμή που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (γραμμοπράξη 1).

ΒΗΜΑ 3ο: Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (γραμμοπράξη 2).

ΒΗΜΑ 4ο: Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα μηδενικά (γραμμοπράξη 3).

ΒΗΜΑ 5ο: Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6ο βήμα.

ΒΗΜΑ 6ο: Από γραμμή σε γραμμή χρησιμοποιώντας το πρώτο από αριστερά 1 κάθε γραμμής και τη γραμμοπράξη 3 κάνουμε μηδέν όλα τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται η μονάδα αυτή.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, που ονομάζεται και **αλγόριθμος του Gauss**, ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή του πίνακα το πρώτο από αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.
Έτσι για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τον αλγόριθμο του Gauss, μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακά του σε έναν ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.
Για παράδειγμα, ας λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}.$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

και έχουμε διαδοχικά:

$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3$ (βήμα 2ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1$
$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1$ (βήμα 4ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Αγνοούμε την 1η γραμμή (βήμα 5ο)
$\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3$ (βήμα 2ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right]$$

($\Gamma_2 \to \frac{1}{7}\Gamma_2$ βήμα 3ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -8 & -1 \end{array}\right]$$

$\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 7\Gamma_2$ (βήμα 4ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Αγνοούμε τη 2η γραμμή (βήμα 5ο)
$\Gamma_3 \to -\Gamma_3$ (βήμα 3ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3$
$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_3$ (βήμα 6ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2$ (βήμα 6ο)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός και αντιστοιχεί στο σύστημα
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

που είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = -1 + x_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής
$$(1+x_2, x_2, -1+x_4, x_4, 1), \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

- Ας λύσουμε τώρα και το σύστημα: $\begin{cases} x+2y-3z+\omega=1 \\ 2x-y+2z-\omega=1 \\ 4x+3y-4z+\omega=2 \end{cases}.$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{l}\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1\end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 5\Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Από την 3η γραμμή του τελευταίου πίνακα έχουμε ότι $0x+0y+0z+0\omega=-1$ ή $0=-1$, που σημαίνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Γενικά,

Αν κατά την επίλυση ενός συστήματος με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα παρουσιαστεί μια γραμμή της μορφής $0\ 0 \ldots 0 \mid \alpha$, με $\alpha \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα συστήματα που λύσαμε μέχρι τώρα, παρατηρούμε ότι, όσα από αυτά είναι συμβιβαστά, ή έχουν μία μοναδική λύση ή έχουν άπειρο πλήθος λύσεων. Δηλαδή, δεν εμφανίστηκε σύστημα που να έχει περισσότερες από μία αλλά πεπερασμένου πλήθους λύσεις. Αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει γενικά για τα γραμμικά συστήματα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x + y = 1 \\ x + \kappa y = 1, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \kappa & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ \kappa & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to -\Gamma_2 - \Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \kappa-1 & 0 \\ 0 & 1-\kappa & 1-\kappa \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \kappa-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\kappa \end{array}\right].$$

- Αν $\kappa \neq 1$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\kappa = 1$, τότε ο τελευταίος πίνακας γράφεται $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Επομένως, το σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$$

και έτσι έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(x, 1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 2x-3y+5\omega=1 \\ x-2y+\omega=-2 \end{cases}$ και ii) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y+6\omega=12 \\ y+3\omega=6 \end{cases}$

στη μορφή $AX=B$, όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

2. Να γράψετε τα γραμμικά συστήματα που περιγράφουν οι ισότητες:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Στη συνέχεια να γράψετε τους επαυξημένους πίνακες των συστημάτων αυτών.

3. Να λύσετε τα συστήματα που αντιστοιχούν στους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες:

i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$

iii) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

4. Με τον αλγόριθμο του Gauss να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 4x-y+3z=1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=-3. \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$

5. Ομοίως τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+z+2\omega=2 \\ 2x-y-z+\omega=1 \\ x+2y+2z-\omega=3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-y+2z-\omega=1 \\ x-2y+z+\omega=-1 \\ -2x+3y-3z=0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2x-y+3z-\omega=0 \\ x+y-2z+\omega=2 \\ 3x+z=0 \end{cases}$

6. Ομοίως τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-4y=4 \\ x-6y=-1 \\ 3x+14x=13 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-2y=1 \\ x-10y+4z=1 \end{cases}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 \\ \alpha x+2y-\gamma\omega=1 \\ 3x-\beta y+\gamma\omega=3 \end{cases}$ να έχει ως λύση την $(x,y,\omega)=(1,-1,1)$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, που διέρχεται από τα σημεία $(1,0)$, $(2,0)$ και $(-1,6)$.

3. Αν $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ και $\begin{cases} 2\text{ημ}\alpha+4\text{συν}\beta-\text{εφ}\gamma=2 \\ 4\text{ημ}\alpha-2\text{συν}\beta+\text{εφ}\gamma=3\sqrt{3}-1 \\ 2\text{ημ}\alpha+\text{συν}\beta-\text{εφ}\gamma=\frac{1}{2} \end{cases}$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

4. Αν $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ και $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ \omega \end{bmatrix}$, να λύσετε το γραμμικό σύστημα

$$AX=4X.$$

5. Αν $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, να βρείτε ολους τους πίνακες X για τους οποίους ισχύει:

$$AX=XA.$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+\omega=1 \\ x+2y+4\omega=\alpha \\ x+4y+10\omega=\alpha^2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x+y+\omega=6 \\ x+2y+3\omega=10 \\ x+2y+\lambda\omega=\mu \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+\kappa y=\kappa, \ \kappa\in\mathbb{R}. \\ 2x+(\kappa+1)y=3 \end{cases}$

1.7 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Εισαγωγή

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.
Όμως, όπως έχουμε δει στα γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους, είναι χρήσιμο να έχουμε και έναν τύπο, ο οποίος να εκφράζει τις λύσεις ενός γραμμικού συστήματος ως συνάρτηση των συντελεστών του.
Οι τύποι που θα βρούμε γενικεύουν τους τύπους που ήδη ξέρουμε για την περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος 2×2.
Θα προχωρήσουμε στην αναζήτηση ενός τέτοιου τύπου που τα εργαλεία για την ανεύρεσή του είναι οι **ορίζουσες**.

Ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα

Έστω ο 2×2 πίνακας $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}}$ λέγεται **ορίζουσα του πίνακα *A*** και συμβολίζεται με $|A|$ ή με $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$. Δηλαδή,

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{11} & \boldsymbol{\alpha}_{12} \\ \boldsymbol{\alpha}_{21} & \boldsymbol{\alpha}_{22} \end{vmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_{11}\boldsymbol{\alpha}_{22}-\boldsymbol{\alpha}_{21}\boldsymbol{\alpha}_{12}.$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 2×2 πίνακα, λέγεται **ορίζουσα 2ης τάξης**.
Για παράδειγμα, η ορίζουσα

— του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ είναι $|A|=3(-2)-(-1)2=-6+2=-4$

— του πίνακα $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι $|I|=1-0=1$

— του πίνακα $\mathbb{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι $|\mathbb{O}|=0$.

Ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ορίζεται με την βοήθεια της ορίζουσας 2ης τάξης ως εξής:

Έστω ο 3×3 πίνακας $A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$.

Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha}_{11}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{22} & \boldsymbol{\alpha}_{23} \\ \boldsymbol{\alpha}_{32} & \boldsymbol{\alpha}_{33} \end{vmatrix}-\boldsymbol{\alpha}_{12}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{21} & \boldsymbol{\alpha}_{23} \\ \boldsymbol{\alpha}_{31} & \boldsymbol{\alpha}_{33} \end{vmatrix}+\boldsymbol{\alpha}_{13}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{21} & \boldsymbol{\alpha}_{22} \\ \boldsymbol{\alpha}_{31} & \boldsymbol{\alpha}_{32} \end{vmatrix}$ λέγεται **ορίζουσα του πίνακα $\boldsymbol{A}$** και συμβολίζεται με $|\boldsymbol{A}|$ ή με $\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{11} & \boldsymbol{\alpha}_{12} & \boldsymbol{\alpha}_{13} \\ \boldsymbol{\alpha}_{21} & \boldsymbol{\alpha}_{22} & \boldsymbol{\alpha}_{23} \\ \boldsymbol{\alpha}_{31} & \boldsymbol{\alpha}_{32} & \boldsymbol{\alpha}_{33} \end{vmatrix}$.

Δηλαδή

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}=\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}-\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}+\alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Επειδή η ορίζουσα αυτή αντιστοιχεί σε έναν 3×3 πίνακα, λέγεται **ορίζουσα 3ης τάξης**.

Για παράδειγμα, αν $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, τότε

$$|A|=2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2(-6)+1(-3)+5(-1)=-20$$

Η παράσταση (1) με την οποία ορίζεται η $|A|$ λέγεται **ανάπτυγμα της $|\boldsymbol{A}|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής**.

Με εκτέλεση των πράξεων στο ανάπτυγμα αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{23})-\alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{23})+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{31}\alpha_{22}) \\ &= -\alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{13})+\alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})-\alpha_{23}(\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{31}) \\ &= -\alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}+\alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}-\alpha_{23}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \qquad (2) \end{aligned}$$

Η παράσταση (2) λέγεται **ανάπτυγμα της $|\boldsymbol{A}|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.**

Ομοίως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει και

$$|A| = \alpha_{31}\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix} - \alpha_{32}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix} + \alpha_{33}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}, \quad (3)$$

που λέγεται **ανάπτυγμα $|A|$ ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής.**

Παρατηρούμε ότι σε καθένα από τα αναπτύγματα της $|A|$, κάθε στοιχείο α_{ij} της αντίστοιχης γραμμής πολλαπλασιάζεται με την ορίζουσα 2ης τάξης του πίνακα που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}. Η ορίζουσα αυτή λέγεται **ελλάσων ορίζουσα του στοιχείου α_{ij}** και συμβολίζεται με M_{ij}.

Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε όρος ενός αναπτύγματος της $|A|$ έχει πρόσημο + ή –, ίδιο με το πρόσημο του $(-1)^{i+j}$. Το γινόμενο $(-1)^{i+j}M_{ij}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij}** και συμβολίζεται με A_{ij}.

Δηλαδή

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς τα αναπτύγματα (1), (2) και (3) γράφονται:

$$|A| = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{13}A_{13}$$

$$|A| = \alpha_{21}A_{21} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{23}A_{23}$$

$$|A| = \alpha_{31}A_{31} + \alpha_{32}A_{32} + \alpha_{33}A_{33}.$$

Με εκτέλεση των πράξεων προκύπτουν

$$|A| = \alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} + \alpha_{31}A_{31}$$

$$|A| = \alpha_{12}A_{12} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{32}A_{32}$$

$$|A| = \alpha_{13}A_{13} + \alpha_{23}A_{23} + \alpha_{33}A_{33}$$

που είναι ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς τα στοιχεία της 1ης, της 2ης και της 3ης στήλης αντιστοίχως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην πράξη το ανάπτυγμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας είναι ως προς τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, τότε

$$|A| = 0\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -(3-4) = 1.$$

Ορίζουσα ενός $\nu \times \nu$ πίνακα

Ορίσαμε μέχρι τώρα την ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα και με τη βοήθειά της την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Ορίζουμε επίσης ως ορίζουσα ενός πίνακα με ένα στοιχείο $[\alpha_{11}]$, να είναι το ίδιο το στοιχείο.

