6.5 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα συναρτήσεων με άπειρα όρια ολοκλήρωσης ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους** της $f(x)$.

Έστω ότι η $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση συνεχής

α) στο διάστημα $[a,\infty)$ τότε

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

β) στο διάστημα $(-\infty,a]$ τότε

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$$

γ) στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ τότε

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

όπου c τυχών πραγματικός αριθμός.

Αν το όριο (ή και τα δύο όρια στην περίπτωση γ) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή **συγκλίνει**. Αν το όριο δεν υπάρχει ή απειρίζεται τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Παραδείγματα

α)

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln(b)=+\infty$$

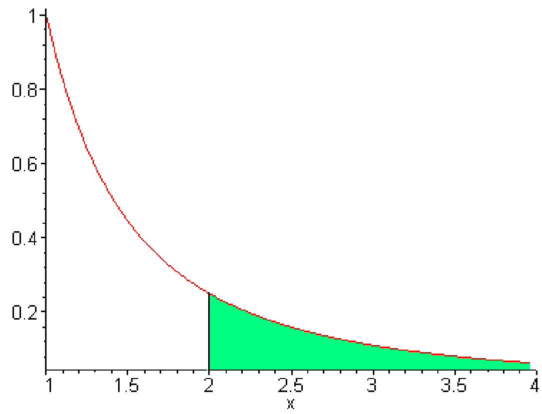
β)

$$\int_0^{\infty}\cos(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\cos(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[\sin(x)\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\sin(b)$$

το οποίο δεν υπάρχει επειδή στην περίπτωση όπου το x απειρίζεται η συνάρτηση $sin(x)$ κυμαίνεται μεταξύ 1 και -1.

γ)

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$



Ολοκληρώματα συναρτήσεων οι οποίες απειρίζονται σε κάποιο σημείο εντός του διαστήματος ολοκλήρωσης ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους** της $f(x)$.

Έστω ότι η $f(x)$ μία πραγματική συνάρτηση συνεχής

α) στο διάστημα $(a,b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

β) στο διάστημα $[a,b)$ τότε

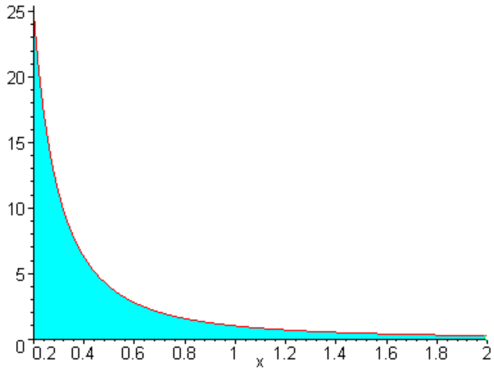
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

γ) στο διάστημα $[a,c)\cup(c,b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Αν το όριο (ή και τα δύο όρια στην περίπτωση γ) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή **συγκλίνει**. Αν το όριο δεν υπάρχει ή απειρίζεται τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Παραδείγματα



$$\int_{0+}^{2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0+} \int_a^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_a^2 =$$

$$= \lim_{a\to 0+} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^2 = \lim_{a\to 0+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{a}\right) = +\infty$$

β)

Ο παρακάτω υπολογισμός ολοκληρώματος είναι λανθασμένος.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_{-1}^{1} = \ln(1) - \ln|-1| = 0$$

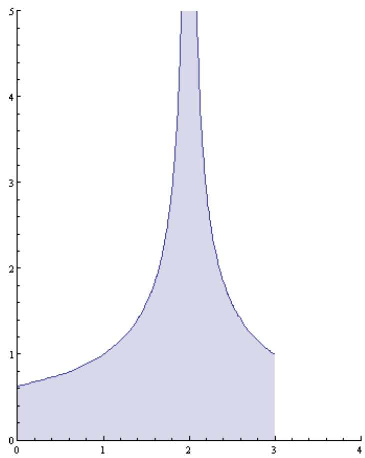
Ο σωστός υπολογισμός είναι ο ακόλουθος

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0-} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x} dx + \lim_{a\to 0+} \int_{a}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0-} \left[\ln|x|\right]_{-1}^{a} + \lim_{a\to 0+} \left[\ln|x|\right]_{a}^{1} =$$

$$= \lim_{a\to 0-} \left(\ln|a|\right) - \ln|-1| + \ln|1| - \lim_{a\to 0+} \left(\ln|a|\right) = -\infty + \infty$$

