1 Τριγωνομετρικες Συναρτησεις

1. Ολες οι ιδιοτητες των τριγωνομετρικων συναρτησεων μπορουν να αποδειχτουν απο τον παρακατω τυπο
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
ο οποιος θα αποδειχτει στο Κεφ. 15.

2. Απο τον παραπανω τυπο αποδεικνυονται και οι
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

2 Αντιστροφες Τριγωνομετρικες Συναρτησεις

1. Οι *αντιστροφες τριγωνομετρικες συναρτησεις* οριζονται ως εξης.
$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsin}(x) = y &\Leftrightarrow x = \sin(y) \\
\operatorname{arccos}(x) = y &\Leftrightarrow x = \cos(y) \\
\operatorname{arccos}(x) = y &\Leftrightarrow x = \tan(y) \\
\operatorname{arccot}(x) = y &\Leftrightarrow x = \cot(y) \\
\operatorname{arcsec}(x) = y &\Leftrightarrow x = \sec(y) \\
\operatorname{arccsc}(x) = y &\Leftrightarrow x = \csc(y).
\end{aligned}$$

3 Υπερβολικες Συναρτησεις

1. Οι *υπερβολικες συναρτησεις* οριζονται ως εξης.

$$\begin{aligned}
\text{υπερβολικο ημιτονο}: \quad & \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\text{υπερβολικο συνημιτονο}: \quad & \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\text{υπερβολικη εφαπτομενη}: \quad & \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
\text{υπερβολικη συνεφαπτομενη}: \quad & \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
\text{υπερβολικη τεμνουσα}: \quad & \sec h(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\
\text{υπερβολικη συντεμνουσα}: \quad & \csc h(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.
\end{aligned}$$

4 Αντιστροφες Υπερβολικες Συναρτησεις

1. Οι *αντιστροφες υπερβολικες συναρτησεις* οριζονται ως εξης.

$$\begin{gathered}
\operatorname{arcsin} h(x) = y \Leftrightarrow x = \sinh(y) \\
\operatorname{arccos} h(x) = y \Leftrightarrow x = \cosh(y) \\
\operatorname{arctan} h(x) = y \Leftrightarrow x = \tanh(y) \\
\operatorname{arccot} h(x) = y \Leftrightarrow x = \coth(y) \\
\operatorname{arcsec} h(x) = y \Leftrightarrow x = \sec h(y) \\
\operatorname{arccsc} h(x) = y \Leftrightarrow x = \csc h(y).
\end{gathered}$$

2. Ισχυουν και τα εξης

$$\operatorname{arcsin} h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

$$\operatorname{arccos} h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad 1 \le x \tag{2}$$

$$\operatorname{arctan} h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1 \tag{3}$$

$$\operatorname{arccot} h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x > 1 \text{ η } x < -1 \tag{4}$$

$$\operatorname{arcsec} h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \le 1 \tag{5}$$

$$\operatorname{arccsc} h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0. \tag{6}$$

5 Αοριστα Ολοκληρωματα και Ολοκληρωση με Αντικαταστaση

5.1 Ορισμοι και Ιδιοτητες

1. Εστω δυο συναρτησεις $f(x)$ και $F(x)$. Αν ισχυει
$$F'(x) = f(x) \tag{7}$$
τοτε λεμε οτι η συναρτηση $F(x)$ ειναι *ενα αοριστο ολοκληρωμα* της συναρτησης $f(x)$ και γραφουμε
$$F(x) = \int f(x)dx. \tag{8}$$

2. Χρησιμοποιουμε ισοδυναμα και τις εκφρασεις "η $F(x)$ ειναι *παραγουσα* της $f(x)$" και "η $F(x)$ ειναι *αντιπαραγωγος* της $f(x)$"

3. Το αοριστο ολοκληρωμα εχει τις εξης ιδιοτητες

   (α′) $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

   (β′) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

   (γ′) $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$.