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσα ν τάξης $\nu \geq 3$ με τη βοήθεια του ορισμού της ορίζουσας $\nu-1$ τάξης. Ένας τέτοιος ορισμός λέγεται ***επαγωγικός***.

Συγκεκριμένα, έστω ο $\nu\times\nu$ πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix}.$$

Ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $|A|$ ή

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{vmatrix}$$

τον αριθμό

$$\boxed{|A|=\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\cdots+\alpha_{1\nu}A_{1\nu}}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij}, η $(\nu-1)$ τάξης ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A, αν παραλείψουμε τη γραμμή και τη στήλη του στοιχείου α_{ij}.

Όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, η ορίζουσα M_{ij} λέγεται **ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$** και το γινόμενο $(-1)^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}$ λέγεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$.**

Η παράσταση $\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\cdots+\alpha_{1\nu}A_{1\nu}$ με την οποία ορίσαμε την $|A|$ λέγεται, όπως και στις ορίζουσες 3ης τάξης, **ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής**.

Αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για οποιαδήποτε γραμμή i ή στήλη j ενός $\nu\times\nu$ πίνακα A ισχύει:

(α) $|A|=\alpha_{i1}A_{i1}+\alpha_{i2}A_{i2}+\cdots+\alpha_{i\nu}A_{i\nu}$ και

(β) $|A|=\alpha_{1j}A_{1j}+\alpha_{2j}A_{2j}+\cdots+\alpha_{\nu j}A_{\nu j}$

Η παράσταση (α) λέγεται **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς τα στοιχεία της i γραμμής, ενώ η (β) **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς τα στοιχεία της j στήλης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Είναι φανερό ότι αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης ενός πίνακα A είναι όλα μηδέν, τότε $|A|=0$.
2) Αν ένας πίνακας είναι τριγωνικός άνω ή κάτω, τότε αποδεικνύεται ότι η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. Για παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ln 3 \\ 0 & -3 & \kappa^5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1(-3)\frac{1}{3} = -1 .$$

3) Αποδεικνύεται επίσης ότι, αν δύο γραμμές (δύο στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με μηδέν.
Για παράδειγμα,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 10 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0 ,$$

αφού $\Gamma_2 = 3\Gamma_1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της 2ης στήλης της ορίζουσας των πινάκων

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **ii)** $B = \begin{bmatrix} 4\eta\mu^2\alpha & 0 & -\sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha & 0 & \sigma\upsilon\nu^2\alpha \end{bmatrix}$

και στη συνέχεια να υπολογισθούν οι $|A|$, $|B|$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(-2-6)=8$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1+3=4$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-(2-2)=0\,.$$

Επομένως, $|A|=2A_{12}+0A_{22}+1A_{32}=2\cdot 8+0\cdot 4+1\cdot 0=16$.

ii) Έχουμε

$$B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ \text{συν}2\alpha & \text{συν}^2\alpha\end{vmatrix}=0$$

$$B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4\text{ημ}^2\alpha & -\text{συν}2\alpha\\ \text{συν}2\alpha & \text{συν}^2\alpha\end{vmatrix}=4\text{ημ}^2\alpha\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2 2\alpha$$

$$=(2\text{ημ}\alpha\text{συν}\alpha)^2+\text{συν}^2 2\alpha=\text{ημ}^2 2\alpha+\text{συν}^2 2\alpha=1$$

$$B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4\text{ημ}^2\alpha & -\text{συν}2\alpha\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Επομένως

$$|B|=0\cdot B_{12}+1B_{22}+0\cdot B_{32}=1\,.$$

Επίλυση $\nu\times\nu$ γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Cramer

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, ένα γραμμικό $\mu\times\nu$ σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση ή άπειρο πλήθος λύσεων ή να είναι αδύνατο. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα είναι $\nu\times\nu$, το επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μας πληροφορεί πότε το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση και πότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων ή είναι αδύνατο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω το $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα $AX=B$.

- Αν $|A|\neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1,x_2,\dots,x_\nu)$ με
$$x_1=\frac{Dx_1}{D},x_2=\frac{Dx_2}{D},\dots,x_\nu=\frac{Dx_\nu}{D}$$
όπου D είναι η ορίζουσα $|A|$ των συντελεστών των αγνώστων και Dx_i, $i=1,2,3,\dots,\nu$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσουμε την i στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.
- Αν $|A|=0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{O}$,

- έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν $|\mathbf{A}| \neq 0$.
- έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος), αν και μόνο αν $|A| = 0$.

ΣΧΟΛΙΑ

1) Ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ με $|A| \neq 0$, λέγεται και **σύστημα Cramer**, η δε επίλυση του συστήματος αυτού αναφέρεται και ως **κανόνας του Cramer**. Ο κανόνας του Cramer δεν είναι αποδοτική μέθοδος για να χρησιμοποιηθεί στη λύση συστημάτων με ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, γιατί πρέπει να υπολογιστούν πολλές ορίζουσες μεγάλης τάξης. Γιαυτό στη συνέχεια με τον κανόνα αυτόν θα επιλύουμε μόνο $\mathbf{2 \times 2}$ και $\mathbf{3 \times 3}$ γραμμικά συστήματα.

   Ως προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς η μέθοδος επίλυσης συστήματος με τον αλγόριθμο του Gauss υπερτερεί του κανόνα του Cramer. Όμως, ο κανόνας του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε θεωρητικά ζητήματα.

