3. Ανάπτυγμα Taylor (για συναρτήσεις δυό μεταβλητών)

Μια «πολύπλοκη» συνάρτηση f, δυό μεταβλητών, μπορεί να προσεγγιστεί (στην γειτονιά ενός σημείου (x,y)) από μια πολυωνιμική συνάρτηση με την βοήθεια του **αναπτύγματος Taylor**, το οποίο δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f+\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2}{2!}f+\frac{(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3}{3!}f+...=$$

$$=f(x,y)+(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y})+\frac{1}{2!}(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x})+$$

$$+\frac{1}{3!}(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}k+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3})+...$$

Η δύναμη $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ μπορεί να βρεθεί αναγωγικά όπως στο **διώνυμο του Newton**:

$$(\alpha+\beta)^n=\binom{n}{0}\alpha^n+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+...+\binom{n}{\kappa}\alpha^{n-\kappa}\beta^\kappa+...+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1}+\binom{n}{n}\beta^n$$

όπου $\binom{n}{\kappa}=\frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$. (Ισχύει $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\ 0!=1$).

Δηλαδή

$$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n=h^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+\binom{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\frac{\partial}{\partial y}+...+\binom{n}{\kappa}h^\kappa k^{n-\kappa}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial y^{n-k}}+...$$

$$....+\binom{n}{n-1}hk^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}+k^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}$$

Το ανάπτυγμα Taylor στο σημείο (0,0) καλείται **ανάπτυγμα Maclaurin**.

Παρατήρηση Οι δυό εκφράσεις στο ανάπτυγμα Taylor δεν είναι ίσες, αλλά χρειάζεται ένας επιπλέον όρος στην ποσότητα του δεξιού μέλους που παριστάνει το **σφάλμα της προσέγγισης** (κατ' αναλογία με την περίπτωση του αναπτύγματος στις συναρτήσεις μιάς μεταβλητής).

Εφαρμογή 1

Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ σε ανάπτυγμα Taylor στο σημείο (0,0). Να βρείτε τους όρους μέχρι και τρίτου βαθμού.

Λύση Αν $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$, τότε

$$f(0,0)=0\,,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{x}\ln(1+y),\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{e^{x}}{1+y}\,,\;\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{x}\ln(1+y))=e^{x}\ln(1+y)\,,\;\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{x}}{1+y}\right)=\frac{e^{x}}{1+y}\,,\;\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{x}}{1+y}\right)=-\frac{e^{x}}{(1+y)^2}\,,\;\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=-1\,,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{x}\ln(1+y))=e^{x}\ln(1+y)\,,\;\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}=0\,,$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{x}}{1+y}\right)=\frac{e^{x}}{1+y}\,,\;\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}=1\,,$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-e^{x}}{(1+y)^2}\right)=\frac{-e^{x}}{(1+y)^2}\,,\;\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}=-1\,,$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-e^{x}}{(1+y)^2}\right)=\frac{2e^{x}}{(1+y)^3}\,,\;\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}=2\,.$$

Συνεπώς

$$f(h,k)=0+h0+k1+\frac{h^2}{2}0+hk1+\frac{k^2}{2}(-1)+\frac{h^3}{6}0+\frac{h^2k}{2}1+\frac{hk^2}{2}(-1)+\frac{k^3}{6}2+\ldots$$

$$=k+hk-\frac{k^2}{2}+\frac{h^2k}{2}-\frac{hk^2}{2}+\frac{1}{3}k^3+\ldots$$

ή θέτοντας $(h,k)=(x,y)$

$$f(x,y)=y+xy-\frac{y^2}{2}+\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}+\frac{1}{3}y^3+\ldots$$

Παρατήρηση Επειδή η δοθείσα συνάρτηση είναι γινόμενο δυό συναρτήσεων (μιάς μεταβλητής η καθε μία)

$$f(x,y)=e^{x}\ln(1+y)=h(x)g(y),\quad h(x)=e^{x},\; g(y)=\ln(1+y)$$

το ανάπτυγμα μπορεί να υπολογιστεί πολλαπλασιάζοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $h(x) = e^x$, $g(y) = \ln(1 + y)$.

Εφαρμογή 2

Υπολογίστε τους τρεις πρώτους (μη-μηδενικούς) όρους του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

στο σημείο $(x, y) = (0,0)$, χρησιμοποιώντας

α) τον τύπο (4.44) της σελίδας 67,

β) το γνωστό ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $\sin x$.