5.2 Βασικα Ολοκληρωματα

1. Τα παρακατω αοριστα ολοκληρωματα ειναι "βασικα".

$$
\begin{aligned}
&: \int 1dx = x \\
&: \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad (m \neq -1) \\
&: \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \\
&: \int e^x dx = e^x \\
&: \int \sin(x)dx = -\cos(x) \\
&: \int \cos(x)dx = \sin(x) \\
&: \int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| \\
&: \int \sinh(x)dx = \cosh x \\
&: \int \cosh(x)dx = \sinh x \\
&: \int \tanh(x)dx = \ln|\cosh(x)|
\end{aligned}
$$

2. Αλλα σημαντικα ολοκληρωματα ειναι τα εξης:

$$: \int \frac{1}{\cos(x)}dx = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$
$$: \int \frac{1}{\sin(x)}dx = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$$
$$: \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a})$$
$$: \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$$
$$: \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$
$$: \int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$
$$: \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \arccos h(\frac{x}{a}) + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$
$$: \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \arcsin h(\frac{x}{a}) + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$
$$: \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$: \int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin h\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$: \int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\arccos h\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$: \int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$
$$: \int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

5.3 Ολοκληρωση με Αντικατασταση

1. Πολλα ολοκληρωματα υπολογιζονται χρησιμοποιωντας την ταυτοτητα $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$. Αυτη η μεθοδος λεγεται *ολοκληρωση με αντικατασταση*.

2. Μερικες χρησιμες αντικαταστασεις ειναι οι εξης.

   (α′) Για μορφη $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\tan(u)$ και παιρνω $a\sqrt{1+\tan^2(u)} = \frac{a}{\cos(u)}$.

   (β′) Για μορφη $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\sin(u)$ και παιρνω $a\sqrt{1-\sin^2(z)} = a\cos(u)$.

   (γ′) Για μορφη $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos(u)}$ και παιρνω $a\sqrt{\frac{1}{\sin^2(u)}-1} = a\tan(u)$.

   (δ′) Για μορφη $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ χρησιμοποιω $x = \frac{a}{b}\cosh(u)$ και παιρνω $a\sqrt{\cosh^2(u)-1} = a\sinh(u)$.

6 Ολοκληρωση κατα Παραγοντες

1. Η ολοκληρωση κατα παραγοντες βασιζεται στην εξης παρατηρηση: αν $f(x)$ και $g(x)$ ειναι συναρτησεις, τοτε

$$
\begin{gathered}
(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \\
\int (f(x)g(x))' \, dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow \\
\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.
\end{gathered}
$$

2. Μερικα βασικα ολοκληρωματα που υπολογιζονται με ολοκληρωση κατα παραγοντες ειναι τα εξης.

   (α′) $\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x$.

   (β′) $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x$.

   (γ′) $\int x e^x dx = x e^x - e^x$.

7 Ολοκληρωση με Αναπτυξη σε Στοιχειωδη Κλασματα

7.1 Ολοκληρωση Στοιχειωδων Κλασματων

1. Με τον ορο "στοιχειωδες κλασμα" εννοουμε οποιοδηποτε απο τα παρακατω

$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \frac{A}{(x-x_0)^2}, \qquad \dots \tag{9}$$

$$\frac{A}{ax^2+bx+c}, \qquad \frac{A}{(ax^2+bx+c)^2}, \qquad \dots \tag{10}$$

$$\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}, \qquad \frac{Ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}, \qquad \dots. \tag{11}$$

   Προσοση: Οταν στις (10) και (11) $b^2-4ac \geq 0$ αναγομαστε στην (9). Αρα μας ενδιαφερει η περιπτωση $b^2-4ac<0$.

2. Μπορουμε να υπολογισουμε το ολοκληρωμα *καθε* στοιχειωδους κλασματος. Δινουμε μερικα παραδειγματα (παρακατω θετουμε $E=\sqrt{4ac-b^2}$):

$$:\int \frac{A}{x-x_0}dx = A\ln|x-x_1|$$

$$:\int \frac{A}{(x-x_0)^2}dx = -\frac{A}{x-x_0}$$

$$:\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2A}{E}\arctan\frac{2ax+b}{E}$$

$$:\int \frac{A}{(ax^2+bx+c)^2}dx = \frac{A(2ax+b)}{E^2(ax^2+bx+c)} + \frac{4Aa}{E^3}\arctan\frac{2ax+b}{E}$$

$$:\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{2B}{E}\left(\arctan\frac{2ax+b}{E}\right) - \frac{A}{E}\cdot\frac{b}{a}\left(\arctan\frac{2ax+b}{E}\right)$$

3. Αν τα $P(x)$ και $Q(x)$ ειναι πολυωνυμα, η συναρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ λεγεται *ρητη*.

4. Οπως θα δουμε στο επομενο εδαγιο, μπορουμε να υπολογισουμε το ολκληρωμα *καθε* ρητης συναρτησης με αναγωγη αυτης σε αθροισμα στοιχειωδων κλασματων.