2) Για την επίλυση ενός $\nu \times \nu$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ με $|A| = 0$ εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

3) Αν ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα είναι ομογενές, τότε $Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_\nu = 0$, αφού όλες οι ορίζουσες έχουν μια μηδενική στήλη.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x \qquad\quad - \omega = 1 \\ 2x + y - \omega = 1 \\ x + 2y + 5\omega = 2 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, $\quad Dx = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -7 \quad \text{και} \quad D\omega = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, είναι

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{7}{4}, \qquad y=\frac{Dx}{D}=-\frac{7}{4}, \qquad \omega=\frac{D\omega}{D}=\frac{3}{4}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(\frac{7}{4},-\frac{7}{4},\frac{3}{4}\right)$.

2. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x & +y & -\omega & = & 1 \\ x & +\lambda y & -\omega & = & 1. \\ -x & +y & +\lambda\omega & = & 1 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2+1)-1(\lambda-1)-1(1+\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$Dx=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda^2+1)-1(\lambda+1)-1(1-\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$Dy=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)-(\lambda-1)-1(1+1)=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$D\omega=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)-(1+1)+1(1+\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα $D=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$ είναι οι $0,-1,1$.

— Για $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -1$ και $\lambda\neq 1$ είναι $D\neq 0$ και επομένως

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{1}{\lambda}, \qquad y=\frac{Dy}{D}=\frac{1}{\lambda} \qquad \text{και} \qquad \omega=\frac{D\omega}{D}=\frac{1}{\lambda}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$.

— Για $\lambda=0$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} \quad y-\omega=1 \\ x \quad -\omega=1 \\ -x+y \quad =1 \end{cases}$. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε το σύστημα $\begin{cases} y-\omega=1 \\ x-\omega=1 \\ y-\omega=2 \end{cases}$, το οποίο προφανώς είναι αδύνατο.

— Για $\lambda=1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x+y-\omega=1 \\ x+y-\omega=1 \\ -x+y+\omega=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\omega=1 \\ -x+y+\omega=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\omega=1 \\ 2y \quad\quad =2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{προσθέσαμε κατά} \\ \text{μέλη τις εξισώσεις}\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\omega \\ y=1 \end{cases}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(\omega, 1, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

— Για $\lambda=-1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x+y-\omega=1 \\ x-y-\omega=1 \\ -x+y-\omega=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-\omega=1 \\ x-y-\omega=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \ -\omega=1 \\ \quad\quad -2\omega=2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{προσθέσαμε κατά} \\ \text{μέλη τις εξισώσεις}\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y \ = \ 0 \\ \quad\quad \omega=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \omega=-1 \end{cases}.$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(y, y, -1)$, $y \in \mathbb{R}$.

3. Να λυθεί το ομογενές σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y + \omega=0 \\ x+\lambda y + \omega=0 \\ x + y+\lambda\omega=0 \end{cases}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-1)-(\lambda-1)+(1-\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την ορίζουσα D είναι οι 1 και -2.

— Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -2$ είναι $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική $(0, 0, 0)$.

— Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+y+\omega=0 \\ x+y+\omega=0 \\ x+y+\omega=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+\omega=0$

και έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(-y-\omega, y, \omega), y, \omega \in \mathbb{R}$.

— Για $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x+y+\omega=0 \\ x-2y+\omega=0 \\ x+y-2\omega=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+\omega=0 \\ 3x-3y=0 \\ 3x-3\omega=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l}\text{αφαιρέσαμε την πρώτη εξίσωση} \\ \text{από τις άλλες δύο}\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \omega=x \end{cases}.$$

΄Αρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x, x), $x \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες

i) $\begin{vmatrix} 30 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix}$, ii) $\begin{vmatrix} e^2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^3 & e & 8 \end{vmatrix}$, iii) $\begin{vmatrix} \eta\mu\theta & 2 & -\sigma\upsilon\nu\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma\upsilon\nu\theta & 2 & \eta\mu\theta \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 0 \end{vmatrix}$, v) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \log 5 \\ -1 & 0 & \log 2 \end{vmatrix}$, vi) $\begin{vmatrix} e & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ e^2 & 0 & e \end{vmatrix}$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & 1 & x \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

iii) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & x & 3 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ iv) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \etaμx & 1 & -1 \\ \etaμ^2 x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ -x + 3y = -7 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x + 4y + 4\omega = 11 \\ 4x - 4y + 6\omega = 11 \\ 6x - 6y = 3 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 2\etaμx + συνx = 1 \\ 3\etaμx + 2συνx = 2 \end{cases}$, $x \in [0, 2\pi)$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα έχουν και μη μηδενικές λύσεις.

i) $\begin{cases} (2-\kappa)x + y = 0 \\ -x - \kappa y + \omega = 0 \\ x + 3y + (1-\kappa)\omega = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \kappa x + y + \omega = 0 \\ x + \kappa y + \omega = 0 \\ x + y + \kappa\omega = 0 \end{cases}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ \kappa x + \kappa y + \omega = \kappa + 1 \\ \kappa x + 2y + 2\omega = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \lambda x + y - \omega = 1 \\ \lambda x + y + \lambda\omega = \lambda - 1 \\ 3x + 3y + \lambda\omega = 1 \end{cases}$.

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \lambda(y + \omega) = 0 \\ \lambda x + 2y = \omega \\ \lambda x + y + \omega = 0 \end{cases}.$$

3. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών

i) $\begin{cases} \varepsilon_1: x + 2y = -1 \\ \varepsilon_2: 2x + y = 1 \\ \varepsilon_3: 3x - 2y = 5 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \varepsilon_1: x + 2y = 5 \\ \varepsilon_2: 2x + 5y = 1 \\ \varepsilon_3: -x + 3y = 5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \varepsilon_1: 2x + y = 0 \\ \varepsilon_2: 4x + 2y = 3 \\ \varepsilon_3: x + y = 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \varepsilon_1: 3x + 9y = 1 \\ \varepsilon_2: x + 3y = 0 \\ \varepsilon_3: 2x + 6y = 5 \end{cases}$.

4. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ και το σύστημα

$$\begin{cases} x \quad +y+z=0 \\ \beta x+2\alpha y \quad =0 \\ 2\gamma x \ +\beta y \quad =0 \end{cases}.$$

i) Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

ii) Αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, να εξετάσετε πόσες λύσεις έχει το σύστημα.

5. Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ υπάρχουν $x,y,\omega\in\mathbb{R}$, που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$x=\gamma y+\beta\omega,\qquad y=\alpha\omega+\gamma x\qquad \text{και}\qquad \omega=\beta x+\alpha y$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1.$$

6. **Να λύσετε τα συστήματα:**

i) $\begin{cases} (\lambda+1)x \quad +y= \ \lambda+1 \\ \quad x+(\lambda+1)y= \quad 1, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \\ \quad x \quad +y=2\lambda+1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x-y+\lambda=0 \\ \lambda x+y+5=0 \\ x-y-\lambda=0 \end{cases}.$

7. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ τέτοιος, ώστε $AX=\lambda X$ (1).

ii) Για τις τιμές του λ που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση (1).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A(x)=\begin{bmatrix}\text{συν}x & -\text{ημ}x\\ \text{ημ}x & \text{συν}x\end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι

i) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$

ii) $[A(x)]^{-1}=A(-x)$

iii) $[A(x)]^{\nu}=A(\nu x)$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^{*}$.

2. Δίνεται ο πίνακας $M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

i) Να αποδείξετε ότι $M^{3}=\mathbb{O}$ και γενικά $M^{\nu}=\mathbb{O}$ για κάθε $\nu\geq 3$.

ii) Αν $A=\alpha M^{2}+\alpha M+I$ και $B=\alpha(\alpha-1)M^{2}-\alpha M+I$, $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε το γινόμενο AB και να αποδείξετε ότι $B^{-1}=A$.

3. Αν $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ και $J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ τότε να αποδείξετε ότι:

i) $J^{2}=-I$

ii) Το άθροισμα και το γινόμενο πινάκων της μορφής $\alpha I+\beta J$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί είναι επίσης πίνακες της ίδιας μορφής.

iii) Ο πίνακας $\alpha I+\beta J$ έχει αντίστροφο, αν και μόνο αν $\alpha^{2}+\beta^{2}\neq 0$.

4. Να αποδείξετε ότι η συμμετρία ως προς άξονα την ευθεία ε του διπλανού σχήματος είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}\text{συν}2\varphi & \text{ημ}2\varphi\\ \text{ημ}2\varphi & -\text{συν}2\varphi\end{bmatrix}.$$

Μπορείτε από τον πίνακα A να βρείτε τους πίνακες των συμμετριών ως προς τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$, την ευθεία $y=x$ και την ευθεία $y=-x$;

5. Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T:\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\quad \text{με}\quad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι ο T είναι συνάρτηση "1-1".

ii) Να βρείτε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού T.

iii) Να βρείτε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των συμμετριών της στροφής και της ομοιοθεσίας.

6. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x \quad + y + z = 0 \\ \alpha x \quad + \beta y \quad = 0, \\ \alpha^2 x + \beta^2 y \quad = 0 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

7. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in [0, \pi)$ το σύστημα:

$$\begin{cases} x \qquad + y + \omega = 0 \\ (\eta\mu\alpha)x \ + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y + \omega = 0 \\ (\eta\mu^2\alpha)x + (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)y + \omega = 0 \end{cases}.$$

8. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ τις σχετικές θέσεις των ευθειών

$$\varepsilon_1 : x + y = 1, \qquad \varepsilon_2 : x + y = \kappa \qquad \varepsilon_3 : \kappa x + y = 1.$$

9. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + y \ + \omega = 0 \\ \qquad \lambda y \ - \omega = 0, \\ \qquad y + \lambda\omega = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

10. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -\alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$. Αν υπάρχουν μη μηδενικός πίνακας $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ και πραγματικός αριθμός λ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $AX = \lambda X$, να αποδείξετε ότι $-2 \le \alpha \le 2$.

11. i) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5\lambda + 4 \\ x + 2y = 3\lambda + 2 \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι εξισώσεις:

$$2t^2 + 3t - (5\lambda + 4) = 0$$

$$t^2 + 2t - (3\lambda + 2) = 0$$

έχουν κοινή ρίζα. Ποια είναι η κοινή ρίζα σε κάθε μια περίπτωση;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $(\lambda^2+1)A=\mathbb{O}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $A=\mathbb{O}$. Α Ψ

2. Αν $(\lambda^2-4)A=\mathbb{O}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε κατ' ανάγκη είναι $A=\mathbb{O}$. Α Ψ

3. Αν $(\lambda^2+\lambda+1)(A-B)=\mathbb{O}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $A=B$. Α Ψ

4. Αν $AB=2I$, όπου A,B τετραγωνικοί πίνακες, τότε οι A,B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες. Α Ψ

5. Αν $AB=2I$, όπου A,B τετραγωνικοί πίνακες, τότε $BA=2I$. Α Ψ

6. Αν $(A-I)^2=\mathbb{O}$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A=I$. Α Ψ

7. Αν $A^2=I$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$$A=I \text{ ή } A=-I.$$ Α Ψ