Λύση

α) Εφαρμόζουμε τον τύπο (4.44) της σελ. 67 θέτοντας $(x, y) = (0,0)$ και $(h, k) = (x, y)$.

Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left[y\cos(xy)\right]_{(0,0)} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left[x\cos(xy)\right]_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \left[-y^2\sin(xy)\right]_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right]_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \left[-x^2\sin(xy)\right]_{(0,0)} = 0$$

Ανάλογα όλες οι μερικές παράγωγοι $3^{ης}$ έως και $10^{ης}$ τάξης της f μηδενίζονται στο σημείο (0,0), εκτός της $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}$ και $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3} = -3!$ και $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5} = 5!$.

Η διαπίστωση που κάναμε μπορεί να δειχθεί κάνοντας διαδοχικές πράξεις. Όμως ο καλλίτερος τρόπος είναι να δούμε ότι από το β) μέρος αυτής της άσκησης ισχύει ότι

$$\sin(xy) = xy - \frac{(xy)^3}{3!} + \frac{(xy)^5}{5!} + \ldots \quad (*)$$

Από το γενικό ανάπτυγμα (1) ο όρος $f(0,0)$ είναι 0, οι όροι με παραγώγους $1^{ης}$ τάξης είναι 0. Οι όροι δεύτερης τάξης είναι επίσης 0 εκτός από τον

$$\frac{1}{2!}2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=xy$$

Ο δεύτερος μη μηδενικός όρος του αναπτύγματος (*) είναι ο $-\frac{1}{3!}x^3y^3$.

Από τα αναπτύγματα $\frac{1}{n!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^n$ προκύπτει ότι όροι με x^3y^3 εμφανίζονται μόνο για $n=6$, αφού οι γενικοί όροι του διωνυμικού αναπτύγματος είναι:

Έτσι πρέπει

$$\frac{1}{6!}\binom{6}{3}x^3y^3\frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^3}(0,0)=-\frac{1}{3!}x^3y^3 \text{ ή } \frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^3}(0,0)=-\frac{6!}{3!}\frac{1}{\frac{6!}{3!3!}}=-3!.$$

Αντίστοιχα ο όρος $+\frac{1}{5!}x^5y^5$ προκύπτει από το ανάπτυγμα $\frac{1}{n!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^n$ για $n=10$.

Ισχύει

$$\frac{1}{10!}\binom{10}{5}x^5y^5\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5\partial y^5}(0,0)=\frac{1}{5!}x^5y^5 \text{ ή } \frac{\partial^{10} f}{\partial x^5\partial y^5}(0,0)=\frac{10!}{5!}\frac{1}{\binom{10}{5}}=5!.$$

Επαγωγικά μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa\in N$, $\frac{\partial^\kappa f}{\partial x^\kappa}(0,0)=0$, $\frac{\partial^\kappa f}{\partial y^\kappa}(0,0)=0$,

$\frac{\partial^\kappa f}{\partial x^\lambda\partial y^\rho}(0,0)=0$ όπου $\lambda+\rho=\kappa$ και $\lambda\neq\rho$, ενώ ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^{2\kappa} f}{\partial x^\kappa\partial y^\kappa}=(-1)\kappa! \text{ αν ο } \kappa \text{ είναι περιττός.}$$

β) Ισχύει το ανάπτυγμα (8.39) της σελ. 128 του τόμου Β:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+... \quad \text{, για κάθε } z\in\Re.$$

Αν $z=xy$, τότε $f(x,y)=\sin(xy)=\sin z$ και από το ανάπτυγμα (5) έχουμε:

$$f(x,y)=\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...=xy-\frac{x^3y^3}{3!}+\frac{x^5y^5}{5!}+...$$

4. Ακρότατα

Ορισμός (τοπικό μέγιστο και ελάχιστο)
Εάν $z = f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση δυό μεταβλητών ορισμένη σε μιά περιοχή R που περιέχει το σημείο (x_0, y_0).

(α) Η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο (x_0, y_0) εάν $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) του πεδίου ορισμού, που ανήκουν σε έναν ανοιχτό δίσκο με κέντρο το (x_0, y_0).

(β) Η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο (x_0, y_0) εάν $f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) του πεδίου ορισμού, που ανήκουν σε έναν ανοιχτό δίσκο με κέντρο το (x_0, y_0).

Όπως και στις συναρτήσεις μιάς μεταβλητής, έτσι και εδώ βασικό για τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων είναι ένα κριτήριο πρώτης παραγώγου.