7.2 Αναπτυξη Ρητων Συναρτησεων σε Αθροισμα Στοιχειωδων Κλασματων

1. Ας υποθεσουμε οτι στην ρητη συναρτηση $P(x)/Q(x)$ ο βαθμος του $P(x)$ ειναι μικροτερος απο τον βαθμο του $Q(x)$. Εστω μια ριζα x_0 του $Q(x)$. Διακρινουμε τις εξης περιπτωσεις.

   (α′) Αν η ριζα ειναι πραγματικη και απλη, τοτε στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται *ενα* κλασμα της μορφης
   $$\frac{A}{x-x_0}.$$

   (β′) Αν η ριζα ειναι πραγματικη και πολλαπλοτητας n, τοτε στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζονται n κλασματα της μορφης
   $$\frac{A_1}{x-x_0}, \quad \frac{A_2}{(x-x_0)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-x_0)^n}.$$

(γ′) Αν η ριζα x_0 ειναι μιγαδικη και απλη, τοτε η συζυγης $\overline{x}_0$ ειναι επισης ριζα του $Q(x)$ και το γινομενο $(x - x_0)(x - \overline{x}_0)$ θα ισουται με $ax^2 + bx + c$ οπου τα a, b, c θα ειναι πραγματικοι αριθμοι. Στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται *ενα* κλασμα της μορφης

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

(δ′) Τελος, αν η ριζα x_0 ειναι μιγαδικη και πολλαπλοτητας n, στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται n κλασματα της μορφης

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}, \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^2}, \ldots, \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

2. Εχουμε δωσει στο προηγουμενο εδαφιο τα ολοκληρωματα των παραπανω στοιχειωδων κλασματων. Ετσι, οποιαδηποτε ρητη συναρτηση $f(x)$ με βαθμο του $P(x)$ μικροτερο απο αυτο του $Q(x)$ μπορει να ολοκληρωθει με αναπτυξη σε στοιχειωδη κλασματα.

3. Αν ο βαθμος του $P(x)$ ειναι μεγαλυτερος του βαθμου του $Q(x)$, με πολυωνυμικη διαιρεση παιρνουμε

$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

οπου τα $P_1(x)$, $P_2(x)$ ειναι πολυωνυμα και ο βαθμος του $P_2(x)$ μικροτερος απο αυτο του $Q(x)$. Ετσι μπορουμε και παλι να ολοκληρωσουμε την $f(x)$.

8 Ορισμενα Ολοκληρωματα και Εμβαδον

1. Εστω μια συνεχης θετικη συναρτηση $f(x)$ ορισμενη στο $\mathbf{R}$. Επιλεγω ενα σταθερο αριθμο a και οριζω (για $z \geq a$) την *συναρτηση εμβαδου* $F(z)$ να ειναι το εμβαδον μεταξυ των ευθειων $x = a$, $x = z$, του αξονα των x και της καμπυλης που οριζεται απο την $f(x)$.

2. Για την συναρτηση εμβαδου $F(x)$ ισχυει: $F'(x) = f(x)$.

3. Εστω συναρτηση $f(x)$ ορισμενη στο διαστημα $X \subseteq \mathbf{R}$. Για καθε ζευγος αριθμων $a, b \in X$, το *ορισμενο ολκληρωμα* ("συναρτηση εμβαδου") της $f(x)$ συμβολιζεται ως $\int_a^b f(x)$ και οριζεται ως εξης:
$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$
οπου $F(x)$ ειναι οποιαδηποτε συναρτηση ικανοποιει $F'(x) = f(x)$.

4. Το ορισμενο ολολ\κληρωμα εχει τις εξης ιδιοτητες:

   (α′) $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$

   (β′) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

   (γ′) $\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx$

   (δ′) $(\forall x \in [a, b] : 0 \leq f(x)) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)dx$

   (ε′) $(\forall x \in [a, b] : g(x) \leq f(x)) \Rightarrow \int_a^b g(x)d \leq \int_a^b f(x)dx$

   (ϛ′) $(\forall x \in [a, b] : A \leq f(x) \leq B) \Rightarrow A \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B \cdot (b - a)$

   (ζ′) $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

9 Γενικευμενα Ολοκληρωματα

1. Γενικευμενα Ολοκληρωματα 1ου τυπου ειναι αυτα οπου ενα η και τα δυο ορια ολοκληρωσης ειναι απειρα.

   (α′) οταν το $a = -\infty$ και το $b < \infty$ *οριζουμε* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^b f(x)dx$.

   (β′) οταν το $-\infty < a$ και το $b = \infty$ *οριζουμε* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)dx$.