8. Αν $A^2=\mathbb{O}$ τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Α Ψ

9. Ισχύει πάντοτε $(AB)^2=A^2B^2$. Α Ψ

10. Αν $AX=BX$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $A=B$. Α Ψ

11. Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$. Α Ψ

12. Τα συστήματα

$$\begin{cases}x+y+2z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+3y+5z=-1\end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases}x+y+z=0\\ y+z=0\\ y+2z=-1\end{cases}$$

είναι ισοδύναμα. Α Ψ

13. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες λύσεις. Α Ψ

14. Ένα ομογενές σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο. Α Ψ

15. Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y=0 \\ x+\ \ \lambda y\ \ =0 \end{cases}$ έχει και μη μηδενικές λύσεις. Α Ψ

16. Αν η εξίσωση $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, τότε το σύστημα $\begin{cases} \beta x+2\gamma y=\alpha \\ 2\alpha x+\beta y=\beta \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. Α Ψ

17. Το σύστημα $\begin{cases} x+\ y=0 \\ x+\kappa y=2 \\ \kappa x+\ y=\kappa \end{cases}$, $\kappa\neq -2$, είναι αδύνατο. Α Ψ

18. Έστω (Σ) ένα 3×3 γραμμικό σύστημα.

i) Αν $|D_x|+|D_y|+|D_z|>0$, τότε το σύστημα είναι ομογενές. Α Ψ

ii) Αν $D_x^2+(D_y-1)^2+D_z^2=0$, τότε το σύστημα είναι ομογενές. Α Ψ

ΙΙ.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \lambda^2-4\lambda+4 & 0 \\ 0 & \lambda^2-3\lambda+3 \end{bmatrix}$ είναι ο μοναδιαίος, αν

Α) $\lambda=2$, Β) $\lambda=0$, Γ) $\lambda=1$, Δ) $\lambda=3$.

2. Έστω A ένας $2\times\nu$ πίνακας. Αν υπάρχει πίνακας X τέτοιος, ώστε $AX=XA$, τότε ο X είναι τύπου

Α) 2×2, Β) 2×3, Γ) 3×2, Δ) 3×3.

3. Έστω A ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $\kappa\neq 0$. Ο αντίστροφος του πίνακα κA είναι ο πίνακας

Α) $\frac{1}{\kappa}A$, Β) κA^{-1}, Γ) $\frac{1}{\kappa}A^{-1}$, Δ) $-\kappa A^{-1}$.

4. Το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, αν

Α) $\lambda = 0$, Β) $\lambda = 1$, Γ) $\lambda = -1$, Δ) $\lambda \neq 0, -1, 1$.

5. Οι ευθείες

$\sqrt{2}x + y = 1$, $2x + \sqrt{2}y = 2$, $x + \sqrt{2}y = \sqrt{2}$.

Α) Περνούν από το ίδιο σημείο.

Β) Σχηματίζουν τρίγωνο.

Γ) Είναι παράλληλες ανά δύο.

Δ) Οι δύο είναι παράλληλες και η τρίτη τις τέμνει.

Ε) Οι δύο συμπίπτουν και η τρίτη τις τέμνει.

III.

Να αντιστοιχίσετε κάθε μετασχηματισμό της πρώτης στήλης στον πίνακά του της δεύτερης στήλης

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ	ΠΙΝΑΚΑΣ
1. Στροφή κατά γωνία 90° και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.	α. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	β. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. Συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.	γ. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	δ. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
3. Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.	ε. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι "γραμμοπράξεις" σ' ένα κινέζικο πρόβλημα του 3ου αιώνα π.Χ.

Το επόμενο πρόβλημα προέρχεται από μια αρχαία κινεζική συλλογή προβλημάτων με τίτλο "Εννέα κεφάλαια στη μαθηματική τέχνη". Η λύση που δίνεται εκεί συμπίπτει ουσιαστικά με τη σύγχρονη μέθοδο του "επαυξημένου πίνακα" και των "γραμμοπράξεων".

3 δεμάτια μιας καλής συγκομιδής, 2 δεμάτια μιας μέτριας συγκομιδής και 1 δεμάτι μιας κακής συγκομιδής δίνουν 39 dou σιτάρι.
2 δεμάτια της καλής, 3 δεμάτια της μέτριας και 1 δεμάτι της κακής συγκομιδής δίνουν 34 dou σιτάρι.
1 δεμάτι της καλής, 2 δεμάτια της μέτριας και 3 δεμάτια της κακής συγκομιδής δίνουν 26 dou σιτάρι.
Να βρεθεί πόσο σιτάρι δίνει ένα δεμάτι από κάθε είδος συγκομιδής.

Το πρόβλημα αυτό ανάγεται σήμερα στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x, y, z:

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & +z & = & 39 \\ 2x & +3y & +z & = & 34. \\ x & +2y & +3z & = & 26 \end{array}$$

Στο αρχαίο κείμενο, στο οποίο δεν υπάρχουν καθόλου σύμβολα, δίνονται οδηγίες για την τοποθέτηση των αριθμών στις κατακόρυφες στήλες ενός άβακα σύμφωνα με τον εξής τρόπο:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Η παραπάνω διάταξη μετασχηματίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Η 2η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 3 και κατόπιν αφαιρείται απ' αυτήν 2 φορές η 3η στήλη, με αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Κατόπιν η 1η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 3 και απ' αυτήν αφαιρείται η 3η στήλη, με αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Τέλος, η 1η στήλη πολλαπλασιάζεται επί 5 και απ' αυτήν αφαιρείται 4 φορές η 2η στήλη, με αποτέλεσμα

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Το αρχικό σύστημα έχει λοιπόν μετασχηματιστεί στο

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 5y + z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

από το οποίο υπολογίζεται αμέσως ο z και με διαδοχικές αντικαταστάσεις, οι x, y. Στο αρχαίο κείμενο, με μια ανάλογη διαδικασία που εκτελείται πάνω στον άβακα, προσδιορίζεται η λύση του προβλήματος:

1 δεμάτι της κακής συγκομιδής δίνει $2\frac{3}{4}$dou σιτάρι

1 δεμάτι της μέτριας συγκομιδής δίνει $4\frac{1}{4}$dou σιτάρι

1 δεμάτι της καλής συγκομιδής δίνει $9\frac{1}{4}$dou σιτάρι.