Το αποτέλεσμα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

γ)



$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \lim_{a\to 2-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + \lim_{a\to 2+} \int_a^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} =$$

$$= \lim_{a\to 2-} \int_0^a |x-2|^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{a\to 2+} \int_a^3 |x-2|^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \lim_{a\to 2-} \int_0^a (2-x)^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{a\to 2+} \int_a^3 (x-2)^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \lim_{a\to 2-} -\int_0^a (2-x)^{-\frac{2}{3}} d(2-x) + \lim_{a\to 2+} \int_a^3 (x-2)^{-\frac{2}{3}} d(x-2) =$$

$$= \lim_{a \to 2-} \left[-\frac{(2-x)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_0^a + \lim_{a \to 2+} \left[\frac{(x-2)^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_a^3 =$$

$$= \lim_{a \to 2-} \left[-\frac{(2-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_0^a + \lim_{a \to 2+} \left[\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_a^3 =$$

$$= \lim_{a \to 2-} \left[-3\sqrt[3]{(2-x)} \right]_0^a + \lim_{a \to 2+} \left[3\sqrt[3]{(x-2)} \right]_a^3 =$$

$$= -0 + 3\sqrt[3]{2} + 3 - 0 = 3 - 3\sqrt[3]{2}$$

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι δεν ορίζονται οποιαδήποτε τάξης ρίζα αρνητικού αριθμού και ρητές δυνάμεις αρνητικών αριθμών. Δηλαδή $a^{\frac{k}{m}}$ ορίζεται όταν $a \geq 0$. Για αυτό το λόγο αντικαθιστούμε $\sqrt[3]{a^2} = |a|^{\frac{2}{3}}$. Επίσης εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{όταν } x > 2 \\ 2-x & \text{όταν } x < 2 \end{cases}.$$

Ολοκληρώματα συναρτήσεων τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν συγχρόνως ως α’ και β’ είδους ονομάζονται **γενικευμένα ολοκληρώματα γ’ είδους** της $f(x)$.

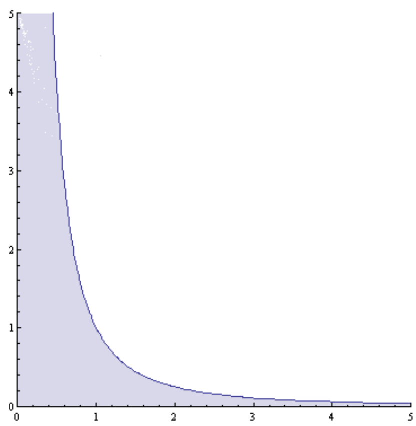
Παράδειγμα

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{0+}^{b} \frac{dx}{x^2} + \int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{a \to 0+} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b + \lim_{a \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^a =$$

$$= \lim_{a \to 0+} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right] + \lim_{a \to +\infty} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] =$$

$$= +\infty + \frac{1}{b} = +\infty$$



Παράδειγμα, Η συνάρτηση γάμμα

Έστω φυσικός αριθμός $n > 0$. Η συνάρτηση γάμμα στη θέση n, ορίζεται από τον τύπο:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

α) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση, δείξατε ότι $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ για $n > 0$ και με την βοήθεια αυτής της σχέσης την $\Gamma(n+1) = n!, (n = 0,1,2,3,...)$

β) Στηριζόμενοι στα προηγούμενα αποτελέσματα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int\limits_0^{+\infty} x^6 e^{-2x} dx$

Λύση

α) Από τον ορισμό της γάμμα συνάρτησης έχουμε:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx$$

Ολοκληρώνοντας παραγοντικά, έχουμε διαδοχικά:

$$\int_0^a x^n e^{-x} dx = \int_0^a x^n (-e^{-x})' dx = [x^n \cdot (-e^{-x})]_0^a - \int_0^a n x^{n-1} (-e^{-x}) dx =$$

$$= -a^n e^{-a} + n \int_0^a x^{n-1} e^{-x} dx$$

Υπολογίζουμε τώρα το όριο και έχουμε

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx = \lim_{a \to \infty} (-a^n e^{-a}) + n \lim_{a \to \infty} \int_0^a x^{n-1} e^{-x} dx$$