   (γ′) οταν το $a = -\infty$ και το $b = \infty$ τοτε χρειαζεται προσοχη, διοτι μπορει να εχουμε

   $$\lim_{u \to -\infty} \lim_{w \to \infty} \int_u^w f(x)dx \neq \lim_{w \to \infty} \lim_{u \to -\infty} \int_u^w f(x)dx.$$

2. Γενικευμενα Ολοκληρωματα 2ου τυπου ειναι αυτα οπου η ολοκλρωτεα σψυναρτηση παρουσιαζει καποια ασυνεχεια στο διαστημα ολοκληρωσης.

   (α′) Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο a· τοτε

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

   (β′) Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο b· τοτε

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

   (γ′) Εστω οτι υπαρχει c με $a < c < b$ και η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο c. Τοτε μπορουμε να ορισουμε

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx.$$

   Σημειωστε οτι το παραπανω αποτελεσμα μπορει να ειναι *διαφορετικο* απο το

   $$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx \right).$$

10 Μηκος Τοξου και Κεντρο Βαρους

1. Εστω μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ειναι παραγωγισιμη στο $[a,b]$. Τοτε το *μηκος τοξου* (δηλ. το μηκος της καμπυλης) της $f(x)$ απο το a ως το b ειναι

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx.$$

2. Ενα ομογενες υλικο σωμα με πολυ λεπτη διατομη το οποιο οριζεται απο μια καμπυλη $f(x)$, τον αξονα των x (δηλ. την ευθεια $y=0$) και δυο ευθειες $x=x_1$ και $x=x_2$. Τοτε το σωμα μπορει να περιγραφει ως μια λεπτη "φετα" υλικου η οποια καταλαμβανει ενα χωριο $A\subseteq R^2$.

3. Το κεντρο βαρους του σωματος ειναι ενα σημειο στο οποιο μπορουμε να τοποθετησουμε ενα "υλικο σημειο" το οποιο να ειναι ισοδυναμο με το αρχικο σωμα. Το σημειο αυτο εχει συντεταγμενες $(\overline{x},\overline{y})$ που δινονται απο τα εξης:

$$\overline{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}xf(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx},\qquad \overline{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)\right)^2dx}{\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx}.$$

11 Παραμετρικες Συναρτησεις

1. Μπορουμε επισης να παραστησουμε μια καμπυλη με δυο συναρτησεις της μορφης $x(t)$, $y(t)$. Αυτη η αναπαρασταση λεγεται *παραμετρικη παρασταση καμπυλης* και οι $x(t), y(t)$ λεγονται *παραμετρικες εξισωσεις καμπυλων*.

2. Μπορουμε να ερμηνευσουμε την μεταβλητη t ως μια *χρονικη* μεταβλητη και να θεωρησουμε τα $x(t)$, $y(t)$ ως τις συντεταγμενες ενος σημειου το οποιο διατρεχει την καμπυλη.

3. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη $(x(t), y(t))$ και οταν το t παιρνει τιμες απο t_1 ως t_2, η καμπυλη περικλειει ενα *χωριο*. Τοτε το εμβαδο του χωριου δινεται απο τους τυπους
$$E = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \frac{dy}{dt} dt.$$

4. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη $(x(t), y(t))$ και το t παιρνει τιμες απο t_1 ως t_2. Το μηκος της καμπυλης ειναι
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

12 Πολικες Συντεταγμενες

1. Το σημειο του επιπεδου με *πολικες συντεταγμενες* (θ, r) οριζεται ως εξης. Εστω ενα ευθυγραμμο τμημα μηκους r το οποιο σχηματιζει γωνια θ με την ημιευθεια Ox. Τοτε το περας του ευθυγραμμου τμηματος ειναι το σημειο με πολικες συντεταγμενες (r, θ)

2. Μια καμπυλη μπορει να αναπαρσταθει απο μια εξισωση της μορφης $r = r(\theta)$. Για καθε τιμη του θ υπαρχει μια αντιστοιχη τιμη $r(\theta)$ και ενα αντιστοιχο σημειο $(\theta, r(\theta))$.