Στο έργο "Αριθμητικά", του Έλληνα μαθηματικού της Αλεξανδρινής περιόδου Διόφαντου, υπάρχουν πολλά προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στο επόμενο, που είναι το πρόβλημα 19 του πρώτου βιβλίου, ο τρόπος επίλυσης βρίσκεται πολύ κοντά προς το σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο σκέψης:

Ευρείν τέσσαρας αριθμούς όπως οι τρεις λαμβανόμενοι του λοιπού υπερέχωσιν επιταχθέντι αριθμώ. (Να βρεθούν 4 αριθμοί έτσι ώστε λαμβανόμενοι ανά τρεις να ξεπερνούν τον άλλο κατά δοθέντα αριθμό).

Ο Διόφαντος παρουσιάζει τη λύση του προβλήματος μέσα από μια ειδική περίπτωση (που γενικεύεται άμεσα). Έστω, γράφει, ότι οι α, β, γ ξεπερνούν τον δ κατά 20, οι β, γ, δ ξεπερνούν τον α κατά 30, οι γ, δ, α ξεπερνούν τον β κατά 40 και οι δ, α, β ξεπερνούν τον γ κατά 50. Το πρόβλημα, όπως είναι φανερό, ανάγεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\alpha+\beta+\gamma=\delta+20$$
$$\beta+\gamma+\delta=\alpha+30$$
$$\gamma+\delta+\alpha=\beta+40$$
$$\delta+\alpha+\beta=\gamma+50$$

Ο Διόφαντος, ο οποίος δε χρησιμοποιεί ειδικά σύμβολα για την πρόσθεση και την ισότητα, λύνει το πρόβλημα με την εισαγωγή ενός βοηθητικού αγνώστου, που εκφράζει το άθροισμα των 4 ζητούμενων αριθμών. Η μέθοδός του, με σύγχρονο συμβολισμό, συνοψίζεται ως εξής:
Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2x$, τότε από την $\alpha+\beta+\gamma=\delta+20$ έχουμε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\delta+20$ ή $2x=2\delta+20$ ή $\delta=x-10$. Όμοια, από τις άλλες εξισώσεις παίρνουμε $\alpha=x-15$, $\beta=x-20$ και $\gamma=x-25$. Από τις 4 τελευταίες ισότητες, με πρόσθεση παίρνουμε $\alpha+\beta+\gamma+\delta=4x-70$ ή $2x=4x-70$ ή $x=35$ και άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$\alpha=35-15=20,\quad \beta=35-20=15,\quad \gamma=35-25=10,\quad \delta=35-10=25$$

Η πρώτη εμφάνιση μιας "ορίζουσας" σε πρόβλημα απαλοιφής

Ο G.W. Leibniz, σε μια επιστολή του προς τον l' Hospital στις 28-4-1693, πρότεινε μια μέθοδο χρησιμοποίησης των αριθμών για την έκφραση γενικών σχέσεων, όπως ακριβώς γίνεται με τη χρήση των γραμμάτων. Ως παράδειγμα έδωσε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους, γραμμένο στη μορφή:

$$\begin{aligned}10+11x+12y&=0\\20+21x+22y&=0\\30+31x+32y&=0\end{aligned}\qquad(1)$$

Οι συντελεστές του συστήματος δεν εκφράζουν εδώ αριθμούς αλλά λειτουργούν όπως και οι διπλοί δείκτες που χρησιμοποιούνται σήμερα για την παράσταση των στοιχείων ενός πίνακα. Αυτοί οι "ψευδοαριθμοί" (όπως τους αποκαλεί ο Leibniz) δείχνουν με το πρώτο ψηφίο τους την εξίσωση στην οποία βρίσκονται και με το δεύτερο, το γράμμα στο οποίο ανήκουν. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ο Leibniz απαλείφει τον άγνωστο y, αρχικά από την 1η και 2η εξίσωση και κατόπιν από την 1η και 3η. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$10.22+11.22x-12.20-12.21x=0$$
$$10.32+11.32x-12.30-12.31x=0$$

Στη συνέχεια απαλείφει το x από τις δυο τελευταίες εξισώσεις (λύνοντας καθεμιά ως προς x και εξισώνοντας τα αποτελέσματα) και φτάνει στην ισότητα:

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31=10.22.31+11.20.32+12.21.30$$

ή

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31-10.22.31-11.20.32-12.21.30=0\,.$$

Δηλαδή σ' αυτό που σήμερα αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση το σύστημα (1) (ο μηδενισμός της ορίζουσας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος).
Το προηγούμενο αποτέλεσμα του Leibniz έχει κυρίως τη σημασία της **απαλείφουσας** ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή της σχέσης μεταξύ των συντελεστών η οποία προκύπτει όταν γίνεται απαλοιφή όλων των αγνώστων. Στην ίδια επιστολή ο Leibniz δίνει και ένα γενικό κανόνα για τον υπολογισμό της απαλείφουσας ενός οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος, που έχει επαρκή αριθμό εξισώσεων για την απαλοιφή όλων των αγνώστων.