Το δεύτερο όριο είναι ίσο με $\Gamma(n)$, ενώ το πρώτο υπολογίζεται με κανόνα L΄Hospital:

$$\lim_{a \to \infty} (-a^n e^{-a}) = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{a^n}{e^a} \right) = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{n a^{n-1}}{e^a} \right) = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{n(n-1) a^{n-2}}{e^a} \right) =$$

$$= \cdots = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{e^a} \right) = 0$$

Αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα, έχουμε τελικά $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ζητούμενο, $\Gamma(n+1) = n!, (n = 0,1,2,3,...)$, επαγωγικά.

Αποδυκνείουμε ότι ισχύει για Για το δεύτερο ερώτημα, δείχνουμε πρώτα ότι ισχύει για $n = 0$, δηλαδή δείχνουμε ότι $\Gamma(1) = 1$.

Πράγματι:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^{a} e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}(1-e^{-a}) = 1$$

Δέχομαι ότι ισχύει για $n = k-1$ δηλαδή ισχύει $\Gamma(k) = (k-1)!$ και θα δείξω ότι ισχύει για $n = k$. Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, έχουμε:

$$\Gamma(k+1) = k\cdot\Gamma(k) = k\cdot(k-1)! = k!$$

β) Για να υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό: $x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{2}$ και θα πάρουμε:

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x}dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y}\frac{dy}{2} =$$

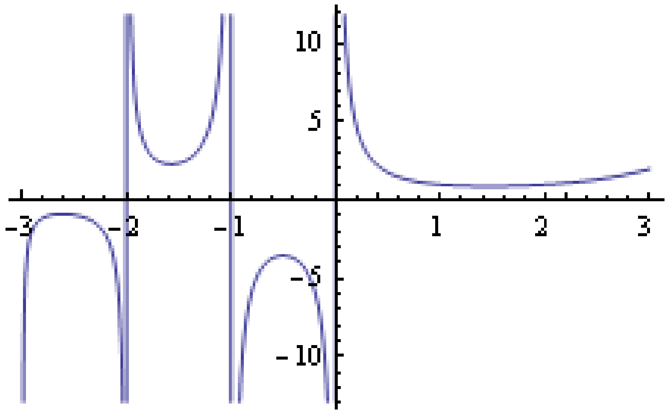
$$= \frac{1}{2^7}\int_0^{+\infty} y^6 e^{-y}dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

Παρατήρηση:

Γενικά η συνάρτηση γάμμα ορίζεται για μιγαδικούς $z \in \mathbb{C}$ ως

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$$

Όταν ορίζεται για πραγματικούς αριθμούς $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}dy$ το γράφημά της είναι το ακόλουθο:



Ασκήσεις

1. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε, χρησιμοποιώντας το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, να παραγωγισθεί η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

Λύση

Η F ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και έχουμε

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt=\int_{f(x)}^{c} h(t)dt+\int_{c}^{g(x)} h(t)dt=\int_{c}^{g(x)} h(t)dt-\int_{c}^{f(x)} h(t)dt$$ οπότε

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{c}^{g(x)} h(t)dt-\frac{d}{dx}\int_{c}^{f(x)} h(t)dt=$$

$$=\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} h(t)dt\right]_{u=g(x)} g'(x)-\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} h(t)dt\right]_{u=f(x)} f'(x)=$$

$$=\left[h(u)\right]_{u=g(x)} g'(x)-\left[h(u)\right]_{u=f(x)} f'(x)=h(g(x))g'(x)-h(f(x))f'(x)$$

2. Χρησιμοποιώντας το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, να παραγωγισθεί ως προς x η συνάρτηση: $F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln\left(t\right)dt$

Λύση

$$F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln\left(t\right)dt=\int_{x^2}^{c} \ln\left(t\right)dt+\int_{c}^{x^3} \ln\left(t\right)dt=\int_{c}^{x^3} \ln\left(t\right)dt-\int_{c}^{x^2} \ln\left(t\right)dt$$