Θεώρημα 1 (κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα)
Εάν η συνάρτηση $z = f(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της και στο σημείο αυτό υπάρχουν οι πρώτες μερικές της παράγωγοι, τότε:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Παρατήρηση

1) Το παραπάνω θεώρημα, όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μιάς μεταβλητής, μας αναφέρει ότι τα μόνα σημεία στα οποία η $z = f(x,y)$ μπορεί να παρουσιάζει ακρότατα είναι:

   (α) εσωτερικά σημεία στα οποία $f_x(x,y) = 0, \quad f_y(x,y) = 0$
   (β) εσωτερικά σημεία όπου μια τουλάχιστον από τις f_x, f_y δεν υπάρχει
   (γ) συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της

   Τα σημεία για τα οποία ισχύει το (α) ή το (β) καλούνται **κρίσιμα σημεία**.

2) Το γεγονός ότι $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$ σε ένα εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της , **δεν** μας εγγυάται ότι η f έχει τοπικό ακρότατο εκεί.

Αν όμως η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης συνεχείς στο R, τότε το ακόλουθο θεώρημα βοηθά στην εύρεση τοπικών ακρότατων.

Θεώρημα 1 (**κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα**)
Εάν $z = f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση δυό μεταβλητών, και έστω ότι οι μερικές παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης είναι <u>συνεχείς</u> σε έναν κυκλικό δίσκο με κέντρο το σημείο (x_0, y_0) και έστω ότι :

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Εάν ορίσουμε την **διακρίνουσα** της $z = f(x,y)$ από την σχέση:

$$A = f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

Τότε
(α) Εάν $A > 0$ & $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ η $z = f(x,y)$ έχει **τοπικό ελάχιστο** στο (x_0,y_0).

(β) Εάν $A > 0$ & $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ η $z = f(x,y)$ έχει **τοπικό μέγιστο** στο (x_0,y_0).

(γ) Εάν $A < 0$ η $z = f(x,y)$ έχει ένα **σαγματικό** σημείο στο (x_0,y_0) (δηλαδή σε άλλες διευθύνσεις παρουσιάζει μέγιστο και σε άλλες ελάχιστο).

(δ) Εάν $A = 0$ τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το (x_0,y_0).

Εφαρμογή 1
Να βρεθούν τα ακρότατα (εφ'όσον υπάρχουν) της $z = f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

Λύση
Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 8 \qquad (2)$$

Τα πιθανά ακρότατα θα είναι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} 6x - 2y = 0 \\ -2x + 2y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3x \\ -2x + 6x - 8 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

Άρα το σημείο (2,6) είναι η μόνη λύση του συστήματος.

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους 2^{ης} τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\,.$$

Η διακρίνουσα $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,6)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,6)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,6)\right)^2=6\cdot 2-\left(-2\right)^2=8>0$ και επειδή $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6$ >0 το σημείο (x_0,y_0) =(2,6) είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Εφαρμογή 2

Να βρεθούν τα ακρότατα (εφ'όσον υπάρχουν) της $z=f(x,y)=4xy-x^4-y^4$

Λύση

Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4y-4x^3 \quad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x-4y^3 \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι. Άρα

$$\left.\begin{matrix}4y-4x^3=0\\4x-4y^3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=x^3\\x=y^3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y=\left(y^3\right)^3\Leftrightarrow y^9-y=0\Leftrightarrow y=0\ \text{ή}\ y=1\ \text{ή}\ y=-1$$

Αν $y=0\Rightarrow x=0$, εάν $y=1\Rightarrow x=1$ ενώ εάν $y=-1\Rightarrow x=-1$

Άρα τυχόν ακρότατα της συνάρτησης υπάρχουν στα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ και $(-1,-1)$.

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους 2ης τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-12x^2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12y^2\,.$$

Αν $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$ έχουμε τον ακόλουθο συνοπτικό πίνακα τιμών:

ζεύγος	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$	**A**
(0,0)	0	0	4	-16
(1,1)	-12	-12	4	128
$(-1,-1)$	-12	-12	4	128

Επειδή $A>0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ στα σημεία $(1,1)$ και $(-1,-1)$ στα εν λόγω σημεία η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά μέγιστο.

Επειδή $A<0$ στο (0,0), το σημείο αυτό είναι ένα σαγματικό σημείο.