3. Η σχεση που υπαρχει μεταξυ των *καρτεσιανων* συντεταγμενων (x, y) και των πολικων συντεταγμενων (θ, r) ειναι η εξης:
$$\begin{aligned} &x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \\ &r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

4. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε σε πολικες συντεταγμνες $(\theta, r(\theta))$ και οταν το θ παιρνει τιμες απο θ_1 ως θ_2, η καμπυλη περικλειει ενα *χωριο*. Τοτε το εμβαδο του χωριου δινεται απο τον τυπο
$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_{,2}} r(\theta)^2 d\theta.$$

5. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε σε πολικες συντεταγμνες $(\theta, r(\theta))$ και το θ παιρνει τιμες απο θ_1 ως θ_2. Το μηκος της καμπυλης ειναι
$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

13 Σειρες Αριθμων

1. Μια συναρτηση $f(n)$, οπου το n παιρνει τις τιμες 0, 1, 2, ... λεγεται *ακολουθια*. Συνηθως αντι για $f(n)$ γραφουμε f_n.

2. Εστω μια ακολουθια f_n. Σχηματιζουμε μια νεα ακολουθια

$$s_1 = f_1,\ s_2 = f_1 + f_2,\ s_3 = f_1 + f_2 + f_3, ..., s_n = f_1 + ... + f_n, ...$$

   Η ακολουθια s_1, s_2, s_3, ... λεγεται *σειρα*.

3. Γραφουμε $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ και αν το οριο $\lim_{N\to\infty} s_N$ υπαρχει το συμβολιζουμε με $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Καταχρηστικα, χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ακομη και οταν το οριο δεν υπαρχει.

4. Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ λεγεται *συγκλινουσα* οταν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, *αποκλινουσα* (στο ∞ η $-\infty$) οταν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \pm\infty$ και *ταλαντευομενη σε καθε αλλη περιπτωση.*

5. Τα παρακατω ισχυουν για σειρες με *μη αρνητικους* ορους

   (α′) Εστω οτι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = a$. Τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} cf_n = ca$ (το a μπορει να ειναι μικροτερο η ισο με το απειρο).

   (β′) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.Αν $\lim_{n\to\infty} f_n \neq 0$ τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \pm\infty$.

   (γ′) Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλινει (σε αριθμο μικροτερο του απειρου) αν υπαρχει $a > 0$ τετοιο ωστε $\int_a^{\infty} f(x)dx < \infty$ και αποκλινει στο απειρο αν για καθε $a > 0$ εχουμε $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$.

   (δ′) Εστω οι ακολουθιες f_n και g_n τετοιες ωστε για καθε n εχουμε $0 \leq f_n \leq g_n$. Τοτε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty$$

   (ε′) Ας θεσουμε (αν το οριο υπαρχει) $a = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Αν $a < 1$, τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$. Αν $a > 1$, τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$. Αν $a = 1$, δεν μπορουμε να συμπερανουμε τιποτα.

   (ϛ′) Ας θεσουμε (αν το οριο υπαρχει) $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}$. Αν $a < 1$, τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$. Αν $a > 1$, τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$. Αν $a = 1$, δεν μπορουμε να συμπερανουμε τιποτα.

6. Μια σειρα λεγεται *εναλασσουσα* αν εχει την μορφη $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ...$ οπου $f_1, f_2, f_3, f_4, ...$ ειναι θετικοι αριθμοι.

7. Μια εναλασσουσα σειρα συγκλινει αν (α) για καθε n ισχυει: $f_n > f_{n+1}$ και (β) $\lim f_n = 0$.

8. Λεμε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι *απολυτως συγκλινουσα* αν $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$.

9. Μια απολυτως συγκλινουσα σειρα ειναι και συγκλινουσα.

14 Δυναμοσειρες

1. *Δυναμοσειρα* ειναι μια *συναρτηση* της μορφης $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n$.

2. Ο *τοπος συγκλισης* της δυναμοσειρας, ειναι οι τιμες του x για τις οποιες

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n \right| < \infty.$$

15 Σειρες *Taylor*

1. (Σειρα $MacLaurin$). Αν η συναρτηση $f(x)$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων στο σημειο $x_0 = 0$, τοτε η $f(x)$ μπορει να γραφει σε μορφη δυναμοσειρας (η οποια συγκλινει σε μια γειτονια του 0):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

οπου

$$f_0 = f(0) = \frac{f(0)}{0!}, \quad f_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad f_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad f_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad ..., f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad ...$$

2. (Σειρα $Taylor$). Αν η συναρτηση $f(x)$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων στο σημειο , τοτε η $f(x)$ μπορει να γραφει σε μορφη δυναμοσειρας (η οποια συγκλινει σε μια γειτονια του x_0):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n$$

οπου

$$f_0 = f(x_0) = \frac{f(x_0)}{0!}, \quad f_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad f_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad f_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad ..., f_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad ...$$