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \ln\left(t\right)dt=\frac{d}{dx}\int_{c}^{x^3} \ln\left(t\right)dt-\frac{d}{dx}\int_{c}^{x^2} \ln\left(t\right)dt=$$

$$=\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} \ln\left(t\right)dt\right]_{u=x^3} (x^3)'-\left[\frac{d}{du}\int_{c}^{u} \ln\left(t\right)dt\right]_{u=x^2} (x^2)'$$

$$=\left[\ln\left(t\right)\right]_{u=x^3} (x^3)'-\left[\ln\left(t\right)\right]_{u=x^2} (x^2)'=3x^2\ln\left(x^3\right)-2x\ln\left(x^2\right)=(9x^2-4x)\ln\left(x\right)$$

3. Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor κέντρου 0 η συνάρτηση $f(x)=1-e^{-2x^2}$ και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(1-e^{-2x^2}\right)dx$ σε μορφή σειράς.

Αν είναι γνωστό ότι, αν σε μία εναλλάσσουσα σειρά Taylor, δηλαδή σειρά με μορφή $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n,\ a_n \geq 0$ **(οι συντελεστές της οποίας εναλλάσσουν το πρόσημό τους),** χρησιμοποιήσουμε το μερικό άθροισμα $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$, για να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση, τότε το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει (κατ' απόλυτη τιμή) τον πρώτο όρο που αγνοούμε, δηλαδή τον όρο a_{k+1}. Σε μία τέτοια περίπτωση πόσους όρους πρέπει να κρατήσουμε ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-3};

Λύση

Χρησιμοποιώντας και πάλι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης έχουμε:

$$f(x) = 1 - e^{-2x^2} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-2x^2\right)^n}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}x^{2n} = 2x^2 - 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 - .....$$

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_0^1\left(1-e^{-2x^2}\right)dx = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}x^{2n}\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!(2n+1)}$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη, αν κρατήσουμε n-όρους σε αυτό το ανάπτυγμα της σειράς αυτής που είναι εναλλάσσουσα, θα έχουμε σφάλμα κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)}$. Αν λοιπόν θέλουμε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-3}$ το οποίο επιτυγχάνεται για $n \geq 7$.

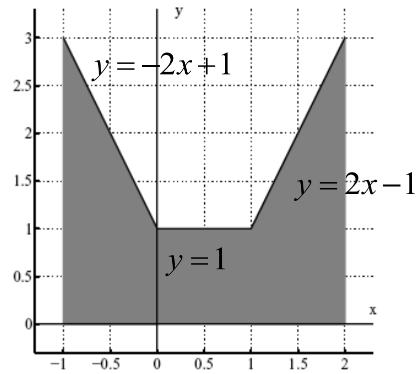
Κρατώντας έτσι 7 όρους έχουμε:

$$\frac{2^1}{1!\cdot 3} - \frac{2^2}{2!\cdot 5} + \frac{2^3}{3!\cdot 7} - \frac{2^4}{4!\cdot 9} + \frac{2^5}{5!\cdot 11} - \frac{2^6}{6!\cdot 13} + \frac{2^7}{7!\cdot 15} \cong 0.40217$$

4. Να σχεδιάσετε το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ με $a \leq x \leq b$, και να υπολογίσετε το εμβαδόν του: $f(x) = |x| + |x-1|, g(x) = 0,\ a = -1,\ b = 2$. Να επαληθεύστε το αποτέλεσμά

σας, υπολογίζοντας το ζητούμενο εμβαδόν με στοιχειώδη γεωμετρία, απ'ευθείας από την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση:



Προφανώς $f\left(x\right)\geq 0$,και ο τύπος της είναι ο ακόλουθος:

$$f(x)=\begin{cases}-x-x+1 & 0\leq x\\ x-x+1 & 0<x\leq 1\\ x+x-1 & 1<x\end{cases}=\begin{cases}-2x+1 & 0\leq x\\ 1 & 0<x\leq 1\\ 2x-1 & 1<x\end{cases}$$