Εφαρμογή 3
Το άθροισμα τριών θετικών αριθμών είναι 12. Βρείτε τους αριθμούς αυτούς αν θέλουμε το γινόμενό τους να είναι το μέγιστο δυνατό.

Λύση
Έστω x, y, z οι αριθμοί και $P=P(x,y,z)=xyz$ το γινόμενό τους. Τότε θέλουμε να βρούμε το μέγιστο της $P=P(x,y,z)$ όταν ισχύει (ο περιορισμός) $x+y+z=12$. Αλλά $x+y+z=12 \Rightarrow z=12-x-y$ και αντικαθιστώντας στην $P=P(x,y,z)$ έχουμε

$$P=P(x,y,z)=xy(12-x-y)$$

της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το μέγιστο. Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{\partial P}{\partial x}=12y-2xy-y^2$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=12x-2xy-x^2$$

Τα πιθανά ακρότατα θα είναι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} 12y-2xy-y^2=0 \\ 12x-2xy-x^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=4 \end{array}\right.$$

Άρα το σημείο (4,4) είναι η μόνη λύση του συστήματος.

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=-2y, \ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}=12-2x-2y, \ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=-2x.$$

Η διακρίνουσα

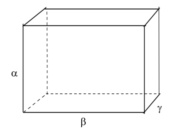
$$A=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(4,4)\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(4,4)-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(4,4)\right)^2=(-8)\cdot(-8)-(-4)^2=48>0$$

και επειδή $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(4,4)=-8<0$ το σημείο (4,4) είναι τοπικό μέγιστο της $P=P(x,y,z)$. Δηλαδή οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι x=4, y=4, z=12-4-4=4.

Εφαρμογή 4
Ένα ορθογώνιο κουτί, ανοιχτό στο πάνω μέρος έχει όγκο 32 cm^3. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του, ώστε η συνολική επιφάνειά του να είναι ελάχιστη ;

Λύση
Υποθέτουμε ότι το ορθογώνιο κουτί έχει πλευρές α, β, γ. (σχ. 1). Τότε αυτό έχει όγκο $V = \alpha\beta\gamma$. Ο όγκος του είναι σταθερός $V = 32 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 32$ (1). Η συνολική επιφάνεια αφού είναι ανοικτό στο πάνω μέρος, έχει εμβαδό S ίσο με το εμβαδό των πέντε υπολοίπων εδρών δηλ.

$$S = \alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta\gamma \qquad (2)$$



Σχήμα 1

Άρα αρκεί να βρούμε το ελάχιστο της; $S = S(\alpha, \beta, \gamma) = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta\gamma$ (3)
υπό τον περιορισμό

$$V = \alpha\beta\gamma = 32 \qquad (4)$$

Από την (4) προκύπτει ότι $\gamma = \dfrac{32}{\alpha\beta}$ (5)

Αντικαθιστώντας στην (3)

$$S = S(\alpha, \beta, \frac{32}{\alpha\beta}) = f(\alpha, \beta) = 2\alpha\beta + \frac{64}{\beta} + \frac{32}{\alpha}. \qquad (6)$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τα (α, β) που ελαχιστοποιούν την $S = f(\alpha, \beta)$.
Παραγωγίζοντας

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2\beta - \frac{32}{\alpha^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = 2\alpha - \frac{64}{\beta^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{64}{\alpha^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = \frac{128}{\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 2.$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι μηδενίζονται αν

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta - \dfrac{32}{\alpha^2} = 0 \\ 2\alpha - \dfrac{64}{\beta^2} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = \dfrac{16}{\alpha^2} \\ \beta^2 = \dfrac{32}{\alpha} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 2\alpha \\ \alpha^3 = 8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{array}\right\}.$$

Η ποσότητα

$$A = \frac{\partial^2 f(2,4)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(2,4)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(2,4)}{\partial x \partial y}\right]^2 = \frac{9}{4} \cdot 2 - 2^2 = 4{,}5 - 4 = 0{,}5 > 0$$

Και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,4) = \dfrac{9}{4} > 0$. Άρα το ζεύγος (2,4) δίνει ελάχιστη τιμή στην επιφάνεια.

Συνεπώς οι διαστάσεις του κουτιού με όγκο 32cm^3 και ελάχιστη επιφάνεια είναι

$$\alpha = 2\text{cm},\ \beta = 4\text{cm} \text{ και } \gamma = \frac{32\text{cm}^3}{2 \cdot 4\text{cm}^2} = 4\text{cm}.$$