Οι ορίζουσες και οι πίνακες ως ανεξάρτητες έννοιες

Η χρησιμοποίηση των οριζουσών για την επίλυση γραμμικών συστημάτων έγινε πρώτη φορά από τον C. MacLaurin το 1729, αλλά η μέθοδος αυτή έμεινε γνωστή με το όνομα του G. Cramer, ο οποίος την παρουσίασε στο βιβλίο του "Εισαγωγή στην ανάλυση των αλγεβρικών καμπύλων γραμμών" (1750). Θέλοντας να προσδιορίσει μια καμπύλη που διέρχεται από 5 γνωστά σημεία και έχει εξίσωση της μορφής

$$A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$$

ο Cramer καταλήγει σ' ένα γραμμικό σύστημα 5 εξισώσεων με αγνώστους τα A,B,C,D,E. Για να λύσει αυτό το σύστημα, περιγράφει μια μέθοδο υπολογισμού των αγνώστων με κατασκευή κλασμάτων, των οποίων ο κοινός παρονομαστής και οι αριθμητές προσδιορίζονται από τους συντελεστές του συστήματος σύμφωνα με γενικούς κανόνες. Αυτή είναι ουσιαστικά η σημερινή μέθοδος των οριζουσών αλλά ο Cramer δε χρησιμοποιεί κάποιο ειδικό όνομα ή σύμβολο για την έννοια της ορίζουσας.
Ο λατινικός όρος **determinantem** (ορίζουσα) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον C.F. Gauss το 1801 αλλά όχι με τη σημερινή σημασία.
Η πρώτη συστηματική διαπραγμάτευση της θεωρίας των οριζουσών έγινε από τον A.L. Cauchy σε μια εργασία του που δημοσιεύτηκε το 1815. Η λέξη "ορίζουσα" χρησιμοποιείται εκεί με τη σημερινή σημασία ενώ εισάγεται και η τετραγωνική διάταξη των στοιχείων της με τη βοήθεια των διπλών δεικτών:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\alpha_{nn} \end{matrix}$$

(οι 2 κάθετες γραμμές για το συμβολισμό μιας ορίζουσας, χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά από τον A. Cayley το 1841).

Σε αντίθεση από τη σημερινή λογική σειρά παρουσίασης, η έννοια του πίνακα υπήρξε, ιστορικά, μεταγενέστερη από την έννοια της ορίζουσας.

Το γεγονός ότι η ορίζουσα δεν είναι μόνο ένας αριθμός αλλά συσχετίζει αυτόν τον αριθμό με μια τετραγωνική διάταξη στοιχείων, οδήγησε βαθμιαία στη μελέτη αυτής της ίδιας της διάταξης, ανεξάρτητα από την τιμή της ορίζουσας. Ο όρος **matrix** (μήτρα, καλούπι), που σήμερα χρησιμοποιείται διεθνώς για την έννοια του πίνακα, πρωτοεμφανίστηκε σε μια εργασία του J.J. Sylvester το 1850, για να διαχωριστεί η έννοια της ορίζουσας από την τετραγωνική διάταξη των στοιχείων που την παράγει. Το 1855 ο A. Cayley εισήγαγε για πρώτη φορά τους πίνακες στη μελέτη των γραμμικών μετασχηματισμών, ενώ το 1858 στην εργασία του "Μια πραγματεία στη θεωρία των μητρών", ανέπτυξε συστηματικά όλη τη βασική θεωρία. Όπως γράφει ο Cayley, στην ιδεά του πίνακα έφτασε τόσο από την έννοια της ορίζουσας όσο και από την ανάγκη ενός βολικού τρόπου έκφρασης των εξισώσεων $x'=\alpha x+by$, $y'=cx+dy$ ενός μετασχηματισμού, ο οποίος απεικονίζει το σημείο (x,y) στο σημείο (x',y'). Ως ένα τέτοιο τρόπο έκφρασης, ο Cayley εισάγει τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

και με βάση τις ιδιότητες των μετασχηματισμών ορίζει τις πράξεις των πινάκων και προσδιορίζει τις ιδιότητές τους. Π.χ., αν τον προηγούμενο μετασχηματισμό από το (x,y) στο (x',y') ακολουθήσει ένας νέος μετασχηματισμός από το (x',y') στο (x'',y'') και με εξισώσεις $x''=ex'+fy', y''=gx'+hy'$ τότε, όπως εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, ισχύει:

$$x''=(e\alpha+fc)x+(eb+fd)y$$

$$y''=(g\alpha+hc)x+(gb+hd)y\,.$$

Έτσι ο Cayley ορίζει τον πολλαπλασιασμό πινάκων, με βάση το πρότυπο της διαδοχικής εκτέλεσης των δυο μετασχηματισμών, ως εξής:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e\alpha+fc & eb+fd \\ g\alpha+hc & gb+hd \end{pmatrix}.$$

Στην ίδια εργασία επισημαίνει επίσης ότι αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι μια πράξη **μη αντιμεταθετική** καθώς και το γεγονός ότι υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες που έχουν ως γινόμενο το μηδενικό πίνακα.
Ο λογισμός των πινάκων αναπτύχθηκε τα επόμενα χρόνια σε μια αυτοτελή μαθηματική θεωρία, που αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου κλάδου των Μαθηματικών, της Γραμμικής Άλγεβρας. Το 1925, ο W. Heisenberg (βραβείο Νόμπελ Φυσικής 1932) χρησιμοποίησε τη θεωρία των πινάκων για να εκφράσει τα μη αντιμεταθετικά Μαθηματικά που περιγράφουν τα φαινόμενα της κβαντικής μηχανικής, ενώ αργότερα η χρήση των πινάκων επεκτάθηκε και σε άλλες επιστήμες.