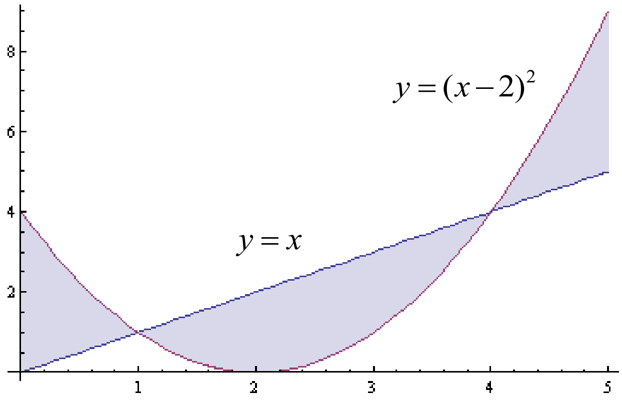
Οπότε

$$E=\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)+\int_{1}^{2}f(x)dx=$$
$$=\int_{-1}^{0}\left(-x-x+1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(x-x+1\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x+x-1\right)dx=$$
$$=\int_{-1}^{0}\left(-2x+1\right)dx+\int_{0}^{1}dx+\int_{1}^{2}\left(2x-1\right)dx=$$
$$=\left[\left[x\right]_{-1}^{0}-2\int_{-1}^{0}xdx\right]+\left[x\right]_{0}^{1}+\left[2\int_{1}^{2}xdx-\left[x\right]_{1}^{2}\right]=$$
$$=\left[1-2\int_{-1}^{0}xdx\right]+1+\left[2\int_{1}^{2}xdx-1\right]=$$
$$=1-2\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{-1}^{0}+2\left[\frac{x^{2}}{2}\right]_{1}^{2}=5$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με αυτό που βρίσκουμε αν υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν από το παραπάνω σχήμα αθροίζοντας το εμβαδόν του κάτω παραλληλογράμμου (με βάση 3 και ύψος 1) με αυτό των άνω δύο τριγώνων που συνθέτουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο βάσης 1 και ύψους 2.

5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από τη καμπύλη $y=x$ και πάνω από τη καμπύλη $y=(x-2)^{2}$;

ΛΥΣΗ



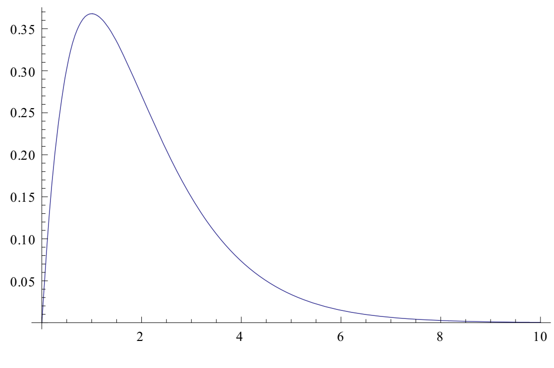
Θα βρούμε πρώτα τα κοινά σημεία των καμπυλών $y=x$ και $y=(x-2)^2$ λύνοντας την εξίσωση:

$$x=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0\,.$$

Άρα

$$\int_1^4 \left(x-(x-2)^2\right)dx=\int_1^4 (-x^2+5x-4)dx\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-4x\right]_1^4=\left[-\frac{64}{3}+40-16\right]-\left[-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right]=4.5$$

6. Να υπολογισθεί ο όγκος του σχήματος που προκύπτει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση $y=xe^{-x}$ γύρω από τον άξονα των x από $x=0$ ως $x=\infty$.



Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο που είδαμε παραπάνω ο ζητούμενος όγκος υπολογίζεται ως εξής:

$$V=\int_0^{+\infty} \pi(xe^{-x})^2\,dx=\pi\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx\,.$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{-2x}dx$ υπολογίζεται εύκολα με διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις

$$\int e^{-2x}dx = \int \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -\frac{e^{-2x}}{2} + c$$

$$\int xe^{-2x}dx = \int x\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int x'\frac{e^{-2x}}{-2}dx = -x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -x\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

$$\int x^2 e^{-2x}dx = \int x^2\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \int\left(x^2\right)'\frac{e^{-2x}}{-2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - x\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -e^{-2x}(\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}) + \mathrm{C}$$

Οπότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$V = \pi\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx = \pi\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-2x}(\frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2})\right]_0^b = \pi\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-2b}\left(\frac{1}{4} + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

και ο ζητούμενος όγκος ισούται προς $\frac{\pi}{4}$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-2b}\right) = 0$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(be^{-2b}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^{2b}}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b'}{\left(e^{2b}\right)'}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2e^{2b}}\right) = 0$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(b^2e^{-2b}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^2}{e^{2b}}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\left(b^2\right)'}{\left(e^{2b}\right)'}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2b}{2e^{2b}}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b}{e^{2b}}\right) = 0$$

7. Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{0} xe^{\frac{x}{2}}dx$

Λύση

Για το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int xe^{\frac{x}{2}}dx = \int x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)' dx = 2\int x\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' dx = 2\left[xe^{\frac{x}{2}} - \int (x)' e^{\frac{x}{2}}dx\right] = 2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}}dx =$$

$$= 2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int 2\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + c$$

Επομένως, $I_2 = \lim_{b\to-\infty}\left[2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}}\right]_b^0 = \lim_{b\to-\infty}\left[-4 - 2be^{\frac{b}{2}} + 4e^{\frac{b}{2}}\right] = -4$

αφού με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital έχουμε

$$\lim_{b\to-\infty}\left(be^{\frac{b}{2}}\right) = \lim_{b\to-\infty}\frac{b}{e^{-\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to-\infty}\frac{(b)'}{\left(e^{-\frac{b}{2}}\right)'} = \lim_{b\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}}} = 0$$

8. Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int\limits_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx$. Δείξτε ότι με απευθείας χρήση των κανόνων ολοκλήρωσης ισούται με - 2. Αυτό όμως είναι λάθος (γιατί;). Στη συνεχεία βρείτε το σωστό αποτέλεσμα.

Λύση

Εάν προχωρήσουμε αφελώς στην αντικατάσταση $x-1=u$, $dx=du$ και την αντίστοιχη αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης για $x=0, u=-1$ και για $x=2, u=1$, έχουμε

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2}du = \int_{-1}^1 u^{-2}\cdot du = \left[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^1 = \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = -1-1 = -2,$$

πράγμα εντελώς παράδοξο για το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης στο διάστημα από 0 μεχρι 2 (!).

Όμως το $1\in(0,2)$ είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $\frac{1}{(x-1)^2}$ επειδή

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty .$$

Οπότε ακολουθούμε τον ορισμό γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{c\to 1-}\int_0^c \frac{1}{(x-1)^2}dx + \lim_{c\to 1+}\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \lim_{c\to 1-}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_0^c + \lim_{c\to 1-}\left[\frac{-1}{(x-1)}\right]_c^2 = \lim_{c\to 1-}\left[\frac{-1}{(c-1)}-1\right] + \lim_{c\to 1-}\left[-1-\frac{-1}{(c-1)}\right] = -2+\infty+\infty = +\infty$$

9. Δείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1} = \ln(2)$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = e^x$ και την ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Λύση

Θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{e^x+1}$. Θέτουμε

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{du}{u(u+1)}$$

αυτό είναι ένα ρητό ολοκλήρωμα. Για να το υπολογίσουμε θα αναλύσουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)} = \frac{(A+B)u+A}{u(u+1)} \quad \Rightarrow \quad A=1, B=-1$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

και τελικά:

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα τώρα είναι:

$$\int_0^a \frac{dx}{e^x+1} = \ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) = \ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Και τελικά έχουμε:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{dx}{e^x+1} = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

Με τον κανόνα L΄ Hopital υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right) = \ln\left(\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right)$$

Αλλά $$\lim_{a\to\infty}\frac{e^a}{e^a+1}=\lim_{a\to\infty}\frac{(e^a)'}{(e^a+1)'}=\lim_{a\to\infty}\frac{e^a}{e^a}=1$$

και επομένως $$\lim_{a\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right)=\ln\left(\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)\right)=\ln(1)=0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα τελικά γίνεται:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1}=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{dx}{e^x+1}=\lim_{a\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^a}{e^a+1}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\ln(1)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=0-[\ln(1)-\ln(2)]=\ln(2)$$